

Calcul du débit solide et influence de la couche de grande concentration du fond

A solution to the problem of sediment discharge
which takes into consideration the effect
of the high concentration bed layer

PAR LE PROFESSEUR I. EGUIASAROFF

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'ARMÉNIE SOVIÉTIQUE (U.R.S.S.)

Mémoire présenté, au nom de l'auteur, par M. G. Remenieras,
le 21 novembre 1958, au Comité Technique de la Société Hydrotechnique de France

Extension de la formule proposée par l'auteur au Congrès de l'A.I.R.H. en 1957 au cas d'un écoulement non quadratique autour du grain : cette formule entraîne une relation linéaire entre le module de concentration moyenne p''/\sqrt{i} (p'' : concentration en poids des alluvions pesées sous l'eau; i : pente de la ligne d'énergie) et l'excess relatif de puissance tractrice $(N - N_0)/N$ (N = puissance tractrice; N_0 = puissance tractrice correspondant au seuil d'entraînement). Compte rendu des expériences confirmant la formule visée ci-dessus.

An extension of the formula proposed by the author at the 1957 I.A.H.R. Congress to the case of non-quadratic flow around the grain: this formula involves a linear relationship between the mean concentration module p''/\sqrt{i} (where p'' is the weight concentration of solids weighed in water, and « i » is the energy gradient) and the relative excess of tractive power $(N - N_0)/N$ (N = tractive power and N_0 = tractive power when sediment begins to be picked up). An account is given of experiments which check the formula referred to above.

NOTATIONS

- i : pente;
- y : distance du fond au point considéré;
- R : rayon hydraulique;
- ρ : densité du fluide;
- ρ_g : densité du grain;
- γ : poids spécifique du fluide;
- γ_g : poids spécifique du grain;
- ρ' : densité apparente $= (\rho_g - \rho) / \rho = (\gamma_g - \gamma) / \gamma$;
- $f_0 = \tau_0 / (\gamma_g - \gamma) d$: rapport de la force d'entraînement à la force de gravité pour le seuil du mouvement, ou coefficient de résistance d'un lit affouillable;
- \bar{u} : vitesse moyenne du courant;
- u : vitesse locale;
- u_g : vitesse du grain;
- u_{rel} : vitesse relative locale;

$$v_* = \sqrt{g Ri} = \sqrt{\tau/\rho};$$

d : diamètre du grain;

$\tau = \gamma Ri$: tension tangentielle;

g'' : débit solide (en poids sous l'eau);

q' : débit fluide (volume par unité de temps);

$\varphi'' = g''/\gamma q'_p$: concentration moyenne en poids sous l'eau;

p : concentration en volume de la couche du fond;

$\sigma(p)$: vitesse de chute du grain dans le cas général;

σ_∞ : vitesse de libre chute du grain dans un milieu indéfini;

μ : viscosité dynamique;

$\nu = \mu/\rho$: viscosité cinématique;

y_s : hauteur de saltation;

$y_{s.c.}$: hauteur de saltation pour complète turbulence.

— L'indice zéro caractérise les grandeurs relatives au seuil du mouvement initial du grain.

I. — CONDITIONS INITIALES DU MOUVEMENT DES GRAINS : LE SEUIL DU MOUVEMENT

L'auteur a publié précédemment une équation critérielle pour le débit solide [1, 2, 3] :

$$\varphi [(p''/\sqrt{i}), (N - N_0)/N_0] = 0 \quad (1)$$

$p'' = g''/\gamma q'$, concentration moyenne en poids sous l'eau pour l'ensemble de l'écoulement,

p''/\sqrt{i} , peut être appelé module de concentration moyenne, par analogie avec la notion de module de débit (débitance) q/\sqrt{i} introduit par Bakhmeteff pour le mouvement permanent du fluide (on pourrait l'appeler également débitance solide).

$N_{loc.} = \tau_{loc.} u_{rel. loc.}$ = puissance locale du courant ou en d'autres termes, énergie locale rapportée à l'unité de temps et de surface (voir notations en tête du mémoire).

L'indice zéro se rapporte dans tous les cas aux conditions du seuil du mouvement, c'est-à-dire au commencement du mouvement des grains dans la direction du courant liquide.

