

Sur la mécanique du mouvement des matériaux solides

On the mechanics of solid transport

PAR DR. ING. SELIM YALIN

BUNDESANSTALT FÜR WASSERBAU, KARLSRUHE

La présente étude tente d'aborder par voie théorique le problème du mouvement des matériaux solides si souvent étudié par voie expérimentale, et de chercher ainsi à interpréter la structure physique de ce phénomène. Pour cela, l'auteur met d'abord en évidence l'influence du courant (réaction du courant) sur les grains d'un lit mobile et ensuite, compte tenu de la condition d'équilibre des forces agissant sur les éléments du lit et des résultats spéciaux tirés des essais, il dégage l'équation nécessaire à l'expression du début d'entraînement des grains. Dans la suite, il établit le système des équations différentielles caractérisant un grain mobile, lesquelles, une fois intégrées, définissent d'une part la structure cinématique des mouvements des grains et, d'autre part, la vitesse moyenne d'un grain en mouvement, en fonction de leurs arguments.

La dernière partie de l'étude est consacrée à un essai de déterminer théoriquement, à partir des résultats déjà obtenus, l'expression nécessaire pour le débit solide d'un courant bi-dimensionnel. La forme du résultat obtenu correspond entièrement à celle de la formule de Meyer-Peter.

This work is an attempt towards a theoretical understanding of solid transport—which has already been the subject of much experimental research—and to find an interpretation for the mechanical structure of the process. With this in view, the first part of the work concerns itself with bringing the effect of the current upon the grains in a moving river bed—i.e. the current reaction—into evidence. The author then considers the equilibrium condition for the forces acting on the bed, together with the special test results, and arrives at the equation required for expressing incipient grain entrainment. Following this, he establishes the system of differential equations for a moving grain, which, when integrated, give both the kinematic structure of the grain movements and the mean velocity of a moving grain in terms of their arguments.

The last part of the work is an attempt to find the necessary expression for the solid discharge in a two-dimensional flow by theoretical methods, starting from the results obtained so far. The form of the result obtained is seen to agree completely with that of Meyer-Peter's formula.

La théorie — proposée à la fin du dernier siècle par Du Buat —, du mouvement « stratifié » des matériaux solides qui serait constitué d'un mouvement de couches de fond superposées dont les vitesses décroissent linéairement en fonction de la profondeur, était jusqu'à tout récemment (*) la seule représentation de la structure cinématique de ce phénomène. Ce n'est que tout dernièrement que l'on a pu obtenir une image correcte de ce phénomène, et ce, au moyen d'un grand nombre d'observations et de prises ciné-

matographiques effectuées systématiquement en canal vitré (**).

Ces essais ont démontré que le mouvement global d'un fond (d'un ordre de grandeur prédominant dans la pratique) ne se produit que dans sa couche supérieure, où les éléments (grains) se déplacent soit en roulant (comme les gros grains du mélange de matériaux de fond aux faibles vitesses d'écoulement), soit, ce qui est généralement le cas, en franchissant chacun une certaine

(*) Voir par exemple ROUSE : *Fluid Mechanics for Hydraulic Engineers*, 1938.

(**) M. WELIKANOFF : *Dynamique des écoulements dans les canaux*, t. II (Sédiments et lit des cours d'eau), Moscou, 1955, p. 25.

distance par « bonds », avec des intervalles d'arrêt irréguliers; le mouvement permanent de la couche supérieure est donc formé de l'ensemble de ces mouvements individuels. Etant donné la complexité relative du phénomène, qui comprend simultanément le mouvement et l'influence réciproque de deux phases physiques différentes, comportant de ce fait de très nombreux facteurs qui doivent caractériser ce phénomène, la tendance à l'étudier expérimentalement s'est développée. Il en résulte que l'on dispose actuellement de données expérimentales surabondantes, mais qu'il n'existe encore aucune théorie physique nécessaire qui pourrait servir utilement de base scientifique pour le traitement du phénomène du mouvement des matériaux solides. Les formules empiriques établies jusqu'à présent pour le transport des matériaux solides, et qui

ont pour objet d'exprimer la relation mathématique entre les arguments d'un phénomène physique donné, présentent le plus souvent des structures totalement différentes (**), ce qui montre clairement de combien de manières différentes on peut interpréter une expérience, tant que celle-ci n'a pas été effectuée sur la base d'une théorie physique.

C'est pour cette raison que l'on a été amené à aborder dans la présente étude cet aspect théorique encore si peu traité du phénomène. Nous avons essayé d'interpréter la structure mécanique du phénomène et de trouver l'expression recherchée pour le débit solide. Il est intéressant de noter qu'à la fin de cette étude le résultat développé théoriquement se trouve en concordance complète avec la formule de Meyer-Peter.

1. — RÉACTION DU COURANT SUR LES ÉLÉMENTS DU FOND

Considérons l'écoulement bi-dimensionnel, permanent, et stationnaire d'un fluide réel au voisinage d'un fond plan et rugueux. La structure mécanique d'un mouvement défini de telle sorte est déterminée par les paramètres indépendants (1) :

$$k_s; \varphi; \mu; u_* \quad (1)$$

Selon les principes de base du calcul dimensionnel généralisé (théorème des π), toutes les grandeurs mécaniques sans dimensions intervenant seront les fonctions de $(4 - 3 = 1)$ d'une combinaison sans dimensions composée des quatre paramètres ci-dessus, c'est-à-dire de la seule combinaison possible :

$$\mathcal{R}_* = \frac{u_* k_s}{\nu} \quad \text{avec} \quad \nu = \mu / \varphi$$

Considérons maintenant un grain reposant sur le fond, soit a ou b de la figure 1, placé directement dans l'écoulement et donc soumis à une force \vec{F} (« réaction du courant ») par le milieu liquide. Désignons par F la grandeur de ce vec-

teur et son angle d'inclinaison par θ . Nous n'exprimerons la grandeur géométrique du grain que par une dimension linéaire, c'est-à-dire par son diamètre d ($d = \alpha k_s$) (2).

D'après ce qui précède, toutes les grandeurs sans dimensions intervenant pour le grain, et donc

$$\lambda = F / u_*^2 \varphi (\alpha k_s)^2 \quad \text{et} \quad \theta$$

seront les fonctions de \mathcal{R}_* qui lui sont propres, à savoir :

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \bar{\lambda}(\mathcal{R}_*) \\ \theta &= \bar{\theta}(\mathcal{R}_*) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

d'où :

$$F = [\bar{\lambda}(\mathcal{R}_*) \alpha^2] \varphi k_s^2 \cdot u_*^2 \quad (2_1)$$

Il est évident que la forme des relations fonctionnelles :

$$\bar{\lambda}(\mathcal{R}_*) \quad \text{et} \quad \bar{\theta}(\mathcal{R}_*)$$

dépend de la forme géométrique des conditions aux limites de l'écoulement considéré autour du grain, c'est-à-dire de la grandeur relative, du calage en altitude, de la forme, etc... du grain même et des grains dans son voisinage, qui peuvent influencer plus ou moins nettement l'écoulement autour de lui.

(***) Voir par exemple les formules de Du Boys, Schocklitsch, Nakajama, Tschang, Mac Dougall, Gilbert, Meyer-Peter, Donath, Poljakoff, Lewi, Gontcharoff, etc.

