Recherches sur les brise-lames flottants destinés à réfléchir la houle en eau peu profonde

Observations on floating breakwaters for reflection of shallow water waves

PAR A. K. JOHNSTON

NEWCASTLE UNIVERSITY COLLEGE, TIGHE'S HILL (N.S.W.) AUSTRALIE

La présente étude est née d'un problème d'érosion de plage. Etant donné que les houles cambrées érodent une plage alors que les houles peu cambrées l'engraissent, on envisagea, comme moyen de protection, la possibilité de réfléchir partiellement les ondes incidentes par des brise-lames flottants. Le but poursuivi était de réfléchir suffisamment d'énergie pour que les houles atteignant la côte soient constructives et non érosives.

Ce problème a été étudié théoriquement et expérimentalement en partant de l'hypothèse selon laquelle un brise-lames flottant doit, pour être efficace, réfléchir approximativement 50 % de l'énergie des ondes de toutes périodes jusqu'à 10 secondes. Les brise-lames flottants ne peuvent être amarrés rigidement, et, à l'origine, on a simplement utilisé leur inertie pour produire un effet réfléchissant. Des considérations d'ordre pratique concernant les dimensions des brise-lames conduisent à limiter la réflexion par inertie aux ondes ayant une période inférieure à 6 secondes environ.

Pour passer aux ondes plus longues, on utilisa ici le phénomène de résonance, en réalisant un brise-lames sous forme d'un réservoir d'eau ouvert, de dimensions telles que la résonance propre de l'eau qu'il renferme tende à réfléchir les ondes plus longues.

Deux types adéquats de brise-lames flottants utilisant cette conjugaison de l'inertie et de la résonance, ont été mis au point et essayés sur un modèle réduit à l'échelle 1/120. Les résultats obtenus apparaissent nouveaux par rapport à tous ceux obtenus jusqu'ici et font entrevoir la possibilité d'étendre leurs applications à d'autres fins que la protection des plages.

The present study arose from a problem of beach erosion. Since steep waves erode a beach and low camber waves build it up, the possibility of partial reflection of oncoming waves by floating barriers was considered as a means of protection. The objective was to reflect sufficient energy so that waves reaching the shore would be constructive rather than erosive.

This problem has been investigated theoretically and experimentally, starting with the premise that to be effective a floating barrier should reflect approximately 50 % of the energy of waves of all periods up to 10 seconds. Floating barriers cannot be rigidly restrained and their earlier use has depended simply on their inertia for reflective effect. Practical considerations of barrier size limit inertia reflection to waves of less than about 6 seconds period.

To deal with the longer waves the phenomenon of resonance has here been employed by making the floating barrier an openended water container of such dimensions that the enclosed water tends to reflect the longer waves by its internal resonance.

Two successful designs of floating breakwater using this combination of inertia and resonance have been developed and tested on a model scale of 1 to 120. Their performance is shown to be an advance on anything hitherto achieved and their possible wider applications for purposes besides beach protection are indicated.

INTRODUCTION

L'idée d'un brise-lames flottant n'est pas nouvelle; son application la plus heureuse est probablement le brise-lames « Bombardon » qui a servi à constituer des ports provisoires pendant la seconde guerre mondiale [1]. Dans le présent mémoire, nous allons développer certaines idées sur la question et exposer une série d'expériences permettant de prévoir d'autres applications de ces engins flottants.

Notre étude de la question a été motivée par un problème d'érosion de plage. Nous avons été conduits à examiner l'utilité de l'emploi de brise-lames pour réfléchir la houle en eau peu profonde. L'influence de la houle sur une plage de sable est extrêmement compliquée et non encore analysée à fond; un point important, qui semble cependant bien établi d'après les observations, est que la cambrure de la vague (c'est-à-dire le rapport de son amplitude à sa longueur d'onde) est d'une importance capitale pour la plage. Les vagues très cambrées érodent la plage et créent un « profil de tempête » [2], tandis que les vagues de faible cambrure contribuent à l'engraisser et donnent un profil « de beau temps ». Plus exactement, si le rapport dépasse 0,03, la plage est érodée; s'il est inférieur à 0,02, elle est au contraire engraisée par les vagues. Autrement dit, pour protéger les plages non seulement il est inutile d'éliminer l'action des vagues, mais cela peut même être nuisible. Tout ce qu'il faut pour les protéger, c'est de pouvoir réfléchir ou dissiper une fraction suffisante de l'énergie des vagues cambrées, de façon à réduire cette cambrure au-dessous de la valeur critique; elles contribuent alors utilement à construire ou à maintenir la plage, au lieu de la détruire. A ce point de vue, les brise-lames flottants nous ont donc semblé une solution intéressante, et nous les avons étudiés.

Deux nouvelles formes de brise-lames flottants ont été étudiées et semblent répondre au but principal poursuivi; elles pourraient d'ailleurs recevoir aussi d'autres applications. Les facteurs qui interviennent dans le tracé et le profil de ces brise-lames et les essais sur modèle que nous avons effectués seront décrits ci-après.

Considérations théoriques sur les brise-lames flottants.

Tandis que les brise-lames fixes assurent leur action protectrice par réflexion, d'une part, et par dissipation de l'énergie des lames, d'autre part, les brise-lames flottants, par contre, agissent presque uniquement par réflexion. Le « Bombardon » a été calculé pour des vagues

INTRODUCTION

The concept of a floating breakwater is not a new one, probably the most remarkable application of the idea being the 'Bombardon' breakwater used for providing temporary harbours in World War II [1]. The present paper reports some thoughts and experiments which indicate further possibilities for floating breakwaters.