En saltation, la direction du courant liquide agit sur la trajectoire d'un grain après que celui-ci ait été soulevé. Ces conditions de seuil ne doivent pas être confondues avec celles de l'immobilité absolue des grains. Il ne faut pas considérer le seuil du mouvement initial des grains comme une transition instantanée de l'immobilité au mouvement dans la direction du courant,

comme une transition presque instantanée d'une rugosité immobile à une rugosité mobile.

L'arrangement mutuel des grains, lorsque commence leur mouvement dans la direction du courant liquide, est nettement différent de leur arrangement à l'immobilité absolue, qui précède le mouvement indiqué.

Déjà en 1885, Osborns Reynolds [4] a noté qu'« il existe une particularité remarquable et fondamentale des milieux granuleux que ne possèdent ni les corps fluides, ni les corps solides; j'ai appelé cette particularité unique « dilatation ». Cette particularité est la possibilité de variation du volume de la masse granuleuse et par suite la variation de la forme et de la tension de la déformation; chaque variation est suivie d'un changement de volume et en quelque sorte d'une dilatation ».

Bagnold [10] écrit : « Les conditions pour lesquelles l'influence mutuelle des grains est prépondérante, ont fait l'objet de recherches des rhéologues pour les courants pseudo-visqueux de fluide non Newtoniens, et pour des grains très fins. Le cas, plus simple, de concentration élevée de sphères solides dans des fluides Newtoniens qui se trouvent à la limite de la rhéologie et de l'hydrodynamique, a été négligé. »

Mais, précisément, de telles dilatations, déformations et déplacements du milieu granuleux prennent naissance dans la couche de fond de

grande concentration et précèdent les conditions du mouvement initial des grains, au seuil du mouvement dans la direction du courant; cette dilatation préliminaire facilite la formation des rides.

J'appelle alors « seuil du mouvement », le moment où commence le déplacement des grains dans la direction du courant liquide, et non la période préliminaire entre la complète immobilité et ce mouvement.

Si on désigne par u_0 la vitesse au seuil, c'est-à-dire la vitesse locale du courant liquide quand commence le mouvement des grains dans la direction du courant, la vitesse du même courant pour l'immobilité absolue des grains (u'_0) est alors d'environ 1,5 fois plus petite. Cette différence doit être liée à la différence des vitesses pulsatoires et de la vitesse moyenne d'un écoulement turbulent.

C'est dans l'intervalle de ces vitesses que commencent la palpitation des grains, la dilatation verticale de la couche superficielle des grains et la partie transversale de la trajectoire de saltation des grains.

On obtient le gradient maximum des vitesses du fluide près des parois pour l'immobilité absolue des grains, comme le montrent les figures 2 et 3.

L'étude des recherches de Bagnold [10] et les expériences de Dementiev [5] sur la portance (lift) amènent l'auteur aux conclusions suivantes :

Pour les vitesses inférieures à u'_0 ($u_{0\min}$), les particules situées sous la couche superficielle sont coincées et la portance est voisine de la traînée (drag) totale d'une particule libre.

Alors que pour déterminer le coefficient de traînée (C_x) on a des données expérimentales sur la relation $C_x = \varphi(\mathcal{R}_d)$, et même sur l'influence de la concentration, c'est-à-dire que l'on connaît la relation $C_x = \varphi(\mathcal{R}_d, p)$, l'auteur n'a trouvé que quelques indications sur le coefficient de portance C_y : White [8], Elsamni et Einstein [9], H. Rouse [10] et une discussion dans Leliasvky (1955, Introduction de l'hydraulique fluviale).

Les recherches de Dementiev [5] donnent une analyse de C_y dans le cas d'une distribution des vitesses non uniforme, c'est-à-dire dans le cas des grandes valeurs de du/dy près du fond, ce qui est important ici.