(1) On admet (du moins en principe) que la rugosité du fond k peut toujours être remplacée par une rugosité de sable k_s de Nikuradse équivalente (voir pour plus de détails, par exemple, H. SCHLICHTING : *Grenzschicht-Theorie*, G. BRAUN, Karlsruhe, 1951 (XX, g), p. 385.

(2) Pour plus de détails sur la forme sphérique des éléments de la couche mobile, voir par exemple M. WELIKANOFF (renvoi (**)) ci-dessus), t. II, p. 9.

2. — DÉBUT D'ENTRAÎNEMENT DES MATÉRIAUX SOLIDES

Les forces qui agissent sur un grain de la couche supérieure peu avant sa mise en mouvement sont les suivantes : poids du grain (pesé sous l'eau) \vec{G} , la réaction du courant sur le grain \vec{F} et la force d'appui \vec{R} . Soit φ l'angle de frottement entre grains et ψ l'angle d'inclinaison des tangentes au point d'appui T — T'; la condition pour

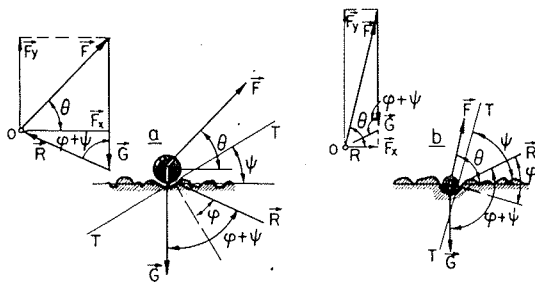


FIG. 1

la mise en mouvement du grain, suivant le triangle des forces représenté sur la figure 1, est alors :

$$F_x \geq (G - F_y) \operatorname{tg}(\varphi + \psi) \quad (3)$$

Nous basant sur le sens mécanique de cette formule (3), nous appellerons le facteur :

$$f = \operatorname{tg}(\varphi + \psi)$$

« coefficient de frottement apparent », et la somme des angles :

$$\varphi + \psi$$

« angle apparent de frottement » du grain considéré.

Compte tenu de la relation trigonométrique de F_x , F_y et F par rapport à l'angle θ , nous pouvons exprimer la condition (3) sous les formes suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \frac{F}{G} &\geq \Phi \\ \frac{F_x}{G} &\geq \Phi \cos \theta \\ \frac{F_y}{G} &\geq \Phi \sin \theta \end{aligned} \right\} \text{ avec } \Phi = \frac{f}{\cos \theta + f \sin \theta} \quad (3_1)$$

Le poids du grain sous l'eau peut être exprimé par :

$$G = \alpha_f \gamma_s d^3 = (\alpha_f \alpha^3) \gamma_s k_s^3 \quad (4)$$

γ_s étant le poids unitaire pesé sous l'eau (admis comme égal pour tous les grains) et α_f le coefficient de forme (pour la sphère, $\alpha_f = \pi/6$).

Si nous substituons à F et G dans la première formule (3₁) leurs valeurs (2₁) et (4), nous obtenons :

$$\frac{\gamma}{\gamma_s} \cdot \frac{u_*^2}{gk_s} \geq \frac{\alpha_f \alpha^3}{\lambda (\mathcal{R}_*)} \Phi = W^{(3)} \quad (5)$$

dont le premier membre ne dépend plus des propriétés individuelles du grain considéré. En désignant (par analogie avec $\mathcal{R}_* = u_* k_s / \nu$ la combinaison sans dimension u_*^2 / gk_s par \mathcal{F}_* , on arrive à la conclusion que, pour que le grain puisse se mettre en mouvement, il faut que le nombre de Froude \mathcal{F}_* soit suffisamment grand pour que le premier membre de la relation ci-dessus atteigne l'expression sans dimensions W propre au grain considéré, ce W étant fonction du coefficient de forme, des dimensions relatives, de la « géométrie » de position du grain en liaison avec \mathcal{R}_* , et de l'angle de frottement entre les grains, c'est-à-dire des valeurs :

$$\alpha_f, \alpha, \psi, \lambda, \theta, \text{ et } \varphi. \quad (4)$$

Si l'on tient compte de la tendance de la relation $\lambda (\mathcal{R}_*)$ et des écarts insignifiants par rap-

(3) En admettant l'hypothèse plausible $k_s \approx d_m$ et en éliminant de la formule représentant le début d'entraînement (par exemple la formule Meyer-Peter) la tension de cisaillement et compte tenu de la condition

$$\mathcal{R}_* \geq 70 \text{ avec } g = 9,81 \text{ m/s}^2, \gamma_s / \gamma = 1,80 \text{ et } \nu = 1,3 \cdot 10^{-6},$$

on a $d_m \geq 0,215$ cm. Cela veut dire que, dans la grande majorité des cas se présentant dans la nature, on ne saurait prévoir le début du mouvement qu'après « écoulement rugueux parfaitement établi », λ cessant de ce fait de dépendre de \mathcal{R}_* et devenant constant, ceci pour la plupart des éléments composant le lit.

(4) Au sujet de l'écoulement symétrique autour d'une sphère, voir H. SCHLICHTING, ouvrage cité, renvoi 1), I, e. — L. SEDOFF : *Les méthodes de similitude et dimensions en mécanique*, Moscou, 1954, II, 4, pp. 49-53.

Au sujet de l'écoulement non symétrique, voir M. DEMENTIEV : *Interference of two solid bodies in a stream of fluid*, *Transactions of the Scientific Research Institute of Hydraulics* (V; XV), Leningrad, 1935.

port à l'unité de la combinaison triangulaire Φ lorsque ψ varie entre 0 et $\pi/2$ (5) on trouve que les valeurs W varient généralement en fonction de u_* de la façon représentée par la figure 2 et que l'« état critique » d'un grain se présentera à la valeur $u_* = u_{*kr}$ correspondant au point d'intersection de la parabole $\gamma/\gamma_s \mathcal{F}_*$ et la courbe de W .

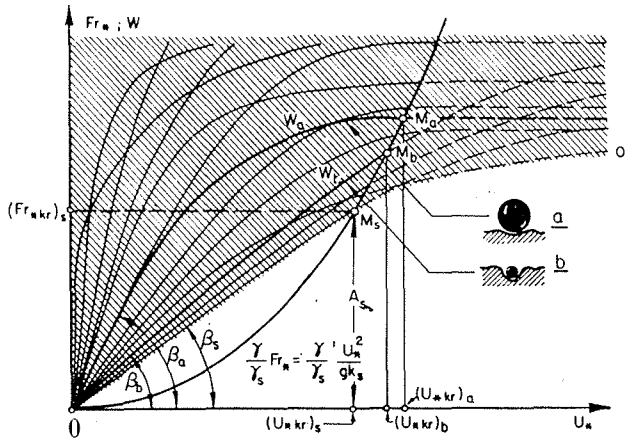


FIG. 2

Avant d'étendre ce que nous avons dit au sujet de l'« état critique » d'un grain particulier, à l'ensemble des grains de la couche supérieure, et de passer à l'« état critique » d'une couche de fond, nous considérerons les résultats expérimentaux susceptibles de nous assister dans cette tâche.