The investigation began in relation to a beach erosion problem, which led ultimately to a general study of the usefulness of floating breakwaters for reflecting shallow water waves. The action of waves on a sand beach is extremely complicated and as yet imperfectly analysed, but one of the significant points emerging from observations made is that the 'steepness' of the waves (the ratio of the wave height to its length) has a critical effect on the beach. Waves with a high steepness ratio erode a beach and produce a 'storm profile' [2], whereas waves of low steepness ratio build up a beach and produce a 'swe' or 'summer profile'. In precise terms if the steepness ratio is greater than 0.03 the beach is eroded, but if it is less than 0.02 it is built up by the waves. This means that as far as beaches are concerned it is not only unnecessary to eliminate all wave action but undesirable. All that is needed to protect a beach is to reflect or disperse sufficient of the energy of the steep waves so that their steepness is reduced below the critical value, and they then become useful contributors to the beach's well-being instead of destructive marauders. For this purpose floating breakwaters appeared interesting and were accordingly investigated.

Two new designs of floating breakwater were evolved which appear very promising for the original purpose, and may well have applications in other directions. The factors entering into the design of these breakwaters and the model experiments carried out will be described in the succeeding sections.

Theoretical consideration of floating breakwaters.

Whilst fixed breakwaters provide their protection partly by reflection and partly by dissipation of wave energy, floating breakwaters must rely almost entirely on reflection for their effectiveness. The 'Bombardon' was designed (and successfully) to deal with waves of periods of

ayant une période de l'ordre de 5,5 secondes et a pleinement réussi. C'était un ensemble flottant de 25 pieds (7,5 m) de profondeur totale, de section en forme de croix de Malte; son action réfléchissante sur les vagues résultait de son inertie et de l'inertie de l'eau qu'il emprisonnait.

Par un raisonnement dimensionnel simple, on reconnaît bien vite que, pour arrêter des lames plus longues, un brise-lames tel que le « Bombardon » devrait avoir des dimensions prohibitives. Ainsi pour réfléchir avec la même efficacité des vagues d'une période de 10 secondes, on devrait lui donner une profondeur totale d'environ 80 pieds (24 m) tout à fait irréalisable.

Or, il existe un autre moyen de réfléchir les vagues : c'est d'utiliser le phénomène de résonance. L'effet réfléchissant d'ouvrages résonants fixés a été étudié par Valembois [3] qui a montré qu'on arrive de cette façon à obtenir des effets de réflexion considérables, dans certains cas pratiques. Ceci a conduit l'auteur du présent mémoire à examiner la possibilité de réaliser la réflexion par résonance dans un brise-lames flottant, laissant à l'inertie le soin de réfléchir la houle de courte période et « accordant » la résonance de manière à agir sur la houle de période plus longue; on aurait ainsi un brise-lames flottant de dimensions raisonnables, ayant une action sur une gamme de houles bien plus vaste que ceux qui ont été construits jusqu'ici. Nous allons maintenant énumérer succinctement les principes servant de base au procédé.

Réflexion par inertie.

La théorie de la réflexion des ondes en eau profonde par l'inertie que présente un corps flottant a été établie très habilement par Lochner, Faber et Penney [1]. Dans le cas qui nous occupe, — des brise-lames très voisins de la côte, — nous aurons affaire à la réflexion de la houle en eau peu profonde, ce qui conduit à une analyse un peu différente.

Désignons par :

L = la longueur de l'onde de crête à crête.

T = sa période en secondes.

c = la célérité de la vague, c'est-à-dire la vitesse de propagation du profil de la houle.

h = la profondeur de l'eau au repos.

$2a$ = la différence de hauteur entre la crête et le creux.

$\gamma = 2a/L$ = la cambrure de la houle.

m = la masse par unité de largeur d'un élément réflecteur constituant l'obstacle.

w = le poids spécifique du liquide.

about 5.5 seconds. It was a floating structure of 25 feet overall depth having a section like a Maltese Cross, and its reflective effect on the waves resulted from the inertia of the structure and its enclosed water. Dimensional reasoning soon shows that if longer waves are to be dealt with, then breakwaters of the 'Bombardon' design would need to be of forbidding size. To reflect waves of 10 seconds period, for instance, with the same degree of effectiveness, the overall depth of the structure would be about 80 feet, which is impracticable.

However there is another way of reflecting waves—by using the phenomenon of resonance. The reflective effect of fixed resonant structures has been discussed by Valembois [3] who shows that a considerable degree of reflection is thus obtainable in practical cases. This led the author to consider the possibility of incorporating resonant reflection into a floating breakwater, using the inertia to deal with the shorter waves and 'tuning' the resonance to reflect the longer waves, so providing a floating breakwater of practical size having a greater spread of action than those used heretofore. Brief mention will now be made of the basic principles involved.

Reflection by inertia.

The theory of reflection of deep water waves by the inertia of a floating body has been very ably set forth by Lochner, Faber and Penney [1]. In the present case, where breakwaters fairly close to shore are envisaged, we are more concerned with reflection of shallow water waves and a somewhat different analysis may be made as follows :

L = wave length from crest to crest.

T = wave period in seconds.

c = wave celerity, or speed of advance of wave form.

h = still water depth.

$2a$ = difference in elevation between trough and crest of wave.