La figure 1 montre l'importance du rapprochement des grains et la très grande variation de C_y en fonction de la distance entre les grains l

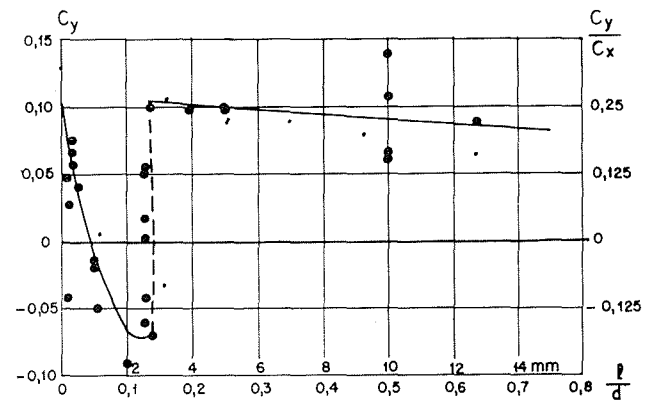


FIG. 1

Variations de C_y en fonction de la distance l entre les grains, d'après les essais de Démentiev de 1935 et 1954.

et entre les grains et le fond au voisinage de $l=0$.

C'est ainsi que pour les grains coincés (cf. fig. 1), la portance est assez grande et la traînée petite (le maître couple est en effet dans le sillage du grain précédent), ce qui facilite la saltation. Mais quand la dilatation commence, cette portance diminue brusquement et la traînée augmente, puisque pour la traînée la surface d'action sur la particule augmente.

Il n'y a, ainsi, pas de contradiction entre la valeur de la portance pendant la saltation et l'absence pratique de portance lorsque le mouvement des grains commence à s'effectuer avec une vitesse dans la direction du courant, puisque alors il existe déjà une distance entre les grains.

L'impulsion de la portance initiale (quantité de mouvement) qui est de très courte durée, suffit pour provoquer la saltation, ce qui est démontré par les calculs de Gontcharoff [6], de Bagnold [10] sur le déplacement vertical ou la hauteur de saltation des particules.

Par conséquent, dans la couche limite de grande concentration, près du fond, on ne peut étudier l'influence du courant liquide sur les grains sans tenir compte de la réaction des grains sur le courant, c'est-à-dire leur action réciproque.

Jusqu'à présent, et à ma connaissance, on a admis, dans la plupart des recherches sur le transport solide, la même distribution des vitesses du courant $u(y)$ pour des régimes correspondant, soit à un mouvement important des grains, soit au seuil du mouvement avec vitesse dans la direction du fluide, que celle qui correspond à l'immobilité absolue des grains (généralement la loi logarithmique).

II. — DISTRIBUTION DES VITESSES $u(y)$ DANS LE CAS DES GRAINS EN MOUVEMENT

Les expériences classiques de Bagnold [10] sur la distribution des vitesses $u(y)$ du mouvement du sable dans un courant d'air sont bien connues, mais elles ne furent pas généralisées pour le mouvement dans l'eau, car on supposait que les résultats trouvés n'étaient pas applicables pour les liquides, point de vue que partageait également Bagnold du fait de la différence importante entre $\rho' = (\rho_g - \rho) / \rho = (\gamma_g - \gamma) / \gamma$ pour l'air et pour l'eau.

Mais les expériences sur les liquides (eau) ont permis à Bagnold de généraliser les résultats obtenus et de les étendre à tous les fluides et également aux grains légers.

A ma connaissance, ces résultats n'ont pas in-

fluencé jusqu'à présent les travaux des autres chercheurs sur le débit solide.

Sur les figures 2 et 3, on a reporté les résultats de Bagnold donnant la distribution des vitesses $u(y)$ dans le cas de grains légers dans un écoulement liquide.

La légèreté des grains ($\rho' = 0,003$) permet des mesures plus précises et met nettement en évidence la différence des courbes $u(y)$ pour les grains immobiles et les grains de mouvement.

Le mouvement des grains provoque une diminution de vitesse sur toute la profondeur de l'écoulement et surtout au voisinage du fond et dans la zone de saltation.