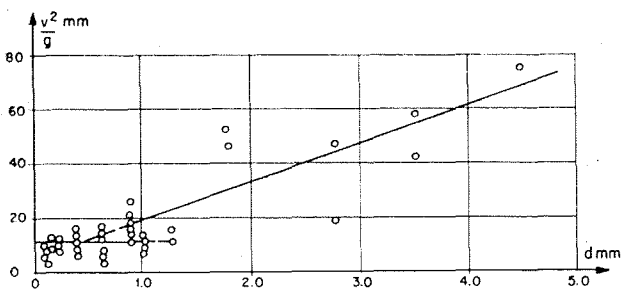


FIG. 3

La figure 3 représente les résultats d'essais ayant pour but de déterminer la relation entre la granulométrie d d'un fond ($d \approx \text{constant}$) et les valeurs (v) de la vitesse moyenne dans le canal d'essai correspondant à la mise en

mouvement du fond (6). Il est intéressant de noter que la courbe expérimentale ne tend pas du tout à recouper l'origine des coordonnées. Par contre, les essais en canal vitré au laboratoire d'hydraulique fluviale Theodor Rehbock, de l'Ecole Polytechnique de Karlsruhe, ont été effectués avec un matériau de fond constitué de trois mélanges fondamentalement différents, composés des fractions :

$$d_{\min} \rightarrow 0 \leq d_{\max} = 8 \text{ mm};$$

les courbes granulométriques de ces matériaux a , b et c sont représentées sur la figure 4.

On a constaté que, pour une augmentation pratiquement uniforme du débit d'eau (à partir de $Q=0$) dans le canal d'essai, on ne pouvait observer des quantités appréciables de matériau de fond (échantillon) dans la boîte collectrice qu'à partir d'un certain régime d'écoulement, que l'on peut appeler le « régime d'apparition d'entraînement ». L'analyse au tamis de ces premiers échantillons a donné les courbes granulométriques a_1 , b_1 , c_1 de la figure 4.

Nous avons déduit de ces données expérimentales que l'« état critique » déterminant le début de mouvement d'un grain quelconque (et même du plus petit) ne peut se produire que pour une valeur finie bien définie de u_* ($d \rightarrow 0$ ne conditionne donc pas $u_{*kr} \rightarrow 0$). Nous concluons en outre que, même s'il se produit un mouvement appréciable des éléments de fond (ce qui n'est pas forcément le cas), les grains participant au mouvement de masse (débit solide) représentent en général toutes les grandeurs de d , avec prépondérance toutefois des fractions de faible « d » (voir les courbes a , a_1 ; b , b_1 ; c , c_1).

Nous chercherons maintenant à poursuivre notre interprétation de la structure mécanique du phénomène à la lumière de ces résultats expérimentaux. Considérons une zone suffisamment étendue, par rapport à la granulométrie des matériaux, de la surface d'un fond (vue en plan) et supposons que la couche supérieure de cette zone soit constituée de n grains. Etant donné que, suivant les données expérimentales, la valeur limite $u_{*kr} \rightarrow 0$ ne peut exister en pratique pour aucun grain, nous concluons que toutes les courbes de W doivent se trouver dans une zone déterminée (zone hachurée sur la figure 2), dont

la limite inférieure $00'$ a une inclinaison initiale de $\beta_s > 0$.

La pente de la parabole \mathcal{F}_* (fig. 2) se raidit en fonction de valeurs croissantes de u_* et pénètre

(5) Pour plus de détails sur la combinaison triangulaire, voir S. YALIN : Die theoretische Analyse der Mechanik der Geschiebepbewegung, *Mitteilungsblatt der Bundesanstalt für Wasserbau*, Nr. 8, Karlsruhe, 1957.

(6) M. WELIKANOFF, ouvrage cité renvoi (**) ci-dessus, t. II, p. 23.

dans la zone des courbes de W à l'endroit où elle recoupe ces courbes aux points de $\mathcal{F}_* = W$, qui définissent l'« état critique » (début de mouvement) des grains correspondants.

Le mouvement de masse des éléments de fond (début d'entraînement des matériaux solides) se déclenche donc à la valeur de $u_* = (u_{*kr})_s$ correspondant à la pénétration de la parabole $(\gamma/\gamma_s) \mathcal{F}_*$ dans la zone des courbes de W (c'est-à-dire le point d'intersection des courbes \mathcal{F}_* et $\widehat{00'}$ (7).

coefficient pour une forme bien déterminée des grains (sphérique) et uniquement fonction de la granulométrie du matériau de fond (c'est-à-dire de l'allure géométrique de la courbe granulométrique).

Dans le cas d'un écoulement bidimensionnel à la surface libre, on a :

$$\tau_0 = \gamma h i, \text{ soit } \tau_{0kr} = \gamma h_{kr} i \quad (7)$$

et k_s pourra évidemment toujours être repré-

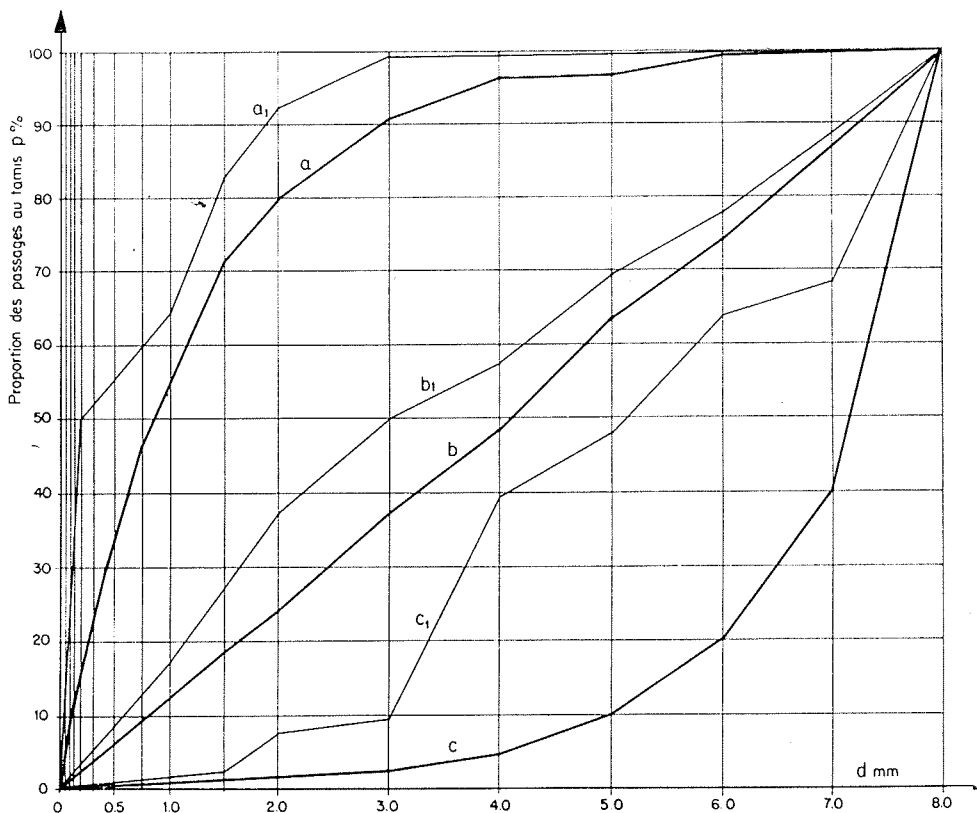


FIG. 4

Il découle de l'égalité des ordonnées en ce point :

$$(\gamma/\gamma_s) (\mathcal{F}_{*kr})_s = (\gamma/\gamma_s) (u_{*kr})_s^2 / g k_s = A_s \quad (6)$$

ou bien :

$$\tau_{0kr} = A_s \gamma_s k_s$$

τ_{0kr} désignant la tension de cisaillement du fond (paroi) $\tau_0 = u_*^2 \rho$, correspondant au début d'entraînement des matériaux solides, et A_s étant un

coefficient déterminé par le diamètre moyen des grains sous la forme $k_s = \alpha_m d_m$ où α_m est un nombre déterminé pour une allure donnée de la courbe granulométrique. De cette façon, on obtient de ces relations l'expression pour le début d'entraînement du matériau (dans la forme posée par Meyer-Peter) :

$$\tau_{0kr} = A \gamma_s d_m$$

ou bien :

$$\gamma h_{kr} i - A \gamma_s d_m = 0$$

(8)

(7) L'indice s accompagne les valeurs qui se rapportent à l'ensemble du fond. L'indice kr désigne le début du mouvement, encore ici (c'est-à-dire celui du fond).