$\gamma = 2a/L$ = wave steepness or camber.

m = mass of a reflecting barrier per unit width.

w = specific weight of fluid.

Nous allons faire les hypothèses suivantes :

- (a) La houle considérée est une houle à deux dimensions, en eau peu profonde et d'amplitude relativement faible. Les accélérations verticales des particules de l'eau seront donc faibles et l'on pourra admettre, dans un plan vertical quelconque, une répartition purement hydrostatique des pressions. Il s'ensuit, de plus, que toutes les particules effectueront les mêmes déplacements horizontaux, selon des trajectoires planes elliptiques ayant sensiblement les mêmes grands axes à toutes les profondeurs.
- (b) Le profil de surface de la houle est partout sinusoïdal.
- (c) L'obstacle opposé aux vagues occupe effectivement toute la profondeur de l'eau. Nous reviendrons sur ce point plus en détail.

L'obstacle (fig. 1) agit comme réflecteur partiel par sa face amont et comme générateur de houle par sa face aval, du fait de son mouvement provoqué par la houle incidente. Si sa masse était nulle, il accomplirait le même mouvement que les particules d'eau de la houle et la houle engendrée en aval serait égale à la houle incidente, la réflexion étant nulle. Si, au contraire, la masse de l'obstacle était infinie, son mouvement serait nul à cause de son inertie, la réflexion serait complète et il n'y aurait pas de houle à l'aval.

La réalité est entre ces deux extrêmes, la masse de l'obstacle jouant un rôle capital. Son mouvement sera évidemment un harmonique, de même fréquence que celui de la houle. La force engendrant le mouvement à tout instant résulte de la différence entre les pressions agissant de part et d'autre de l'obstacle; puisque nous avons supposé une distribution hydrostatique des vitesses, cette force ne dépend que de la différence entre les niveaux de l'eau de part et d'autre de l'obstacle. Prenons l'origine des coordonnées au centre du mouvement de l'obstacle et posons $t=0$ quand $x=0$.

Les surélévations des niveaux dues aux trois ondes en question (se déplaçant dans le sens des x négatifs) sont :

onde incidente :

$$y_1 = a_1 \sin \left(\omega t + \frac{2\pi x}{L} + \alpha \right)$$

onde réfléchie :

$$y_2 = a_2 \sin \left(\omega t - \frac{2\pi x}{L} + \beta \right)$$

The following assumptions are made :

- (a) The waves are shallow-water two-dimensional waves of relatively small amplitude. Hence vertical accelerations of water particles are small and pressure distributions in any vertical plane may be taken as simply hydrostatic. A further implication is that horizontal movements are the same for all particles, that is, all particles move in flat elliptical paths having approximately the same major axes at all depths.
- (b) The surface profiles of the waves are sinusoidal.
- (c) The barrier effectively occupies the whole depth of water. This point will be discussed later in more detail.

The barrier (see Fig. 1) acts as a partial reflector on the upstream side and as a wave generator

on the down stream side because of its motion produced by the incident waves. If its mass were zero its motion would be the same as that of the wave water particles and the downstream-generated wave would equal the incident wave, reflection being zero. If, at the other extreme, the mass of the barrier were infinite, its motion would be zero because of its inertia, reflection would be complete and there would be no wave generated downstream.

The real case lies between these two limits, the mass of the barrier playing a vital role. The motion of the barrier will obviously be harmonic, with frequency the same as that of the waves. The force causing motion at any instant results from the difference in pressure on the two sides of the barrier, and since hydrostatic pressure distribution has been assumed, this is simply related to the difference in water surface elevation on the two sides. Let the origin of coordinates be taken at the centre of the barrier's motion and let $t=0$ when $x=0$.

The surface elevations of the three waves concerned (travelling in the negative x direction) are :

for the incident wave :

$$y_1 = a_1 \sin \left(\omega t + \frac{2\pi x}{L} + \alpha \right)$$

onde engendrée en aval :

$$y_3 = a_3 \sin \left(\omega t + \frac{2\pi x}{L} + \gamma \right)$$

La grandeur x mesure le déplacement de l'obstacle en partant de sa position moyenne, et reste toujours faible par rapport à la longueur d'onde L . Les termes $2\pi x/L$ sont donc à négliger et l'on aura respectivement pour les trois niveaux les surélévations :

$$a_1 \sin(\omega t + \alpha), \quad a_2 \sin(\omega t + \beta), \quad a_3 \sin(\omega t + \gamma)$$

Rapportée à l'unité de largeur de l'onde et de l'obstacle, l'équation du mouvement peut s'écrire :

$$mx'' = wh(y_1 + y_2 - y_3)$$

ou :

$$(m/wh) x'' = a_1 \sin(\omega t + \alpha) + a_2 \sin(\omega t + \beta) - a_3 \sin(\omega t + \gamma) \quad (1)$$

Etant donné la nature du mouvement de l'obstacle, l'accélération sera nulle au point moyen, c'est-à-dire que l'on aura $x''=0$ pour $x=0$ et $t=0$. De même, puisque l'onde d'aval est engendrée par l'obstacle, son sommet coïncidera avec le centre du mouvement de l'obstacle.

Il vient donc :

$$\sin(\omega t + \gamma) = 1 \text{ à l'instant } t=0$$

en sorte que $\gamma = \pi/2$.