Il faut noter également la diminution de la

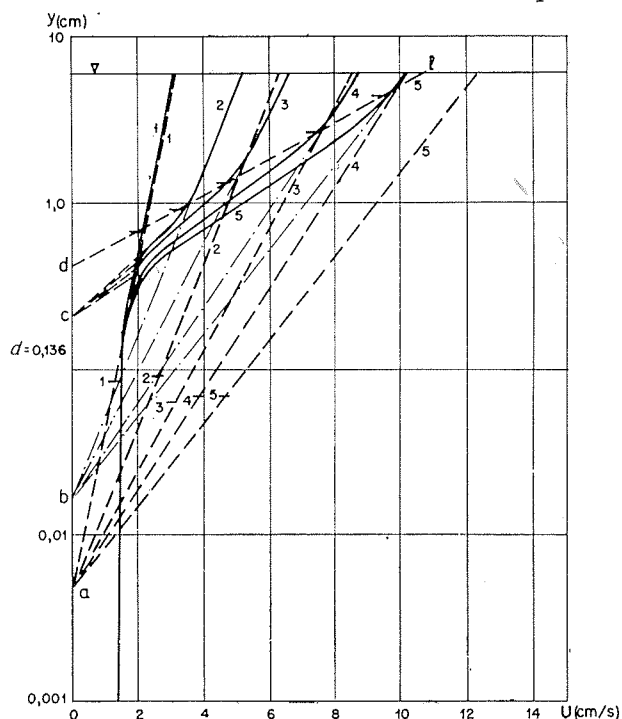


FIG. 2

Distribution des vitesses $u(y)$ pour les grains immobiles (droites pointillées) et les grains en mouvement (courbes pleines), en coordonnées semi-logarithmiques.

Les petits traits horizontaux indiquent la hauteur maximum de saltation.

- 1 — pour $v_{0*} = 18$ cm/s
- 2 — pour $v_* = 35$ cm/s
- 3 — pour $v_* = 49$ cm/s
- 4 — pour $v_* = 57$ cm/s
- 5 — pour $v_* = 69$ cm/s

(expériences de Bagnold).

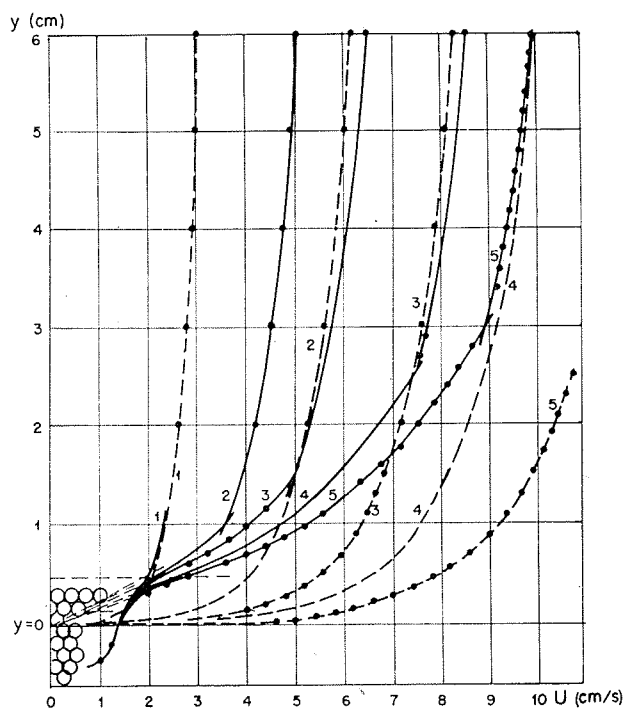


FIG. 3

Même figure que fig. 2, en coordonnées ordinaires

vitesse au-dessus de la zone limite de saltation des grains, mais la courbe de vitesse $u(y)$ demeure semblable à celle correspondant à l'immobilité des grains (les droites sont parallèles dans la représentation semi-logarithmique de $u(y)$, figure 2).

Il est important de constater que les courbes $u(y)$ pour toutes les valeurs $v_* = \sqrt{\tau/q} = \sqrt{g Ri}$ (ou pour différentes valeurs de $n = v_*/v_{0*}$) se rassemblent en un point formant foyer où $u = C^{1/n} > 0$.