$A = \alpha_m A_s$ ne dépend donc également que de la granulométrie du matériau de fond.

3. — MOUVEMENT DU MATÉRIAU SOLIDE

Considérons maintenant les états critiques des grains a et b de la figure 1, dont les angles de frottement apparents sont situés dans les zones :

$$\varphi + \psi < \pi/2 \quad (\text{grain } a)$$

$$\varphi + \psi > \pi/2 \quad (\text{grain } b)$$

Lors du début du mouvement du grain a , la résultante $\vec{F} + \vec{G}$ est dirigée vers le bas (cas classique d'un « gros » grain), c'est-à-dire que le mouvement du grain commence lorsque : $F_y < G$, de sorte que le grain se déplacera en « roulant » sans quitter la surface du fond (8).

Par contre, dans le cas du grain b , la résultante $\vec{F} + \vec{G}$ est dirigée vers le haut, de sorte que $\vec{F}_y > \vec{G}$, d'où il s'ensuit que le grain se trouve repoussé de la surface du fond, se déplaçant en « volant » (pendant un certain temps) sans la toucher.

En principe, ces deux genres de mouvement ne se distinguent pas entre eux; autrement dit, ils ont tous deux la même structure dynamique.

En fait, le « roulement » d'un grain quelconque influence les autres corps stationnaires. Ceci signifie que la hauteur des aspérités (la rugosité) du fond est du même ordre de grandeur que les dimensions du grain roulant. De plus, dans la nature, la répartition de ces aspérités sur la surface du fond n'est pas rigoureusement uniforme.

Par conséquent, tout « obstacle » sur le chemin du grain « roulant » provoquera une diminution soudaine de sa vitesse \vec{c} , c'est-à-dire une augmentation soudaine de la vitesse d'écoulement relative $(u - c_x)$ par rapport au grain, et, par conséquent, de la force (poussée) d'entraînement \vec{F} , qui croît avec cette vitesse. Il est donc évident que tout mouvement ayant l'allure d'un « roulement » s'accompagne d'augmentations (oscillations) plus ou moins impulsives du vecteur \vec{F} . De ce fait, le grain sera en réalité mis en

« roulement bondissant » (cf. saltation), d'où il ne saurait guère être question d'un contact permanent (continu) avec la surface de la couche de fond.

Nous passerons maintenant à l'interprétation de l'aspect mécanique de ce mouvement saltatoire des grains, que l'on peut considérer en tant que base cinétique pour le mouvement des éléments du fond, d'après ce qui précède.

A cette fin, nous commencerons par chercher à établir la relation pour la réaction du courant sur un grain en mouvement au voisinage du fond.

a) Réaction du courant sur un corps (grain) en mouvement au voisinage du fond.

Désignons la valeur instantanée du vecteur de vitesse par \vec{c} , et mettons c_x, c_y , pour ses composantes sur les axes correspondants; nous avons alors, à l'instant considéré, la vitesse relative du courant v par rapport au grain (9) :

$$v = u - c_x = u - u_* \bar{u} - c$$

\bar{u} étant en général une fonction sans dimensions de y/k_s et de \mathcal{R}_* (loi des parois). Partant des principes de la théorie du calcul dimensionnel, nous exprimons la valeur de la réaction du courant de la manière suivante :

$$F = (\lambda \alpha^2) \rho k_s^2 (u - c_x)^2 \quad (9)$$

Contrairement au cas d'un grain reposant sur la surface du fond, la géométrie instantanée des conditions aux limites pour l'écoulement autour d'un grain sphérique est entièrement caractérisée par les trois grandeurs linéaires y, d et k_s .

Il faut toutefois tenir compte du fait que lorsqu'un grain « vole » sur une longueur X suffisamment grande par rapport à k_s , les déformations locales des lignes d'écoulement n'ont généralement aucune influence sur la trajectoire du grain considéré, ceci étant dû à la rugosité au voisinage immédiat du fond.

(8) L'effet de « roulement » se produit parce que (pour des raisons bien connues) le point d'application de la réaction au courant \vec{F} se trouve au-dessus du centre de figure du grain, d'où s'engendre un couple de moment $M = F \cdot e$, le symbole e désignant l'excentration de la force \vec{F} .

(9) On pourra choisir pour v la vitesse incidente correspondant à un point typique quelconque du grain, par exemple v_u, v_m ou v_o , les indices se rapportant au point inférieur, au point milieu et au point supérieur. Toutefois, puisque nous aurons à traiter dans ce qui suit le mouvement du grain comme mouvement d'un point matériel, on prendra $y_o \approx y_u = y$ et $u_o \approx u_u = u$.

On comprend alors que l'influence de la rugosité ne se manifesterait que sur la répartition des vitesses (on a déjà entièrement tenu compte de ce fait plus haut au moyen de la loi des parois) et que, par conséquent, les deux seules grandeurs linéaires y et d suffisent pour définir la géométrie du système considéré.

Il s'ensuit que toutes les grandeurs sans dimensions liées au mouvement considéré seront des fonctions de \mathcal{R} et de y/d (10) :

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \bar{\lambda}(\mathcal{R}; y/d) \\ \theta &= \bar{\theta}(\mathcal{R}; y/d) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Si nous tenons compte des relations :

$$\mathcal{R} = \alpha \mathcal{R}_* [u - c/u_*] \text{ et } \alpha(y/d) = y/k_s$$

nous avons :

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \lambda(\mathcal{R}_*; y/k_s; d/k_s; c/u_*) \\ \theta &= \theta(\mathcal{R}_*; y/k_s; d/k_s; c/u_*) \end{aligned} \right\} \quad (10_1)$$

b) Le « vol » (saltation) d'un grain.