En substituant dans l'équation (1), on obtient :

$$0 = a_1 \sin \alpha + a_2 \sin \beta - a_3 \quad (2)$$

Si maintenant on examine le mécanisme de la production de l'onde aval à l'instant où il y a inversion du mouvement de l'obstacle, c'est-à-dire pour $t = \pi/2\omega$, il devient clair qu'en ce point on aura $y_3=0$. De plus, les forces appliquées ayant été supposées harmoniques simples, il est logique de supposer que le mouvement de l'obstacle est harmonique simple lui aussi — et que, par conséquent, l'accélération du point d'inversion est $\omega^2 A$, où A représente le mouvement total de l'obstacle.

On en déduit :

$$\frac{m\omega^2 A}{wh} = a_1 \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) + a_2 \sin \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right)$$

ou :

$$\frac{m\omega^2 A}{wh} = a_1 \cos \alpha + a_2 \cos \beta \quad (3)$$

La valeur de A sera égale à la moitié du déplacement horizontal des particules d'eau de l'onde engendrée par l'obstacle. En la désignant

for the reflected wave :

$$y_2 = a_2 \sin \left(\omega t - \frac{2\pi x}{L} + \beta \right)$$

for the downstream-generated wave :

$$y_3 = a_3 \sin \left(\omega t + \frac{2\pi x}{L} + \gamma \right)$$

The quantity x is to refer to the displacement of the barrier from its mean position and this is always small compared to the wave length L . The terms $2\pi x/L$ are therefore neglected and the surface elevations become respectively :

$$a_1 \sin(\omega t + \alpha), \quad a_2 \sin(\omega t + \beta), \quad a_3 \sin(\omega t + \gamma)$$

Referring now to unit width of wave and barrier, the equation of motion may be written :

$$mx'' = wh(y_1 + y_2 - y_3)$$

or :

$$(m/wh) x'' = a_1 \sin(\omega t + \alpha) + a_2 \sin(\omega t + \beta) - a_3 \sin(\omega t + \gamma) \quad (1)$$

From the nature of the barrier motion, the acceleration will be zero at the mid-point i.e. $x''=0$ when $x=0$ and $t=0$. Also since the downstream wave is being generated by the barrier, the peak of its elevation is at the centre of the barrier motion :

i.e.

$$\sin(\omega t + \gamma) = 1 \text{ at } t=0$$

so that $\gamma = \pi/2$

Substituting these conditions in (1) gives :

$$0 = a_1 \sin \alpha + a_2 \sin \beta - a_3 \quad (2)$$

Again considering the mechanism of generation of the downstream wave at the point of reversal of the barrier motion i.e. when $t = \pi/2\omega$ it is clear that at this point $y_3=0$. Furthermore, since the applied forces have been assumed to be simple harmonic, it is reasonable to assume that the motion of the barrier is simple harmonic, and therefore, the acceleration at the point of reversal is $\omega^2 A$ where A = half the total horizontal movement of the barrier. Whence :

$$\frac{m\omega^2 A}{wh} = a_1 \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) + a_2 \sin \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right)$$

or :

$$\frac{m\omega^2 A}{wh} = a_1 \cos \alpha + a_2 \cos \beta \quad (3)$$

The quantity A will be the same as half the horizontal movement of the water particles in the wave which the barrier is generating. This will be called b_3 and thus $A = b_3$. From the

par b_3 , on aura $A=b_3$. La géométrie de l'ellipse décrite par les particules de l'eau suggère :

$$x_3 = b_3 \cos(\omega t + \gamma)$$

de même :

$$x_1 = b_1 \cos(\omega t + \alpha)$$

$$x_2 = b_2 \cos(\omega t + \beta)$$

D'autre part, la relation bien connue caractérisant la houle en eau peu profonde nous donne :

$$b_1 = a_1 \coth \frac{2\pi h}{L} \doteq \frac{a_1 L}{2\pi h}$$

$$b_2 = a_2 \coth \frac{2\pi h}{L} \doteq \frac{a_2 L}{2\pi h}$$

$$b_3 = a_3 \coth \frac{2\pi h}{L} \doteq \frac{a_3 L}{2\pi h}$$

Comme les composantes horizontales du mouvement des particules de l'eau résultant de la somme des ondes incidentes et réfléchies doivent coïncider avec le mouvement de l'obstacle lequel, à son tour, coïncide avec les composantes horizontales de l'onde transmise, ou onde aval, on devra avoir :

$$\begin{aligned} \frac{a_3 L}{2\pi h} \cos(\omega t + \gamma) &= \frac{a_1 L}{2\pi h} \cos(\omega t + \alpha) \\ &\quad - \frac{a_2 L}{2\pi h} \cos(\omega t + \beta) \end{aligned}$$

A l'instant $t=0$, cette relation devient :

$$0 = a_1 \cos \alpha - a_2 \cos \beta \quad (4)$$

Entre a_1 , a_2 et a_3 , il existe encore une relation, déduite de l'équation de conservation de l'énergie :

$$a_1^2 = a_2^2 + a_3^2 \quad (5)$$

En combinant les équations (2), (3), (4) et (5), on peut arriver à une expression pour le « coefficient de transmission » a_3/a_1 , à savoir :

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + [m\omega^2 L / (4\pi h^2 w)]^2}} \quad (6)$$

et :

$$\sin \alpha = \frac{a_3}{a_1} \quad (7)$$

De même, le coefficient de réflexion a_2/a_1 est donné par :

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + [(4\pi h^2 w) / (m\omega^2 L)]^2}} \quad (8)$$

geometry of the ellipse which the water particles describe

$$x_3 = b_3 \cos(\omega t + \gamma)$$

similarly :

$$x_1 = b_1 \cos(\omega t + \alpha)$$

$$x_2 = b_2 \cos(\omega t + \beta)$$

Also from the known relationships for shallow water waves :

$$b_1 = a_1 \coth \frac{2\pi h}{L} \doteq \frac{a_1 L}{2\pi h}$$

$$b_2 = a_2 \coth \frac{2\pi h}{L} \doteq \frac{a_2 L}{2\pi h}$$

$$b_3 = a_3 \coth \frac{2\pi h}{L} \doteq \frac{a_3 L}{2\pi h}$$

Now the horizontal components of the movement of water particles resulting from the sum of the incident and reflected waves must coincide with the movement of the barrier, which in turn coincides with the horizontal components of the transmitted or downstream-generated wave.

