

Stabilité de deux cheminées d'équilibre couplées, sans pertes d'insertion

The stability of two parallel connected
surge tanks without throttling losses

PAR L. SIDERIADES

DOCTEUR ÈS SCIENCES,
CHARGÉ DE RECHERCHES AU C.N.R.S. (*)

L'auteur présente une solution du problème de la stabilité des systèmes à double chambre d'équilibre, couplés en parallèle sur une même usine. Les méthodes de l'analyse mathématique relèvent de la topologie géométrique. Les conditions de stabilité s'expriment sous forme d'un régionnement simple dans le plan des inverses des sections des cheminées.

The author gives a solution for the stability problem of systems involving two surge tanks connected in parallel to the same power plant. The methods of mathematical analysis he uses are dependent upon geometrical topology. Stability conditions are expressed as a simple division into regions of the plane of the inverse cross sections of the surge tanks.

INTRODUCTION

Le système à double chambre d'équilibre faisant l'objet de cet article comprend deux chambres situées d'un même côté de la turbine. Il diffère donc du système récemment étudié par le Dr C. Jaeger [1] en ce sens qu'il est plus général. La mise en équations du problème exige en effet une équation supplémentaire traduisant les hypothèses de structure de la dérivation des conduites forcées, en plus des hypothèses habituelles de continuité, qui interviennent seules lorsqu'on suppose que les deux cheminées se trouvent respectivement aux extrémités amont et aval par rapport à la turbine.

En conservant comme variables les vitesses dans les galeries d'amenée, et moyennant l'hypothèse qu'il n'y a pas de pertes d'insertion, on aboutit à un système d'équations différentiel-

les tributaires d'un hyperespace à quatre dimensions. Les méthodes de l'analyse topologique mettent en évidence l'existence de deux points singuliers correspondant aux deux positions d'équilibre stable du système, et il est relativement aisé de traduire les conditions de stabilité dans le plan des inverses des sections des cheminées, à l'aide d'une région délimitée par le contour d'un pentagone curviligne.

On fait une application à la chute de Valabres (E.D.F.-Alpes 3) qui est une centrale souterraine du type que nous avons envisagé. Nous pensons, suivant en cela l'avis exprimé par le Dr Jaeger, que de nombreux systèmes à double chambre seront construits, étant donné la vogue des centrales souterraines, et il est donc très utile de mettre au point une théorie générale de ces systèmes.

Nous proposons, en conséquence, une solution générale du problème de la stabilité, qui relève,

(*) Centre de Recherches Scientifiques, Industrielles et Maritimes de Marseille.

du point de vue topologique, de la situation d'un point — point singulier des courbes intégrales — dans une certaine région, délimitée par une nappe, de l'espace caractéristique (*). Lorsque ce point se trouve sur la nappe en question, on obtient des conditions aux limites connues sous le nom de conditions de stabilité de Routh-Hurwitz; ce sont celles du système linéarisé, d'après le théorème général de Liapounoff. Mais on peut envisager un déplacement du point singulier dans l'espace caractéristique, et obtenir d'autres conditions, plus complexes il est vrai, mais résolvant un problème plus général que celui de la stabilité : le problème du contrôle des oscillations par une information directe du terme exprimant l'amortissement.

1. — Etude préliminaire du circuit-dérivation.

La difficulté, par rapport au système à double chambre d'équilibre envisagé par le Dr Jaeger, étant constituée par la dérivation des conduites forcées, il importe de faire une étude préliminaire de ce circuit. On pourra, à ce sujet, se reporter à l'excellent ouvrage de L. Bergeron [2].

Soit donc un embranchement tel que celui indiqué sur la figure 1. Equation de continuité :

$$\varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 = \varphi u \tag{1}$$

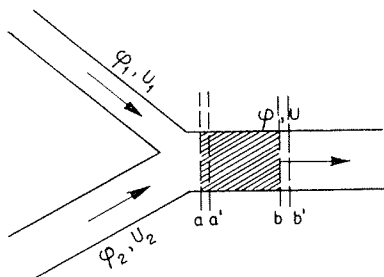


FIG. 1.