Suivant le principe de base de la dynamique, les forces extérieures \vec{F} , \vec{G} et la force d'inertie $\vec{Q} = -(G/g)(d\vec{c}/dt)$ sont reliées entre elles à tout instant pendant le « vol » du grain par la relation :

$$\vec{F} + \vec{G} + \vec{Q} = 0 \quad (11)$$

Les projections de cette expression vectorielle (11) sur les axes x et y deviennent, après une simple transformation algébrique :

$$-Q_x = F_x; \quad -Q_y = F_y - G$$

En introduisant les valeurs correspondantes et en appliquant une simple transformation algébrique, nous obtenons le système d'équations différentielles suivant pour le mouvement d'un grain « volant » (en saltation) :

$$\left. \begin{aligned} (1/g)(dc_x/dt) &= \cos \theta (\lambda/\alpha_f) (\gamma/\gamma_s) \mathcal{F} \cdot [1 - (c_x/u)]^2 \\ (1/g)(dc_y/dt) &= [\text{tg } \theta (1/g)(dc_x/dt)] - 1 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ou :

$$\left. \begin{aligned} (1/g)(d^2x/dt^2) &= \cos \theta (\lambda/\alpha_f) (\gamma/\gamma_s) \mathcal{F} \cdot [1 - 1(1/u)(dx/dt)]^2 \\ (1/g)(d^2y/dt^2) &= [\text{tg } \theta (1/g)(d^2x/dt^2)] - 1 \end{aligned} \right\} \quad (12_1)$$

(10) Au sujet des valeurs expérimentales de λ et de θ (et de λ_x, λ_y) fonctions de y/d (pour des nombres de Reynolds élevés), voir M. DEMENTIEV, renvoi (4).

$$\text{(avec } \mathcal{F} = u^2/gd = (\bar{u}^2/\alpha) \mathcal{F}_*)$$

Nous chercherons maintenant à décrire la structure mécanique d'une phase de « vol » sans avoir recours à un procédé de calcul quelconque. Immédiatement après le début du mouvement

($t=0$) du grain dans la direction $(\vec{F} + \vec{G})$, l'accélération « par à coups » du grain provoque une diminution rapide de la grandeur du vecteur \vec{F} proportionnelle à $(u - c_x)^2$, ce qui fait pivoter la résultante $(\vec{F} + \vec{G})$ vers le bas dans le sens désigné sur la figure 5 par (—). Cette rotation de la résultante se trouve en outre accélérée par la

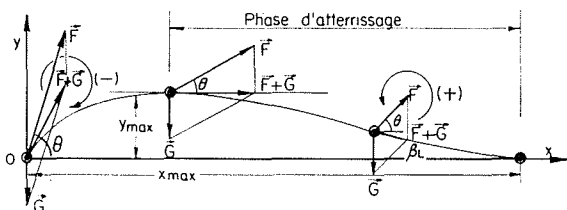


FIG. 5

décroissance de l'angle θ (pour des valeurs croissantes du calage en altitude y/d). Lorsque, de cette façon, le grain atteint la position la plus élevée $(y/d)_{\text{max}}$, l'accroissement ultérieur de c_x (et donc la diminution de F) provoque la « phase d'atterrissage » du grain. En même temps, la réduction du calage en altitude y/d provoque la croissance de l'angle θ , et le vecteur \vec{F} , qui diminue constamment, pivote dans le sens positif (fig. 5), ce qui fait que la courbure de la trajectoire (primitivement supposée positive) diminue à mesure qu'elle s'approche du fond, ses valeurs devenant de plus en plus petites ou même négatives dans certains cas (réduction de l'angle « d'atterrissage » β_L). Le système d'équations différentielles (12) tel qu'il est donné plus haut (et où λ, θ et u sont eux-mêmes des fonctions de $\mathcal{R} = vd/\nu$, donc de dx/dt et de y/d) ne peut être intégré par les moyens actuels de l'analyse mathématique, du moins pratiquement, sinon en principe (11). Par contre, il ne faut pas oublier que, dans les conditions régnant dans la pratique, les trajectoires des grains « en saltation » sont si aplaties que l'on peut négliger les variations des grandeurs λ, θ et u dues à celles des calages en altitude y/d , et on peut considérer celles-ci comme grandeurs indépendantes de y .

De plus, en supposant que la loi quadratique pour la valeur de F est valable, il s'ensuit que

(11) Il n'y a même pas besoin de rappeler, à l'appui, qu'on n'a pas encore trouvé d'expression analytique capable d'exprimer les relations fonctionnelles entre λ et θ et leurs arguments.

l'influence du nombre de Reynolds, et, par suite, de dx/dt , sur les grandeurs λ , θ et u , est éliminée sur toute la trajectoire du grain. (Les solutions que l'on obtient de cette manière ne peuvent, bien entendu, pas entièrement caractériser ceux des phénomènes de mouvement des grains qui ne remplissent pas les conditions prescrites. Toutefois, ceci n'est valable dans la nature que pour les grains de très faibles dimensions, pour lesquels on ne peut admettre ni que la loi quadratique de résistance soit valable, ni que leur trajectoire soit suffisamment plate).

Nous passerons maintenant à l'intégration du système d'équations (12), en admettant que λ , θ et u soient des constantes. Posons pour abrégé :

$$\cos\theta (\lambda/\alpha_f) (\gamma/\gamma_s) \mathcal{F} = a$$

et introduisons les coordonnées sans dimensions :

$$\xi = x/(u^2/g); \quad \eta = y/(u^2/g); \quad \tau = t/(u/g)$$

avec les désignations :

$$c_\xi = d\xi/d\tau = c_x/u \quad c_\eta = d\eta/d\tau = c_y/u$$

Nous obtenons :

$$\left. \begin{aligned} dc_\xi/d\tau &= a(1 - c_\xi)^2 \\ dc_\eta/d\tau &= \text{tg } \theta (dc_\xi/d\tau) - 1 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ou bien :

$$\left. \begin{aligned} d^2\xi/d\tau^2 &= a [1 - (d\xi/d\tau)]^2 \\ d^2\eta/d\tau^2 &= \text{tg } \theta (d^2\xi/d\tau^2) - 1 \end{aligned} \right\} \quad (13_1)$$

La première de ces deux équations (13) peut être intégrée immédiatement :

$$\int_0^\tau d\tau = (1/a) \int_0^{c_\xi} dc_\xi / (1 - c_\xi)^2$$

d'où nous tirons :

$$c_\xi = a\tau / (1 + a\tau) \quad (14)$$

Une nouvelle intégration de c_ξ :

$$\int_0^\xi d\xi = \int_0^\tau [a\tau / (1 + a\tau)] \cdot d\tau$$

nous donne :

$$\xi/\tau = 1 - [(1/a\tau) \ln(1 + a\tau)] \quad (15)$$

La deuxième des équations (13) s'intègre de la façon suivante :

$$\int_0^\eta dc_\eta = \text{tg } \theta \int_0^\xi dc_\xi - \int_0^\tau d\tau$$

d'où :

$$c_\eta = \text{tg } \theta c_\xi - \tau$$

ou bien, en substituant (14) :

$$c_\eta = \text{tg } \theta a\tau / (1 + a\tau) - \tau \quad (16)$$

Une nouvelle intégration de c_η :

$$\int_0^\eta d\eta = \text{tg } \theta \int_0^\xi d\xi - \int_0^\tau \tau d\tau$$

nous donne :

$$\eta = \text{tg } \theta \xi - (\tau^2/2)$$

et, en substituant (15) :

$$\eta/\tau = \text{tg } \theta [1 - (1/a\tau) \ln(1 + a\tau)] - (\tau/2) \quad (17)$$

Nous passons maintenant à la détermination de la valeur moyenne de la vitesse du grain pendant sa phase de saltation, ce qui est d'ailleurs important pour le problème considéré.

c) Détermination de la vitesse moyenne du grain.