Therefore :

$$\begin{aligned} \frac{a_3 L}{2\pi h} \cos(\omega t + \gamma) &= \frac{a_1 L}{2\pi h} \cos(\omega t + \alpha) \\ &\quad - \frac{a_2 L}{2\pi h} \cos(\omega t + \beta) \end{aligned}$$

At time $t=0$ this becomes :

$$0 = a_1 \cos \alpha - a_2 \cos \beta \quad (4)$$

A further relationship exists between a_1 , a_2 and a_3 . This results from the energy equation, from which :

$$a_1^2 = a_2^2 + a_3^2 \quad (5)$$

By manipulation of equations (2), (3), (4) and (5), it is now possible to obtain an expression for the "transmission coefficient" a_3/a_1 :

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + [m\omega^2 L / (4\pi h^2 w)]^2}} \quad (6)$$

Also :

$$\sin \alpha = \frac{a_3}{a_1} \quad (7)$$

Similarly the 'reflection coefficient' a_2/a_1 is given by :

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + [(4\pi h^2 w) / (m\omega^2 L)]^2}} \quad (8)$$

ω et L étant liés entre eux par l'expression bien connue de la vitesse de la vague :

$$c = \omega L / 2\pi \text{ et } c = \sqrt{gh} \text{ pour } \omega^2 = \frac{4\pi^2 gh}{L^2}$$

On substituera celle-ci dans (6) et (8) et on aura :

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + [(\pi mg)/(wLh)]^2}} \quad (9)$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + [(wLh)/(\pi mg)]^2}} \quad (10)$$

Le paramètre mg/wLh représente simplement le rapport de la masse de l'obstacle à la masse d'eau contenue dans une longueur d'onde de la houle incidente. Nous avons représenté l'équation (9) sur la figure 2; la forme de la courbe concorde avec celle donnée par Carr [4].

Le problème étant très complexe, on n'a pas trouvé de solution pour le cas où l'obstacle ne porte que sur une partie seulement de la profondeur de l'eau; on pourrait seulement s'attendre à ce que, si un obstacle obstrue la majeure partie de la profondeur, les équations (6) à (10) constituent un élément de comparaison satisfaisant, surtout avec des ondes courtes, c'est-à-dire de faible période.

Effets des amarrages.

Jusqu'ici nous avons considéré l'obstacle flottant comme entièrement soustrait aux liaisons. Mais en réalité il est limité dans ses mouvements par les ancres, les bouées et les chaînes constituant son amarrage. Dans une première approximation, on peut considérer ces attaches comme autant de ressorts dont la force de rappel serait à peu près proportionnelle au déplacement subi par l'obstacle à partir de la position moyenne. Si, pour des raisons de simplicité, on néglige tout d'abord les effets d'amortissement provoqués par l'eau, le mouvement de l'obstacle est l'analogue d'une oscillation forcée ordinaire sous l'action de la force des vagues appliquée périodiquement. Si la raideur des amarres se trouve à une certaine valeur critique, on pourra avoir un état de résonance violente dans l'oscillation. Mais un simple calcul nous enseigne qu'il serait à peine possible de réaliser des amarres ayant cette raideur [4]. Il serait donc utile et économique en même temps de donner aux amarres une raideur inférieure au tiers de la valeur critique; on pourrait alors négliger ces moyens

Since ω and L are related by the well known wave velocity equation :

$$c = \omega L / 2\pi \text{ and } c = \sqrt{gh} \text{ then } \omega^2 = \frac{4\pi^2 gh}{L^2}$$

Substituting this into expressions (6) and (8) gives :

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + [(\pi mg)/(wLh)]^2}} \quad (9)$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + [(wLh)/(\pi mg)]^2}} \quad (10)$$

The physical meaning of the parameter mg/wLh is simply the ratio of the mass of the barrier to the mass of water in one wave length of the impinging waves. Equation 9 is plotted in Figure 2. It agrees with that given by Carr [4].

FIG. 2

Because of the complexity of the problem, no solution has been found for the condition where the barrier extends through only part of the water depth, but it may be expected that if the barrier extends over most of the water depth equations (6) to (10) provide a reasonably good standard of comparison, particularly when the wave length (that is the period) is short.

The effects of the moorings.

So far in the analysis the floating barrier has been treated as completely unrestrained. In fact, it will be restrained within reasonable limits by mooring anchors, buoys and chains. For the purpose of approximate analysis these may be considered as springs whose restoring force is roughly proportional to the displacement of the barrier from the mean position. If, for simplicity, the effects of damping by the water are neglected initially the motion of the barrier corresponds to an ordinary forced vibration under the periodic applied force of the waves. The possibility of violent resonant oscillation of the barrier if the mooring stiffness happens to be the critical value must then be considered. Sim-

de fixation, en ce qui concerne leurs effets dynamiques. De toute façon, étant donné l'amortissement provoqué par l'eau, une amplification résonante exagérée du mouvement horizontal serait peu probable.