On suppose que, sur les faces *a* et *b* délimitant le « parcours de mélange », s'exercent des pressions uniformes *A* et *B*. Les forces extérieures appliquées à cette tranche sont :

$$(A - B) \varpi \varphi$$

La variation de quantité de mouvement d'une tranche *aa'* dans son passage en *bb'* est d'autre part :

$$(\varpi/g) \varphi u^2 - (\varpi/g) (\varphi_1 u_1^2 + \varphi_2 u_2^2)$$

(*) Etant donné une équation du *n*ème ordre :

$$p^n + \alpha_1 p^{n-1} + \dots + \alpha_n = 0$$

on appelle espace caractéristique l'espace rapporté aux axes des *α*.

ou :

$$(\varpi/g) [\varphi_1 u_1 (u - u_1) + \varphi_2 u_2 (u - u_2)] \tag{2} \text{ d'après (1)}$$

Le théorème de quantité de mouvement peut donc s'écrire :

$$(A - B) \varpi \varphi = (\varpi/g) [\varphi_1 u_1 (u - u_1) + \varphi_2 u_2 (u - u_2)] \tag{3}$$

D'autre part, l'énergie de la tranche *aa'* est :

$$\varpi \varphi_1 u_1 [(u_1^2/2g) + A] + \varpi \varphi_2 u_2 [(u_2^2/2g) + A]$$

celle de la tranche *bb'* : $\varpi \varphi u [(u^2/2g) + B]$.

D'où la perte de charge entre *a* et *b* :

$$\pi = (\varpi \varphi_1 u_1 / 2g) [u_1^2 - u^2] + (\varpi \varphi_2 u_2 / 2g) [u_2^2 - u^2] + \varpi \varphi u (A - B)$$

En tenant compte de (3), cette équation s'écrit :

$$\pi = (\varpi/2g) [\varphi_1 u_1 (u - u_1)^2 + \varphi_2 u_2 (u - u_2)^2] \tag{4}$$

Elle exprime la perte totale due au mélange, sous forme d'une généralisation au circuit-dérivation du théorème de Borda. Un tel résultat n'a d'intérêt pratique que si le système (réalisation de la tuyauterie) travaille dans les conditions optima où cette perte de charge est minima. Dans ce cas, les trois vitesses sont liées par :

$$(\varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2) u = \varphi_1 u_1^2 + \varphi_2 u_2^2 \tag{5}$$

et l'expression de la perte minima est :

$$\pi_m = - (\varpi/2g) [\varphi_1 u_1^2 (u - u_1) + \varphi_2 u_2^2 (u - u_2)] \tag{6}$$

Remarquons que (5) n'est autre que (2)=0. Autrement dit, à perte de charge minima, la variation de quantité de mouvement est nulle; la valeur de *u* qui rend la perte minima est donc aussi celle qui annule la variation de pression entre *a* et *b*.

Pour l'objet du problème qui nous préoccupe, nous supposons que la vitesse *u* résultant du mélange est donnée par la relation (5).

2. — Position du problème.

Le schéma de l'installation est représenté sur la figure 2 qui explicite une partie des notations utilisées. En ce qui concerne l'application des théorèmes généraux au système hydraulique constitué par une seule chambre, et que nous utilisons ici, leur étude a fait l'objet d'une précédente note [3]. Les équations générales du système sont les suivantes (on utilise le jeu des

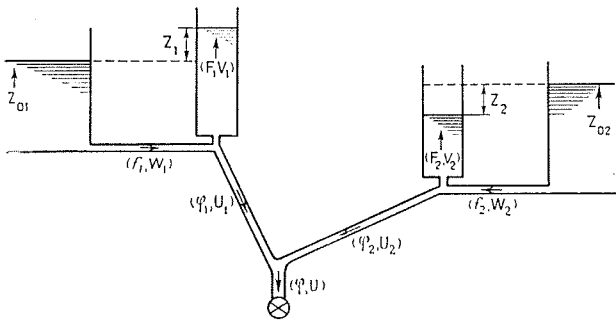


FIG. 2.

indices de manière à éviter les équations doubles) :

Equations de continuité :

$$f_i W_i = F_i V_i + \varphi_i u_i \quad (7)$$

$$\varphi u = \Sigma \varphi_i u_i \quad (8)$$

Théorème de l'énergie cinétique appliqué aux galeries d'aménée :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{L_i}{g} \dot{W}_i + h_i &= 0 & (9) \\ h_i &= Z_i + P'_{0i} W_i^2 + \psi_i(V_i) & (10) \end{aligned} \right.$$

avec :

$$V_i = \dot{Z}_i$$

Equation complémentaire du circuit dérivation :

$$u \Sigma (\varphi_i u_i) = \Sigma (\varphi_i u_i^2) \quad (11)$$

Equation du réglage à puissance effective constante :

$$\Sigma \varphi_i u_i [h_i + Z_{0i} + (u - u_i)^2 / 2g] = K \quad (11')$$

soit encore, en supposant que la perte de charge $(\Delta u)^2 / 2g$ est faible devant Z_{0i} :

$$\Sigma \varphi_i u_i (h_i + Z_{0i}) = K \quad (12)$$

On suppose, dans cette étude, qu'il n'y a pas de pertes d'insertion ($\psi=0$). Non pas que l'hypothèse contraire conduise à des difficultés analytiques insurmontables, mais parce que nous nous proposons de définir dans ce travail des conditions *limites* de stabilité sous forme de sections *minima* ayant le même caractère de généralité et de référence en vue des applications pratiques que la condition de Thoma. Comme l'a

(*) Le terme K est une constante comprenant le poids spécifique de l'eau ainsi que le rendement des turbines et des machines électriques.

montré A. Gardel [4], la loi de perte de charge à l'insertion $\psi(V)$ est essentiellement discontinue à l'origine ($V=0$), avec une valeur moyenne négative pour la pente déterminant pour la stabilité des sections supérieures à celle de Thoma.