On a, pour la vitesse moyenne c_{xm} :

$$c_{xm} = (x_{\max}/t_{\max}) = u (\xi_{\max}/\tau_{\max}) = u c_{\xi m}$$

Nous trouvons $t_{\max} = \tau_{\max} (u/g)$ comme seconde racine de l'équation $y=0$ (où $\eta=0$), c'est-à-dire :

$$\text{tg } \theta [1 - (1/a\tau_{\max}) \ln(1 + a\tau_{\max})] - (\tau_{\max}/2) = 0 \quad (18)$$

En posant pour abrégé :

$$z = a\tau_{\max} \quad \text{et} \quad m = 1/(2a \text{tg } \theta)$$

nous pouvons ramener cette équation à :

$$1 - mz = (1/z) \ln(1 + z) \quad (19)$$

c'est-à-dire que la détermination de la durée de saltation se réduit à la solution de l'équation transcendante (19). Exprimées graphiquement, les solutions de cette équation indiquent les abscisses des points d'intersection du faisceau de droites (voir fig. 6) $y=1 - mz$ avec la courbe $Y=(1/z) \ln(1+z)$.

La courbe de la solution $z = \bar{z} (1/m)$ est représentée sur la figure 7.

L'allure de la courbe obtenue pour la fonction $z = \bar{z} (1/m)$ nous permet d'exprimer cette fonction sous la forme :

$$z = [(1/m) - 2] \text{tg } \alpha_z \quad (20)$$

$\text{tg } \alpha_z$ variant elle-même en fonction de z (fig. 8).

Étant donné que l'on obtient la longueur de la trajectoire de saltation ξ_{\max} en substituant la

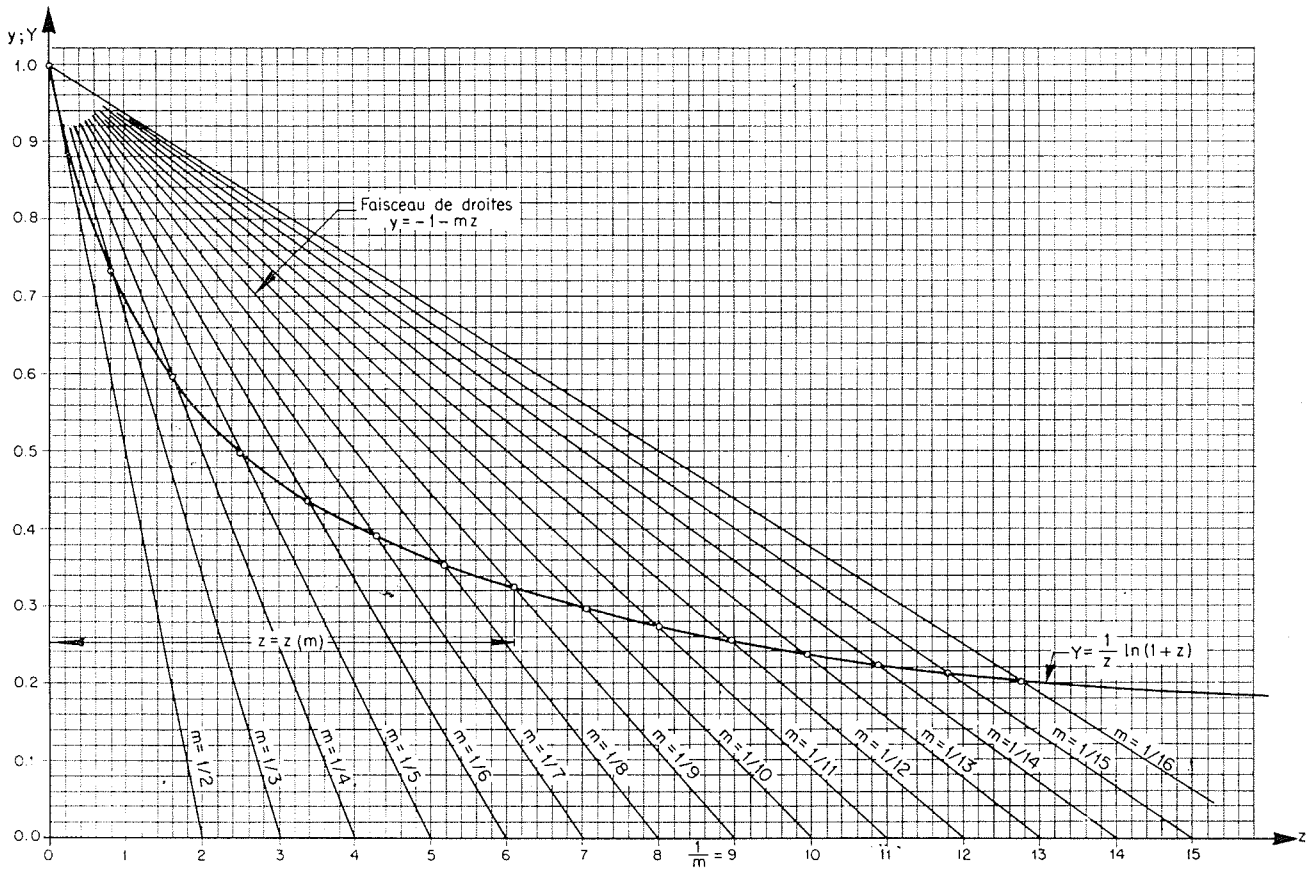


FIG. 6

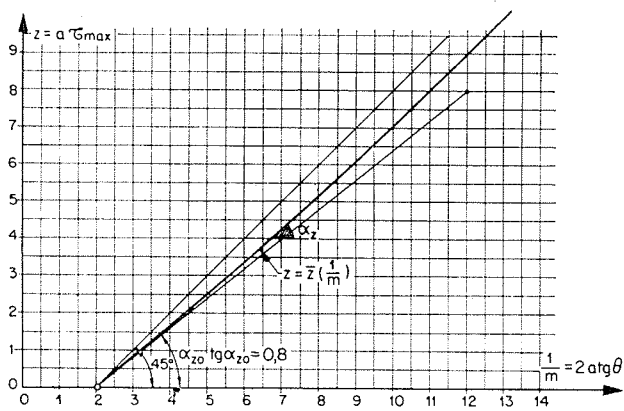


FIG. 7

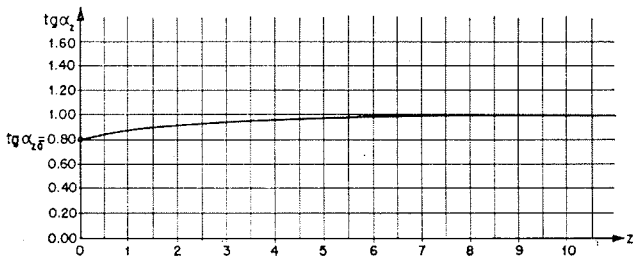


FIG. 8

valeur τ_{max} dans la formule (15), et que la valeur ξ_{max}/τ_{max} est elle-même égale à $c_{\xi m}$, on a :

$$c_{\xi m} = 1 - (1/z) \ln(1+z)$$

ou bien, en substituant (19) :

$$c_{\xi m} = mz$$

et, en substituant la valeur (20) de z :

$$c_{\xi m} = c_{xm}/u = (1 - 2m) \text{tg } \alpha_z$$

En négligeant la faible variation de $\text{tg } \alpha_z$ au voisinage de 1, et en posant simplement $\text{tg } \alpha_z = 1$, et finalement en remplaçant c_{xm} par c , on obtient :

$$c/u = 1 - 2m$$

La substitution de la valeur de m donne finalement :

$$c/u = 1 - 1/[\sin \theta (\lambda/x_f) (\gamma/\gamma_s) \mathcal{F}] \quad (21)$$

et compte tenu de la condition rendant la saltation possible :

$$F_y/G = \sin \theta (\lambda/x_f) (\gamma/\gamma_s) \mathcal{F}_{kr} = 1$$

Nous pouvons exprimer la formule (21) de la façon suivante :

$$c/u_* = \bar{u} \left[1 - \left(\frac{u_{*kr}}{u_*} \right)^2 \right] \quad (21_1)$$

ou bien, d'une façon plus générale :

$$c/\bar{u}\sqrt{gk_s} = \sqrt{\mathcal{F}_*} \left[1 - (\mathcal{F}_{*kr}/\mathcal{F}_*) \right] \quad (21_2)$$

d) Débit solide.