Réflexion par résonance.

Nous avons déjà dit que la houle naturelle n'est pas constituée de trains réguliers, mais possède un spectre complet de fréquences. Elle est cependant capable de susciter une résonance dans un ouvrage ayant une période propre adéquate [3]. Dans ces conditions, un résonateur pourra réfléchir des vagues sur une gamme de périodes suffisamment étendue pour intéresser vivement l'ingénieur hydraulicien. L'analyse de ce phénomène, que nous donnons ci-après, est quelque peu l'analogue de celle qui a été faite par Valembois [3].

Considérons une houle à deux dimensions en eau peu profonde, se déplaçant le long d'une ouverture servant à évacuer de l'eau ou à en emmagasiner (ce dernier cas est le résonateur). On obtiendra le cas général du mouvement des particules en superposant les mouvements des deux ondes, l'une vers la droite (onde incidente), l'autre vers la gauche (onde réfléchie). Supposons que les vitesses des particules d'eau de ces deux ondes soient $F[t - (x/c)]$ et $f[t + (x/c)]$, x indiquant à chaque instant leur position. En vertu de relations bien connues, la vitesse résultante de la particule d'eau (u) et la hauteur de la surface d'eau (e) seront données par :

$$u = F\left(t - \frac{x}{c}\right) - f\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

$$e \frac{g}{c} = F\left(t - \frac{x}{c}\right) - f\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

Posons pour simplifier :

$$F_A = F\left(t - \frac{XA}{C}\right)$$

$$f_A = f\left(t + \frac{XA}{C}\right)$$

l'indice A désignant le plan A. C'est là un plan de discontinuité dans le mouvement de l'onde causée par l'influence du résonateur. Admettons que F_A se rapporte à la valeur de la fonction immédiatement à gauche du plan A et $F_{A'}$ à sa valeur immédiatement à droite, etc., et soit v la vitesse de la particule d'eau correspondant, pour la profondeur considérée, à la vitesse d'écoulement de l'eau entrant ou sortant du résonateur.

ple calculations show, however, that it would hardly be possible to provide moorings of such stiffness [4]. Thus it is desirable as well as economical, to provide moorings with stiffness of, say, less than one third of the critical value so that as far as dynamical effects are concerned the moorings can be neglected. In any event, the damping of the water would make any resonant magnification of the horizontal motion of the barrier unlikely.

Reflection by resonance.

It has already been pointed out that waves in nature do not occur as uniform trains, but rather as a whole spectrum of wave frequencies. Nevertheless, naturally occurring waves are capable of exciting resonance in structures of suitable natural periods [3]. Under such conditions, a resonator may reflect waves of a sufficiently wide range of periods to be extremely interesting to the hydraulic engineer. The analysis of this phenomenon given below is in part parallel to that given by Valembois [3]. Let shallow water two-dimensional waves be considered moving past an opening which may be used to withdraw water or supply water (in this case the resonator). The general case of the motion of the water particles may be obtained by superimposing the motions of the two waves, one moving to the right (the incident wave) and one moving to the left (the reflected wave). Let the water particle velocities for these two waves be given by $F[t - (x/c)]$ and $f[t + (x/c)]$ respectively, x referring to the position. Then, quoting well-known relationships, the net water particle velocity (u) and the water surface elevation (e) are given by :

$$u = F\left(t - \frac{x}{c}\right) - f\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

$$e \frac{g}{c} = F\left(t - \frac{x}{c}\right) - f\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

For simplicity let :

$$F_A = F\left(t - \frac{XA}{C}\right)$$

$$f_A = f\left(t + \frac{XA}{C}\right)$$

the suffix A referring to the plane A. The plane A is one of discontinuity of the wave motion because of the action of the resonator. Let F_A refer to the function just to the left of plane A and $F_{A'}$ refer to the function just to the right of A, and so on. Let v be the water particle velocity corresponding in the given depth to the rate at which water is flowing in or out of the resonator.

On aura dans ces conditions :

$$\begin{aligned} F_A - f_A &= F_{A'} + v \\ F_A + f_A &= g e_A / c = F_{A'} \end{aligned}$$

parce que :

$$u_A = u_{A'} + v \text{ et } e_A = e_{A'}$$

On a aussi $f_{A'} = 0$, puisqu'il n'y a pas de vague réfléchie à droite du plan A.

Si maintenant nous supposons que la vitesse est liée à la surélévation du niveau par l'équation :

$$e_A / v = Z$$

Z étant « l'impédance » du canal formé par le résonateur, on déduit des deux équations ci-dessus :

$$F_A / F_{A'} = [1 + (2 g Z / c)] / (2 g Z / c) \quad (11)$$

$$F_A / f_A = 1 + (2 g Z / c) \quad (12)$$

et l'on voit que si Z est faible, c'est-à-dire si une légère variation de e correspond à une forte variation de la vitesse v , on pourra écrire $F_A / f_A \approx 1$; la réflexion est à peu près totale et un nœud se présente dans la variation du niveau de l'eau dans le plan A. Il nous reste à montrer que la fonction Z , relative au résonateur, fournit le résultat cherché.