Dans ces conditions, il est commode de résoudre le système des équations (7) à (12) par rapport aux vitesses W_i dans les galeries d'aménée. Sans entrer dans le détail des calculs qui ne présentent aucune difficulté, en posant :

$$\left\{ \begin{aligned} x &= W_1 & T &= Z_{01} - (L_1/g) u + \lambda [Z_{02} - (L_2/g) v] \\ y &= W_2 \\ u &= \dot{W}_1 & \lambda &= \frac{\varphi_1 \varphi_2 \pm \sqrt{\Delta}}{\varphi_2 (\varphi - \varphi_1)} \text{ avec } \Delta = \varphi_1 \varphi_2 \varphi (\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi) \\ v &= \dot{W}_2 \end{aligned} \right.$$

on obtient le système suivant des équations différentielles mises sous la forme dynamique :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{uT} &= \frac{dy}{vT} = \frac{F_1 L_1}{g} \frac{du}{K - xT (f_1 + 2 P'_{01} F_1 u)} \\ &= \frac{\lambda F_2 L_2}{g} \frac{dv}{K - \lambda yT (f_2 + 2 P'_{02} F_2 v)} = \frac{dt}{T} \end{aligned} \quad (13)$$

3. — Analyse de la solution.

On se trouve en présence d'un problème non linéaire dont les courbes intégrales sont représentées dans un hyperspace à quatre dimensions x, y, u, v . Le système (13) appartient à la classe générale :

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{du}{U} = \frac{dv}{V} = \frac{dt}{T}$$

où X, Y, U, V, T sont des polynômes entiers et les hypersurfaces représentées par ces polynômes sont algébriques. Pour le problème qui nous préoccupe :

$$X = uT; \quad Y = vT;$$

$$U = (g/F_1 L_1) [K - xT (f_1 + 2 P'_{01} F_1 u)];$$

$$V = (g/\lambda F_2 L_2) [K - \lambda yT (f_2 + 2 P'_{02} F_2 v)]$$

Les points communs à $X=Y=U=V=0$ sont les points singuliers. Il y en a deux (deux valeurs de λ) dont les coordonnées sont :

$$u=v=0 \left\{ \begin{aligned} x &= K (f_1 Z_0^*)^{-1} \\ y &= K (\lambda f_2 Z_0^*)^{-1} \end{aligned} \right. \text{ avec } Z_0^* = Z_{01} + \lambda Z_{02}$$

Physiquement, la relation $u=v=0$ était évi-

dente, car en un point singulier, donc en une position d'équilibre, le mouvement du système est permanent et les vitesses dans les galeries sont constantes (valeurs de x, y). Il est facile d'en déduire les hauteurs d'eau dans les cheminées au moyen des équations (10). Mais les positions d'équilibre peuvent être stables ou instables, et cela indépendamment de la façon dont l'affixe représentatif du système peut tendre vers le point singulier et s'en éloigner : c'est ce que nous appellerons la stabilité *inconditionnelle*. Comment la caractériser ?

Appliquons à un vecteur quelconque \vec{G} de l'hyperespace x, y, u, v , la transformation :

$$\alpha \vec{G} = S \vec{G}$$

définie par la matrice :

$$|\alpha| = \left| \frac{D(X, Y, U, V)}{D(x, y, u, v)} \right| \quad (D = \text{jacobien})$$

telle que S soit un scalaire, c'est-à-dire que le vecteur G soit transformé en un vecteur parallèle (vecteur propre). Les valeurs possibles de S sont les racines de l'équation aux S , ou équation caractéristique de $|\alpha|$, suivante :

$$S^4 + \alpha_1 S^3 + \alpha_2 S^2 + \alpha_3 S + \alpha_4 = 0$$

Si le vecteur G est issu du point singulier, l'équation précédente détermine les *valeurs propres* en ce point. Si ces racines ont leur partie réelle négative (condition suffisante), le système est stable (inconditionnellement), et la stabilité du système non linéaire est la même que celle du système linéarisé en ce point. C'est ce qu'exprime le théorème général de Liapounoff [5].