Considérons un élément (grain d_i) du fond de la couche mobile ayant une vitesse moyenne c_i , et désignons le rapport entre son poids $G_i = \alpha_f \gamma_s d_i^3$ et l'unité de surface de la projection en plan du fond, par $\Delta \mathcal{G}_i$. La valeur absolue de $\Delta \mathcal{G}_i$ n'est évidemment rien d'autre que G_i ; toutefois sa dimension est $|\Delta \mathcal{G}_i| = \text{kg/m}^2$. Si on désigne par n le nombre des grains en mouvement à l'instant considéré sur l'unité de surface (1 m^2) du plan de la surface, on peut exprimer le débit solide q par unité de largeur de la couche de fond sous forme de somme des produits $\Delta \mathcal{G}_i c_i = \Delta q_i$:

$$q = \sum_{i=1}^n \Delta q_i = \sum_{i=1}^n \Delta \mathcal{G}_i c_i \quad (22)$$

ce qui s'explique par des raisons dimensionnelles.

Ou bien, en nous basant sur le théorème des valeurs moyennes :

$$q = c_s \sum_{i=1}^n \Delta \mathcal{G}_i = c_s \mathcal{G} \quad (22_1)$$

\mathcal{G} étant le poids de toute la masse se trouvant en mouvement à l'instant considéré sur l'unité de surface du plan du fond, et c_s étant la « vitesse de migration » de cette masse-couche.

Choisissons une grandeur linéaire caractéristique quelconque δ du matériau de fond considéré (telle que k_s ; d_m ; d_{\max} , etc.) et posons $1 \text{ m}^2 = B_0 \delta^2$ pour l'unité de surface, B_0 représentant un nombre déterminé pour la grandeur choisie δ , nous pouvons alors écrire pour $\Delta \mathcal{G}_i$:

$$\Delta \mathcal{G}_i = (\alpha_f/B_0) \gamma_s \delta (d_i/\delta)^3$$

et pour \mathcal{G} :

$$\mathcal{G} = \sum_{i=1}^n \Delta \mathcal{G}_i = (\alpha_f/B_0) \gamma_s \delta \sum_{i=1}^n (d_i/\delta)^3$$

Ou bien, si nous adoptons les notations :

$$\mathcal{G}_0 = (\alpha_f/B_0) \gamma_s \delta \quad \text{et} \quad \Delta N_i = (d_i/\delta)^3; \quad N = \sum_{i=1}^n \Delta N_i$$

nous avons :

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 N \quad (23)$$

La valeur de \mathcal{G} est alors entièrement caractérisée par la grandeur sans dimensions N qui croît elle-même à son tour en fonction du nombre n des grains au mètre carré du plan du fond participant au mouvement de masse (12).

Il résulte de la formule (5) que, pour une valeur déterminée de l'angle de frottement φ et la « géométrie » donnée de la position du grain, l'apparition du décollement d'un grain du fond ne dépend que de la valeur de la grandeur sans dimensions $\gamma/\gamma_s \mathcal{F}_*$ (13). Ceci veut donc dire que, pour une couche de fond ayant une certaine « géométrie » de surface, le nombre n des grains détachés de cette couche et participant au mouvement de masse, et par suite N , ne sont fonction que de la grandeur $\gamma/\gamma_s \mathcal{F}_*$, soit une fonction, croissant uniformément, de $(\gamma/\gamma_s) [\mathcal{F}_* - (\mathcal{F}_{*kr})_s]$.

Nous choisirons pour cette relation fonctionnelle la forme :

$$N = B_1 \left[(\gamma/\gamma_s) [\mathcal{F}_* - (\mathcal{F}_{*kr})_s] \right]^m \quad (24)$$

les valeurs de B_1 et de m ne pouvant être déterminées que par voie expérimentale. Étant donné que la configuration des grains à la surface du fond, et par suite la « géométrie de surface » qui en résulte, dépendent uniquement de la granulométrie du matériau de fond, ceci pour une forme (sphérique) donnée, on comprend que la relation fonctionnelle N (les valeurs B_1 et m) doit strictement varier plus ou moins en fonction des allures diverses des courbes granulométriques.

Nous allons schématiser la relation (24) par une « courbe N » (voir fig. 9). Toute entrée d'un « nouveau » grain d_i quelconque dans le mouvement de masse lorsque la valeur de \mathcal{F}_* est $(\mathcal{F}_{*kr})_i$ fera augmenter la valeur N_i :

$$N_i = B_1 \left[(\gamma/\gamma_s) [(\mathcal{F}_{*kr})_i - (\mathcal{F}_{*kr})_s] \right]^m$$

d'un incrément $\Delta N_i = (d_i/\delta)^3$ et déterminera en outre le point de départ de la courbe de vitesse c_i de ce grain. On aura à porter cette courbe sur le schéma tridimensionnel de la figure 9, juste en face de la bande ΔN_i qui lui correspond. La totalité des courbes de c formera ainsi la surface désignée par \mathcal{S} dans la figure 9. Soit $\bar{c}_i(\mathcal{F}_*)$ la valeur de la vitesse moyenne du grain d_i pour un certain \mathcal{F}_* , le produit élémentaire :

$$\bar{c}_i(\mathcal{F}_*) \Delta N_i = \Delta S_i$$

qui représente l'élément de surface ΔS_i de la figure 9, est proportionnel à l'élément de débit

(12) Dans le cas particulier des grains de même grosseur ($d_i = \delta = G^{1/3}$), N représenterait simplement le nombre de ces grains ($N = n$).

(13) Il est admis que le grain considéré se détache dès que la loi quadratique de la résistance lui devient applicable (voir renvoi 3).