Représentons-nous le résonateur sous l'aspect d'un tube vertical (fig. 3) et supposons que le niveau de l'eau à l'extérieur varie selon une loi sinusoïdale, c'est-à-dire que $e = a \sin \omega t$. Admettons également que l est grand comparativement à y . L'équation du mouvement de l'eau à l'intérieur du résonateur s'écrira alors :

$$(l/g) y'' + C y' + y = a \sin \omega t \quad (13)$$

C étant un coefficient de résistance de frottement, opposée au fluide en mouvement à l'intérieur du résonateur.

On pourra la résoudre par rapport à y' (qui est le v ci-dessus) et on trouvera :

$$y' = \omega / \sqrt{[1 - (\omega^2 l / g)]^2 + C^2 \omega^2} a \cos(\omega t - \alpha) \quad (14)$$

où :

$$\tan \alpha = C \omega / 1 - (\omega^2 l / g) \quad (15)$$

Si l est tel que $g/l = \omega^2$ (donc s'il y a résonance), l'équation devient :

$$y' = (a \sin \omega t) / C = e / C$$

c'est-à-dire que C est l'analogie de l'impédance Z , du moment que y' correspond à v . Dans un résonateur ayant les dimensions admises, C

Then :

$$\begin{aligned} F_A - f_A &= F_{A'} + v \\ F_A + f_A &= g e_A / c = F_{A'} \end{aligned}$$

because :

$$u_A = u_{A'} + v \text{ et } e_A = e_{A'}$$

Also $f_{A'} = 0$ since there is no reflected wave to the right of plane A.

If now the velocity v is taken as being related to the water surface elevation by the equation :

$$e_A / v = Z$$

where the function Z is the 'impedance' of the resonator channel, then from the above equations :

$$F_A / F_{A'} = [1 + (2 g Z / c)] / (2 g Z / c) \quad (11)$$

$$F_A / f_A = 1 + (2 g Z / c) \quad (12)$$

This indicates that if Z is small, that is if a small variation in e corresponds to a large variation of velocity v , then $F_A / f_A \approx 1$ and the reflection is almost complete, with a node of water level variation at section A. It remains to show now that the function Z for the resonator gives the required result.

Consider the resonator as a vertical tube,

Figure 3, and suppose that the outside water level varies sinusoidally, i.e. let $e = a \sin \omega t$. Also let l be large compared to y . The equation of motion of water within the resonator is then taken as :

$$(l/g) y'' + C y' + y = a \sin \omega t \quad (13)$$

where C is a coefficient representing frictional resistance to fluid motion in the resonator.

This can be solved for y' (which corresponds to v above,) thus :

$$y' = \omega / \sqrt{[1 - (\omega^2 l / g)]^2 + C^2 \omega^2} a \cos(\omega t - \alpha) \quad (14)$$

where :

$$\tan \alpha = C \omega / 1 - (\omega^2 l / g) \quad (15)$$

If, now, l has such a value that $g/l = \omega^2$ (i.e. if there is resonance), the equation becomes :

$$y' = (a \sin \omega t) / C = e / C$$

That is, C is the same as the impedance Z since y' corresponds to v . In a resonator of the size contemplated C (i.e. Z) is small compared to the other terms in the equation. Therefore :

(c'est-à-dire Z) est petit relativement aux autres termes de l'équation. On peut donc dire que :

$$F_A/f_A = 1 + (2gZ/c) \doteq 1$$

ce qui signifierait qu'il y a une forte réflexion.

Il ne faudrait pas oublier cependant les hypothèses que nous avons faites dans l'analyse ci-dessus, ni les conséquences qu'elles entraînent. Nous avons supposé que l'onde incidente est sinusoïdale, que y est petit relativement à l , que la résistance de frottement est directement proportionnelle à la vitesse et que le résonateur est vertical. Il n'y a pas grande erreur à supposer une onde incidente sinusoïdale, mais si l'on admet que y peut être de même ordre que l et que la résistance visqueuse est plutôt proportionnelle au carré de la vitesse, on arrivera pour le mouvement à l'équation plus précise :

$$[(l+y)/g] y'' + C y' + y = a \sin \omega t \quad (16)$$

qui semble insoluble par les moyens de l'analyse. Il faudra donc partir des équations (13), (14) et (15) dans nos recherches expérimentales. De toute façon, le coefficient C doit être supposé relativement faible et ses effets peu importants. De même, sauf au voisinage de la résonance, y ne sera pas grand en comparaison de l ; par l'équation (14), on pourra donc trouver la valeur de l au voisinage de laquelle il pourrait y avoir résonance, c'est-à-dire :

$$l = g/\omega^2 \text{ ou } T = 2\pi \sqrt{l/g}$$

Il restera à déterminer expérimentalement l'étalement de cette résonance, c'est-à-dire la bande de résonance utile. Cependant l'équation (13) nous fournit quelques indications sur le genre d'étalement que nous rencontrerions. Si l'on résout par rapport à y et si l'on porte $y_{\max}/a$ en fonction de ω/ω_n (avec $\omega_n = \sqrt{g/l}$), on obtient le diagramme classique de la résonance (fig. 4).

Il permet de voir qu'un mouvement présentant une résonance utilisable et donnant à la vague un certain degré de réflexion peut être obtenu pour des valeurs de ω comprises entre environ $0,8 \omega_n$ et $1,1 \omega_n$.