On peut donc, sous une forme imagée, concevoir en un point singulier l'existence de gran-

deurs, les valeurs propres, analogues à des coefficients de contraction ou de dilatation attachés en ce point et s'exerçant suivant des directions propres. Ces grandeurs complexes ne sont intéressantes, du point de vue stabilité, que par leur partie réelle, qui doit être *négative*, c'est-à-dire caractériser une tendance du système à la *contraction*. On sait que cette propriété se traduit par des inégalités entre les α_i qui sont connues sous le nom de « conditions de Routh-Hurwitz ». Elles sont au nombre de six pour une équation caractéristique du quatrième degré.

Il n'est donc nul besoin, pour l'étude de la stabilité inconditionnelle d'un système, de faire une hypothèse sur la *réalité* des racines de l'équation caractéristique, car une telle hypothèse intervient comme une information complémentaire se traduisant par des conditions nouvelles, plus complexes et plus limitatives, en ce sens qu'elles déterminent la manière dont l'affixe représentatif du système évolue au *voisinage* du point singulier; ce serait là la solution au problème de l'étude de l'amortissement des oscillations que nous n'aborderons pas ici.

REMARQUE. — La transformation que nous avons envisagée met en évidence un espace caractéristique, celui des α_i . Les conditions de Routh-Hurwitz sont représentées dans cet espace par certaines régions *fixes*, valables pour tous les systèmes. Si on appelle « spectre » du système les coordonnées caractéristiques du point singulier, le problème de la stabilité, transposé dans l'espace caractéristique, est donc celui de la position géométrique du spectre par rapport aux régions fixes. On a donc là, avec le tracé des surfaces caractéristiques (tracé effectué une fois pour toutes), un « appareil de mesure » mathématique permettant de prévoir l'évolution du système physique d'après la situation de son spectre.

REPRÉSENTATION DES CONDITIONS DE ROUTH-HURWITZ

La discussion des conditions de Routh-Hurwitz est relativement aisée dans le plan des inverses des sections des cheminées. On posera :

$$x = 1/F_1, \quad y = 1/F_2$$

ainsi que :

$$\pi'_{01} = \frac{P'_{01}}{L_1 f_1} ; \quad \pi'_{02} = \frac{P'_{02}}{\lambda L_2 f_2}$$

Les α_i s'explicitent ainsi :

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_1 &= K \left[2g(\pi'_{01} + \pi'_{02}) - \frac{1}{Z_0^*} \left(\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} \right) \right] \\ \alpha_2 &= 2K^2g \left[2g\pi'_{01}\pi'_{02} - \frac{1}{Z_0^*} \left(\frac{\pi'_{01}}{F_2} + \frac{\pi'_{02}}{F_1} \right) \right] + gZ_0^{*2} \left(\frac{f_1}{F_1 L_1} + \frac{f_2}{F_2 L_2} \right) \\ \alpha_3 &= \frac{Z_0^* K g^2}{F_1 F_2 L_1 L_2} \left[2Z_0^* (\pi'_{01} f_2 L_1 F_1 + \pi'_{02} f_1 L_2 F_2) - \frac{1}{g} (f_1 L_2 + f_2 L_1) \right] \\ \alpha_4 &= \frac{g^2}{F_1 F_2 L_1 L_2} f_1 f_2 Z_0^{*4} \end{aligned} \right.$$

a) Condition $\alpha_1 > 0$. c'est-à-dire dans le plan des x, y :

$$x + y < 2gZ_0^* (\pi'_{01} + \pi'_{02}) \tag{14}$$

on obtient le domaine intérieur à un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit valent : (Cf. fig. 3.)

$$OA = OB = 2gZ_0^* (\pi'_{01} + \pi'_{02})$$

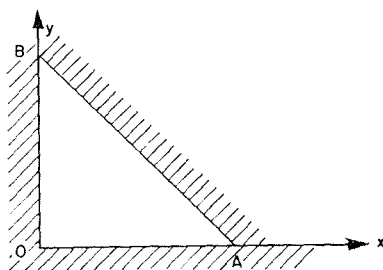


FIG. 3.

b) Condition $\alpha_2 > 0$:

On trouve ici la région délimitée par la droite :

$$\left(\frac{f_1}{L_1} - \frac{2K^2\pi'_{02}}{Z_0^{*3}}\right)x + \left(\frac{f_2}{L_2} - \frac{2K^2\pi'_{01}}{Z_0^{*3}}\right)y + 4g\pi'_{01}\pi'_{02} \frac{K^2}{Z_0^{*2}} > 0$$

Il est facile de vérifier que tous les coefficients sont positifs, car :

$$\frac{K^2}{Z_0^{*3}} \pi'_0 \ll \frac{f}{L}$$

La condition b) n'est donc pas limitative.

c) Condition $\alpha_3 > 0$:

On a ici la région délimitée par une hyperbole équilatère d'équation :

$$axy - bx - cy < 0$$

avec :

$$a = \frac{f_2L_1 + f_1L_2}{2gZ_0^*} ; b = f_1L_2\pi'_{02} ; c = f_2L_1\pi'_{01} \tag{15}$$

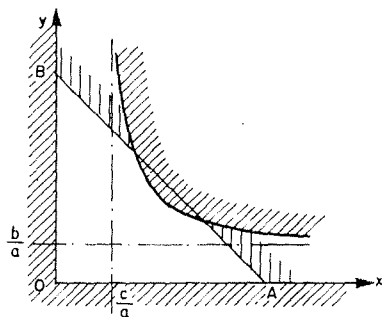


FIG. 4.

Le centre de l'hyperbole, de coordonnées $c/a, b/a$, étant toujours à l'intérieur du triangle de la condition a), la condition c) est en général limitative (cf. fig. 4).

d) Condition $\alpha_4 > 0$:

Cette condition est toujours vérifiée, donc non limitative.

e) Condition $\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3 > 0$:

Si on fait l'hypothèse simplificatrice suivante (d'ailleurs fort valable) :

$$\frac{K^2}{Z_0^{*3}} \pi'_0 \cong \frac{P_0}{Z_0^*} \frac{\varphi}{L} \ll \frac{f}{L}$$

on peut négliger $K^2\pi'_0/Z_0^{*3}$ devant f/L .

On obtient la région délimitée par la conique suivante :

$$Z_0^* (f_1L_2x^2 + f_2L_1y^2) - 2gZ_0^{*2} (f_1L_2\pi'_{01}x + f_2L_1\pi'_{02}y) - 8g^2K^2L_1L_2\pi'_{01}\pi'_{02} (\pi'_{01} + \pi'_{02}) < 0 \tag{16}$$

C'est une ellipse du faisceau linéaire déterminé par les droites des conditions a) b), et l'hyperbole équilatère de la condition c). Il est très facile de la construire :

— son centre a pour coordonnées :

$$x = gZ_0^*\pi'_{01}$$

$$y = gZ_0^*\pi'_{02}$$

— son équation rapportée au centre est :

(Cf. fig. 5)

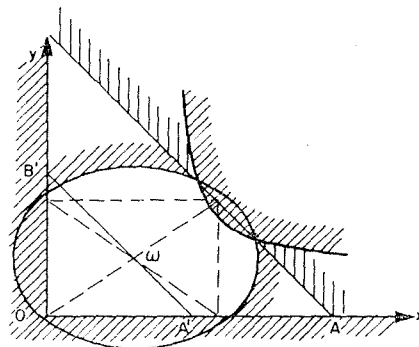


FIG. 5.

$$f_1L_2X^2 + f_2L_1Y^2 - g^2Z_0^{*2} (f_1L_2\pi'_{01}^2 + f_2L_1\pi'_{02}^2) = 0$$

(les axes sont entre eux dans le rapport :

$$\sqrt{L_1/f_1} / \sqrt{L_2/f_2}.$$

f) Condition $(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3)\alpha_3 - \alpha_1^2\alpha_4 > 0$:

Moyennant la même hypothèse simplificatrice

que précédemment, on peut écrire cette dernière condition dans le plan des x, y :

$$[x - 2gZ_0^* \pi'_{01}] [y - 2gZ_0^* \pi'_{02}] [(f_1/L_1)x - (f_2/L_2)y]^2 + 16g^3 K^2 \pi'_{01} \pi'_{02} [\pi'_{01} + \pi'_{02}] [(\pi'_{02}/L_1) f_1 x + (\pi'_{01}/L_2) f_2 y] > 0 \quad (17)$$

On obtient la région délimitée par une courbe du quatrième degré qu'il est commode de construire par la méthode des régions (fig. 6). Cette

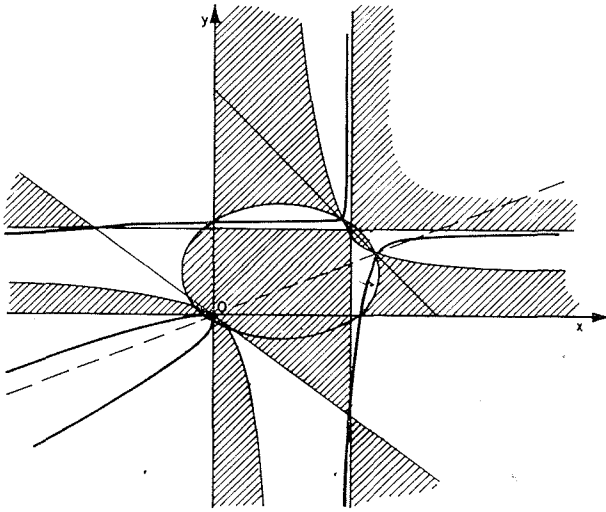


FIG. 6.

dernière condition est évidemment limitative. On obtient, en définitive, une région définie par le contour d'un pentagone curviligne (fig. 7).