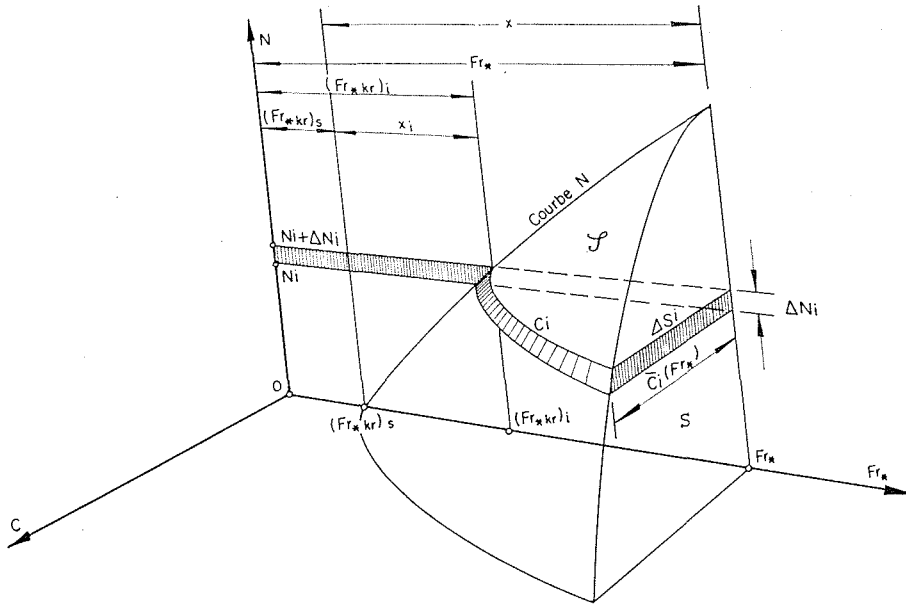


FIG. 9

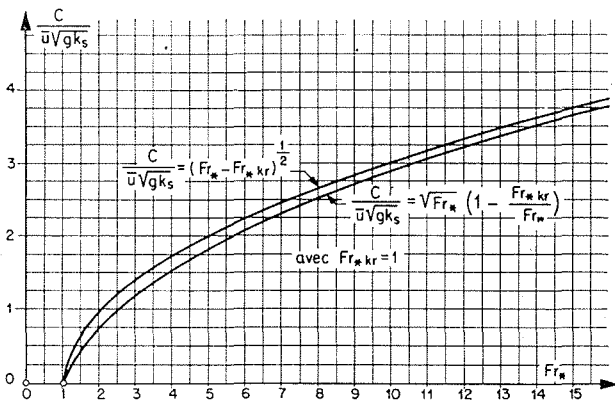


FIG. 10

Δq_i correspondant au régime d'écoulement \mathcal{F}_* . En fait, nous avons, suivant les formules déjà établies :

$$\Delta S_i = \bar{c}_i(\mathcal{F}_*) \Delta N_i = \bar{c}_i(\mathcal{F}_*) (\Delta \mathcal{G}_i / \mathcal{G}_0) = (1/\mathcal{G}_0) \Delta q$$

et la somme de ces éléments devient :

$$S = \sum_{i=1}^n \Delta S_i = 1/\mathcal{G}_0 \sum_{i=1}^n \Delta q_i = (1/\mathcal{G}_0) q$$

On voit que les aires des sections S correspondant à des \mathcal{F}_* déterminés sont proportionnelles aux débits solides du fond considéré correspondant à la même valeur de \mathcal{F}_* .

Compte tenu du fait que la différence entre les deux courbes de la figure 10 est entièrement négligeable dans le cas considéré, nous pouvons remplacer l'expression (21₂) par une autre qui

convient pratiquement aussi bien à nos fins et qui est beaucoup plus avantageuse du point de vue des opérations mathématiques que nous avons à effectuer :

$$c/\bar{u}\sqrt{gk_s} = (\mathcal{F}_* - \mathcal{F}_{*kr})^{1/2}$$

avec $\mathcal{F}_{*kr} = (\mathcal{F}_{*kr})_i$. La somme ci-dessus s'écrira donc :

$$(1/\mathcal{G}_0) q = (\bar{u}\sqrt{gk_s}) \sum_{i=1}^n [\mathcal{F}_* - (\mathcal{F}_{*kr})_i]^{1/2} \Delta N_i$$

En passant à la valeur limite, nous avons, pour ΔN_i :

$$\Delta N_i = dN_i = mB_1 (\gamma/\gamma_s)^m [(\mathcal{F}_{*kr})_i - (\mathcal{F}_{*kr})_s]^{m-1}$$

$$d [(\mathcal{F}_{*kr})_i - (\mathcal{F}_{*kr})_s]$$

et pour notre somme :

$$(1/\mathcal{G}_0) q = (\bar{u}\sqrt{gk_s}) mB_1 (\gamma/\gamma_s)^m \int_0^{(\mathcal{F}_* - (\mathcal{F}_{*kr})_s)}$$

$$[\mathcal{F}_* - (\mathcal{F}_{*kr})_i]^{1/2} [(\mathcal{F}_{*kr})_i - (\mathcal{F}_{*kr})_s]^{m-1}$$

$$d [(\mathcal{F}_{*kr})_i - (\mathcal{F}_{*kr})_s]$$

Substituant la valeur \mathcal{G}_0 et les expressions :

$$(\mathcal{F}_{*kr})_i - (\mathcal{F}_{*kr})_s = x_i; \mathcal{F}_* - (\mathcal{F}_{*kr})_s = x; \delta = z_0 k_s$$

nous obtenons :

$$q = B_2 m (\gamma^m/\gamma_s^{m-1}) g^{1/2} k_s^{3/2} \int_0^x (x - x_i)^{1/2} x_i^{m-1} dx_i \tag{25}$$

avec :

$$B_2 = (B_1/B_0) \alpha_f \alpha_0 \bar{u}$$

On voit, d'après l'expression (25), que l'intégration donne :

$$\dots\dots x^{m+(1/2)}$$

comme « terme maximum », ce qui signifie donc

$$\mathfrak{F}_*^{m+(1/2)}$$

Compte tenu de la fonction quadratique :

$$\mathfrak{F}_* = u_*^2 / gk_s,$$

nous pouvons conclure que la valeur de q exprimée par u_* contiendra le « terme maximum » :

$$\dots\dots (u_*^2)^{m+(1/2)} = \dots\dots u_*^{2m+1}$$

On trouve, par comparaison avec les résultats expérimentaux [voir la formule empirique dans le renvoi (**)], que le nombre m doit évidemment avoir une valeur voisine de 1. Si on admet simplement que $m=1$ (c'est-à-dire la croissance linéaire de la masse mobile en fonction de la force d'entraînement), on a pour (25) :

$$q = B_2 \gamma g^{1/2} k_s^{3/2} \int_0^x (x - x_i)^{1/2} dx_i$$

D'où nous obtenons, après intégration :

$$q = B \gamma g^{1/2} k_s^{3/2} x^{3/2} \text{ avec } B = 2/3 B_2$$

Substituant la valeur de x , nous trouvons l'expression requise pour le débit solide :

$$q = B \gamma g^{1/2} k_s^{3/2} [\mathfrak{F}_* - (\mathfrak{F}_{*kr})_s]^{3/2} = B (\gamma/g)$$

$$[u_*^2 - (u_{*kr})_s^2]^{3/2} \quad (26)$$

ou bien :

$$q = B (g/\gamma)^{1/2} (\tau_0 - \tau_{0kr})^{3/2} \quad (27)$$

Si on exprime τ_0 et τ_{0kr} par leurs valeurs respectives (7) et (8), on a :

$$q = B (g/\gamma)^{1/2} [\gamma hi - A \gamma_s d_m]^{3/2} \quad (28)$$

ce qui concorde, aux valeurs numériques des coefficients près, avec la formule de Meyer-Peter pour le débit bidimensionnel :

$$q = 8 (g/\gamma)^{1/2} (\gamma hi - 0,047 \gamma_s d_m)^{3/2}$$

En conclusion, signalons que, en toute rigueur, les valeurs des « constantes » dans la formule suisse, c'est-à-dire : $B=8$ et $A=0,047$, varient plus ou moins en fonction de l'allure des courbes granulométriques (ce qui se comprend d'après la signification donnée à ces grandeurs par la présente étude), de sorte qu'elles différeront des valeurs ci-dessus, qui ont été déterminées exclusivement pour des matériaux de fond ayant des courbes granulométriques conformes au type « a » de la figure 4 (14).

(14) S. MEYER-PETER, MÜLLER : Eine Formel zur Berechnung des Geschiebetriches, *Schweiz. Bauzeitung*, 67, Nr. 3, 1949.