Enfin, il doit être bien entendu que l'analyse précédente s'applique à un résonateur vertical. Toutefois, par un raisonnement analogue, on reconnaît qu'un canal horizontal de longueur $L/4$ présentera la même résonance et exercera donc une action réfléchissante semblable à celle du résonateur vertical.

$$F_A/f_A = 1 + (2gZ/c) \doteq 1$$

indicating a large degree of reflection.

The assumptions made in the above analysis, and their implications, should not be passed over. It was assumed that the incident wave is sinusoidal, that y is small compared to l , that the frictional resistance is directly proportional to velocity and that the resonator is vertical. The incident wave may be taken as sinusoidal without serious error. However, if it is considered that y may be of the same order as l and that viscous resistance is more nearly proportional to the square of the velocity, a more accurate equation of motion would be :

$$[(l+y)/g] y'' + C y' + y = a \sin \omega t \quad (16)$$

This appears to be insoluble analytically and reliance must therefore be placed on equations (13) (14) and (15) to provide guidance for experimental work. In any event, the coefficient C is expected to be relatively small, so that its effect is not serious. Also, except near resonance, y will not be large compared to l so that equation (14) will probably indicate the value of l near which resonance may be expected, i.e. :

$$l = g/\omega^2 \text{ or } T = 2\pi \sqrt{l/g}$$

This leaves the 'spread' or band of useful resonance to be determined experimentally. Equation (13) however, gives some indication of what 'spread' may be expected. If solved for y and the ratio $y_{\max}/a$ plotted against ω/ω_n (where $\omega_n = \sqrt{g/l}$) the conventional resonance diagram is obtained (Fig. 4).

FIG. 4

From this plot it may be concluded that useful resonant motion, giving some degree of wave reflection, is to be expected for values of ω between about $0.8 \omega_n$ and $1.1 \omega_n$.

Finally, it is to be understood that the analysis so far applies to a vertical resonator. However, considerations parallel to the foregoing show that a horizontal canal of length equal to $L/4$ will likewise resonate, thus producing a reflective action similar to that of the vertical resonator.

Réflexion par action combinée de la résonance et de l'inertie d'un corps flottant.

Soit R le coefficient de transmission d'un corps résonateur, égal à a_3/a_1 , selon l'équation (11), et soit I le coefficient de transmission d'un corps flottant réfléchissant en vertu de sa seule inertie et égal à a_3/a_1 selon l'équation (9). Pour un réflecteur agissant par résonance et inertie combinées, le coefficient de transmission totale devrait être RI . Néanmoins, cette expression doit être modifiée parce que le mouvement qu'exécute le réflecteur flottant sous l'action de la houle peut influencer sur ses effets de résonance. Ceux-ci sont dus aux variations de niveau de la surface de l'eau extérieure par rapport au résonateur lui-même. La composante horizontale du mouvement du résonateur étant faible relativement à la longueur de la vague, ses effets sur la surélévation de la surface de l'eau pourront être négligés. Il ne devrait pas y avoir de composante verticale du mouvement du résonateur, mais en fait il n'a pas semblé possible de l'éliminer, comme nous l'expliquerons plus loin. Cette action d'oscillation verticale du résonateur flottant sous l'action de la houle produit un effet d'importance vitale.

Si le résonateur flottant oscille à la même amplitude que la houle, il n'existe alors aucune cause de résonance. Heureusement, on peut réduire cette oscillation à une fraction, que nous désignons par k , de l'amplitude de la vague. Le coefficient de transmission totale devient alors :

$$I [k + (1 - k) R] \quad (17)$$

L'équation (17) nous indique déjà l'aspect du résultat auquel on peut s'attendre en négligeant la valeur numérique de k et des autres coefficients contenus implicitement dans R en vue de l'évaluation expérimentale.

(A suivre.)

Reflection by combined resonance and inertia of a floating body.

Let R = transmission coefficient for a resonant structure $= a_3/a_1$ corresponding to equation (11), and I = transmission coefficient for a floating body reflecting by virtue of its inertia only $= a_3/a_1$ corresponding to equation (9).

Then for a reflector acting by combined resonance and inertia, the overall transmission coefficient should be RI . However, this may need modification because the motion of the floating reflector under wave action could affect its resonant action. The latter takes place because of changes of water surface elevation outside the resonator relative to the resonator itself. The horizontal component of the resonator movement is small compared to the water wave length, so that its effect on relative water surface elevation can be neglected. No vertical component of resonator movement should exist, but in fact, as explained later, it has not been found feasible to eliminate it. This vertical or heaving motion of the floating resonator under wave action has a vital effect. If the floating resonator heaves with the full amplitude of the wave, then there is no cause for resonance. Fortunately, the heaving motion can be kept to some fraction, designated k , of the wave amplitude. Then :

Overall transmission coefficient equal :

$$I [k + (1 - k) R] \quad (17)$$

Equation (17) indicates the form of result to be expected leaving numerical values of k and other coefficients implicit in R for experimental evaluation.

(to be continued)

REFERENCES

1. — LOCHNER (R.), FABER (O.) and PENNEY (W. G.). — "The "Bombardon" floating breakwater." *The Civil Engineer in War*. Vol. 2. The Institution of Civil Engineers, 1948.
2. — BEACH EROSION BOARD. — "Sand Movement by Waves." *Tech. Memo.*, No. 48 August, 1954.
3. — VALEMBOS (J.). — "Investigation of the effect of resonant structures on wave propagation." *Proc. Minnesota International Hydraulics Convention*, 1953.
4. — CARR (J. H.). — "Mobile Breakwaters." *Coastal Engineering* 2, Nov. 1951.