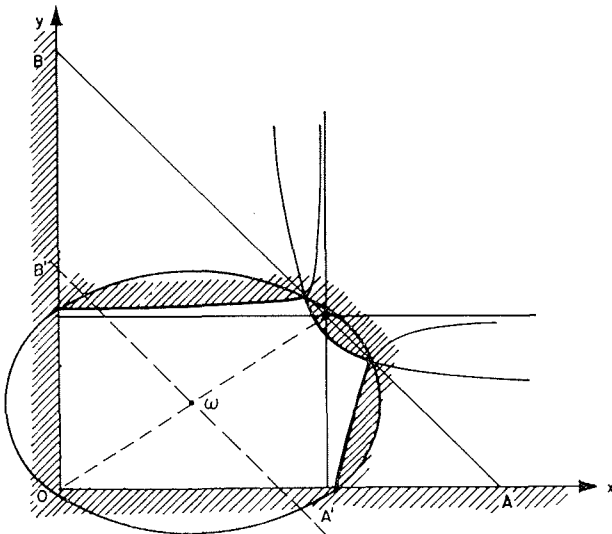


FIG. 7.

REMARQUE IMPORTANTE :

On a traité à dessein toutes les conditions de Routh-Hurwitz de manière à montrer comment les courbes limitatrices resserrent progressive-

ment la zone de stabilité. On a vu que ces conditions ne sont pas toutes limitatives. D'où l'idée de l'existence de relations entre ces conditions qui peuvent se réduire à un nombre minimum sans modification pour la solution finale.

En effet, partons de la condition 6 :

$$(\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3) \alpha_3 - \alpha_1^2 \alpha_4 > 0$$

Par génération, elle entraîne :

$$(\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3) > 0 \rightarrow \alpha_1 > 0$$

qui sont les conditions 1 et 5, donc à éliminer. Toujours en considérant la condition 6, il existe quatre combinaisons possibles pour les signes de α_3 et α_4 . Or, α_4 est une relation qui est toujours positive, toujours vérifiée. Et la seule combinaison possible avec α_3 impose : $\alpha_3 > 0$. Il reste donc $\alpha_3 > 0$ comme condition limitative. En définitive, pour le problème qui nous occupe, les six conditions de Routh-Hurwitz se réduisent à deux seulement : les conditions 3 et 6.

On aurait pu traiter la solution en envisageant uniquement ces deux conditions dès le départ, mais nous pensons que la tâche du lecteur n'aurait pas été facilitée, bien que l'exposé eût été plus court.

4. — Résultats.

a) Dans le plan des inverses des sections des cheminées, on répète la construction précédemment étudiée pour les deux valeurs de λ , à moins que $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, auquel cas les deux valeurs de λ sont confondues. Le système est totalement stable si les $1/F$ sont intérieurs au contour d'un pentagone curviligne délimitant une région commune où les quatre conditions de Routh-Hurwitz sont simultanément satisfaites. Un tel exemple est donné sur la figure 8.

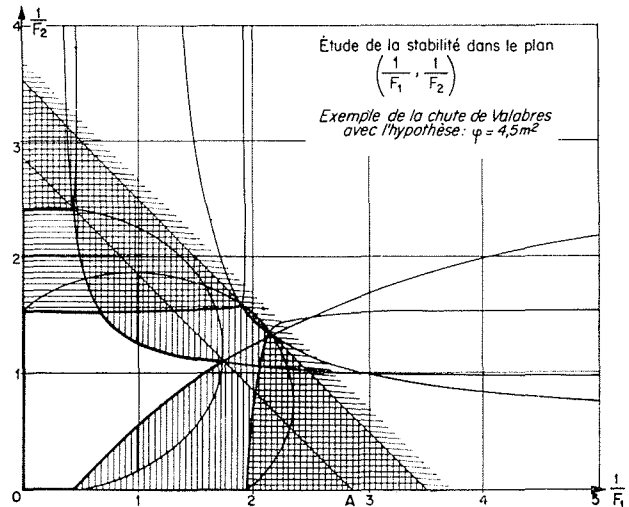


FIG. 8.

Il est bien évident que les solutions à retenir pour les applications pratiques correspondent aux valeurs les plus grandes des $1/F_i$ et sont distribuées sur l'arc d'hyperbole.

On peut faire la transformation faisant passer au plan des F_i : une hyperbole équilatère devient une droite et réciproquement. Les solutions possibles (valeurs minima des F_i) sont alors distribuées sur un segment de droite, transformé de l'arc d'hyperbole précédent. L'équation de la droite devient :

$$2 g Z_0^* (f_2 L_1 \pi'_{01} F_1 + f_1 L_2 \pi'_{02} F_2) = f_2 L_1 + f_1 L_2 \quad (18)$$

et celle de l'hyperbole équilatère :

$$2 g Z_0^* (\pi'_{01} + \pi'_{02}) F_1 F_2 = F_1 + F_2 \quad (19)$$

Il faut ici encore considérer les deux valeurs de λ .

On a tracé sur la figure 9 le cas de la valeur double pour $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

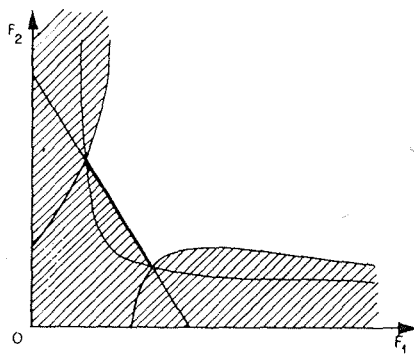


FIG. 9.

b) La stabilité est d'autant plus faible que φ est plus faible. Elle est maxima pour $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. La relation donnant les F_i minima devient alors :

$$\Sigma P_{0i} \varphi_i F_i / W_{0i}^2 f_i^2 = \Sigma \frac{L_i}{f_i} \left[2 g \Sigma \left(\frac{Z_{0i}}{\varphi_i} \right) \right]^{-1}$$

Si on pose :

$$\Sigma \varphi (\varphi_i, F_i, W_i, \dots) = \varphi (\varphi_i^*, F_i^*, W_i^*, \dots)$$

on retrouve la forme plane de la condition de Thoma :

$$F^* = W_0^{*2} L^* f^* / 2 g P_0^* Z_0^*$$

c) Comparativement au cas d'une seule cheminée, le couplage permet de réduire notablement les sections des cheminées, en remplaçant dans la section classique de Thoma le rapport L/Z_0 par :

$$[L_1 + (f_1/f_2) L_2] / [Z_{01} + (\varphi_1/\varphi_2) Z_{02}]$$

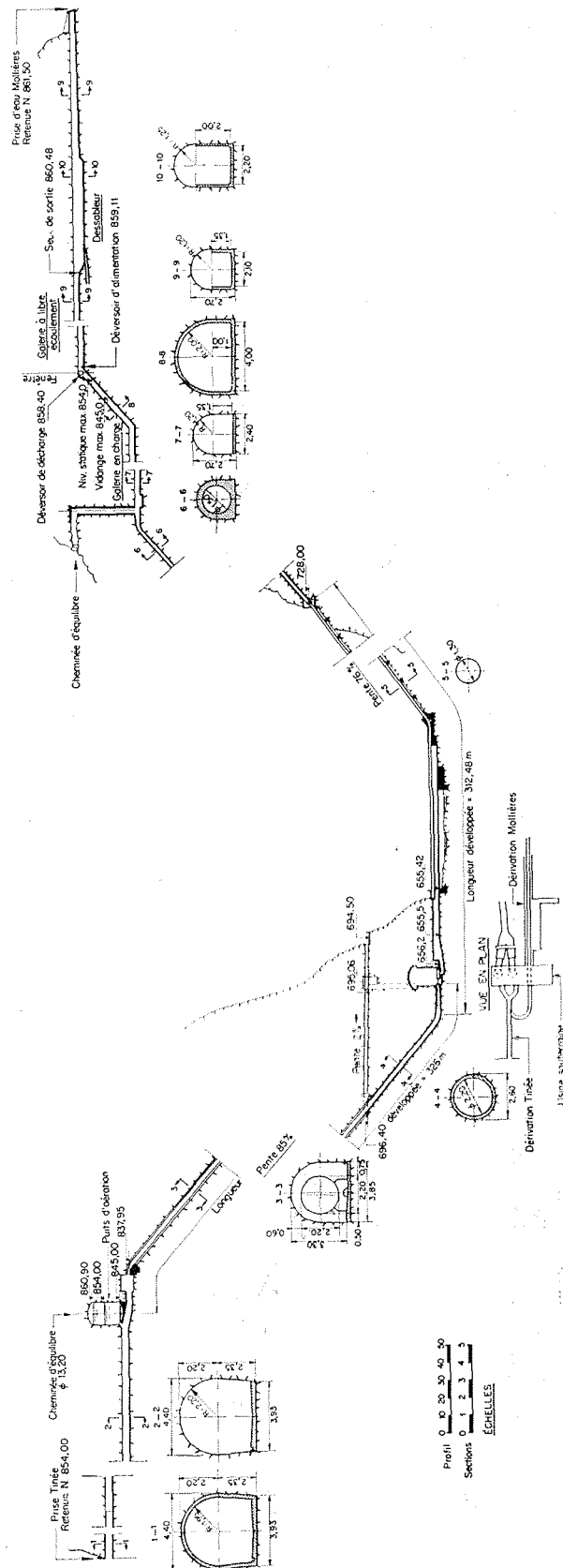


FIG. 10. — Chute de Valabres
Galerias d'aménée et conduites forcées

Mais le couplage permet aussi un amortissement notable comparativement au cas d'une cheminée, et c'est à ce double point de vue que les systèmes à double chambre d'équilibre justifient leur intérêt.

5. — Application à la chute de Valabres.

On a appliqué les résultats de l'étude théorique à l'examen de la chute de Valabres (E.D.F. - Alpes-3) dont la structure générale répond à notre schéma (cf. fig. 10).

Les valeurs numériques des divers paramètres sont les suivantes :

$$\begin{array}{l} Z_{01}=199 \\ Z_{02}=203 \\ P_{01}=5,30 \\ P_{02}=1,58 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1=\varphi=3,80 \\ \varphi_2=1,32 \\ f_1 W_{10}=16 \\ f_2 W_{20}=4 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} f_1=15 \\ f_2=4,52 \\ \pi'_{01}=4,7 \cdot 10^{-5} \\ \pi'_{02}=0 \text{ ou } 1,88 \cdot 10^{-4} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} L_1=6592 \\ L_2=1248 \end{array} \right.$$

On se trouve dans le cas où φ est égal à la plus grande des deux sections φ_1 et φ_2 . Dans le plan des F_i , on obtient une figure telle que la figure 9 (l'une des valeurs de λ est infinie).

Les équations de la droite et de l'hyperbole équilatère sont respectivement :

$$\begin{cases} 1,4 F_1 + 3,52 F_2 = 3,95 \\ 2,88 F_1 F_2 = F_1 + F_2 \end{cases}$$

On peut donc adopter pour les sections F_1 du côté Tinée et F_2 du côté Mollières :

$$F_1 = 1,74 \text{ m}^2 \quad F_2 = 0,43 \text{ m}^2$$

alors que les Ingénieurs de l'E.D.F. ont choisi :

$$F_1 = 136 \text{ m}^2 \quad F_2 = 6,10 \text{ m}^2$$

Cette différence, énorme pour F_1 , provient des deux faits corrélatifs suivants :

- il n'existe pas à l'heure actuelle, à notre connaissance, de méthode de calcul publiquement connue pour la détermination des cheminées d'un tel système couplé;
- et, par voie de conséquence, on préfère se prémunir d'une grande sécurité et prendre une grande chambre d'expansion de manière à éviter à tout prix une entrée d'air dans les conduites forcées, qui entraînerait les plus fâcheuses perturbations.

CONCLUSION

Bien que dépendant d'un grand nombre de paramètres, les systèmes à double chambre d'équilibre ne constituent cependant pas un problème dont la résolution dépasse les moyens de l'analyse mathématique. On a vu, par le présent travail, comment on peut étudier le problème de la stabilité inconditionnelle en se laissant guider par les principes fondamentaux de la topologie géométrique. Mais, le problème de la stabilité apparaît en définitive comme secondaire devant un autre problème d'un caractère

plus impératif qui est celui du contrôle de l'amplitude des oscillations prenant naissance après chaque manœuvre de vannage. Nous avons entrepris cette deuxième étude et les résultats partiels que nous avons obtenus montrent qu'effectivement la stabilité *conditionnelle* sans oscillations — ou avec des oscillations très amorties — exige des sections de chambres d'équilibre bien plus grandes que celles que l'on a l'habitude de déterminer pour satisfaire uniquement à la stabilité inconditionnelle.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) JAEGER (Ch.). — « Le système à double chambre d'équilibre ». *La Houille Blanche*, septembre 1957, n° 4, pp. 481-495.
- (2) BERGERON (L.). — « Machines hydrauliques ». *Dunod*, 1928, pp. 39 et suiv.
- (3) SIDERIADES (L.). — « Retour sur le calcul des cheminées d'équilibre. Validité des hypothèses émises ». *C. R. Acad. Sc.*, t. 245, pp. 1884-1887.
- (4) GARDEL (A.). — « Chambres d'équilibre ». Lausanne, 1956, pp. 84 et suiv.
- (5) LIAPOUNOFF (A.M.). — « Problème général de la stabilité du mouvement ». Princeton University Press, 1947. (*Annals of Mathematics Studies*, n° 17, reprinted from *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1907.)