Cette constance de la vitesse au foyer et dans la couche du fond située au-dessous du foyer est d'une grande importance puisqu'elle n'est possible que si la concentration de la couche du fond est indépendante du rapport n , c'est-à-dire de la valeur de v_* ou de $u \sim v_*$, c'est-à-dire de la vitesse du noyau d'écoulement liquide (vitesse moyenne \bar{u}); j'appelle « noyau » toute la section du courant en dehors de la couche de fond.

H. Einstein [11] a émis la possibilité d'une telle hypothèse. En 1950, il écrivait : « It is probably not much in error to assume that the concentration in the entire bed layer is constant. »

On peut dire également des expériences de Bagnold qu'une concentration différente de la concentration des grains immobiles se forme dès que le seuil du mouvement initial des grains

dans la direction du courant est atteint, ce qui correspond à : $n = v_*/v_{0*} = 1$.

Pour les grains de poids spécifique courant ($\rho' = 1,7$), l'image précédente de la distribution des vitesses $u(y)$ est beaucoup moins marquée, en particulier dans la partie supérieure du courant.

Le plafond de la suspension et de la saltation est beaucoup plus bas, et la zone de grande concentration se rapporte à la couche du fond, qui a au plus l'épaisseur de quelques diamètres et même quelques fractions du diamètre du grain. Mais ce qui vient d'être énoncé plus haut reste entièrement valable dans cette couche située tout au voisinage du fond et doit donc être pris en considération; c'est ce que je veux tenter de faire.

III. — VITESSE RELATIVE LOCALE DU FLUIDE ET TENSION TANGENTIELLE POUR LES CONDITIONS DU SEUIL

L'équation critérielle du transport solide (1) et les équations :

$$N = \tau \cdot u_{rel.} \quad \text{et} \quad N_0 = \tau_0 \cdot u_{0rel.}$$

où $u_{rel.}$ est la vitesse locale du fluide relative au grain, nécessite le calcul de $u_{0rel.}$ et de τ_0 pour le seuil du mouvement, c'est-à-dire lorsque $u_g = 0$ (u_g vitesse du grain), en fonction des valeurs de $i, d, R, \gamma_g, \gamma$ et par suite de $\tau = \gamma Ri$.

Dans ces conditions, $u_{0rel.} = u_{0loc.} - u_g = u_{0loc.}$

Dans les publications précédentes [1-3], la valeur de u_0 était calculée au moyen de l'équation $u(y)$ de Prandtl-Karman, et pour la valeur

$v_{0*} = \sqrt{g R_0 i}$, en retenant pour R_0 une valeur qui satisfasse simultanément aux équations $\tau_0 = \gamma R_0 i$ et $\tau_0 = f_0 (\gamma_g - \gamma) d$; f_0 est le coefficient de résistance du lit affouillable introduit par Shields [19] pour les conditions du seuil du mouvement.

Les résultats de ces calculs ont montré cette propriété remarquable que, pour des sphères $u_{loc.}$ est égal à σ_∞ si $f'_0 = 1,0$, c'est-à-dire à la vitesse de chute du grain dans un milieu indéfini.

La figure 4 représente la courbe expérimentale de $\sigma_\infty = \varphi(d)$ avec les points calculés pour $u_{0loc.}$ dans le cas de sphères.

Cette propriété rend possible l'utilisation pour le calcul de $u_{0loc.}$ au lieu de la méthode précédemment décrite, des relations expérimentales

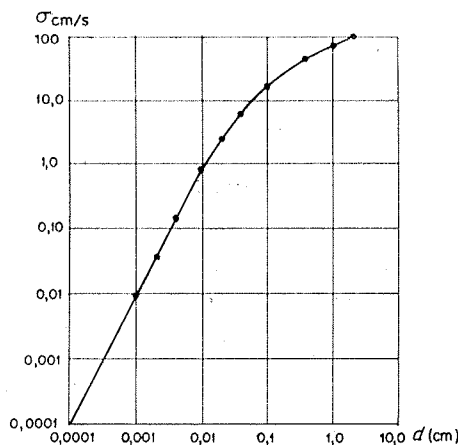


FIG. 4

Comparaison de $\sigma_\infty = \varphi(d)$ pour les sphères (courbe), avec $u_{0d/2}$ (points).

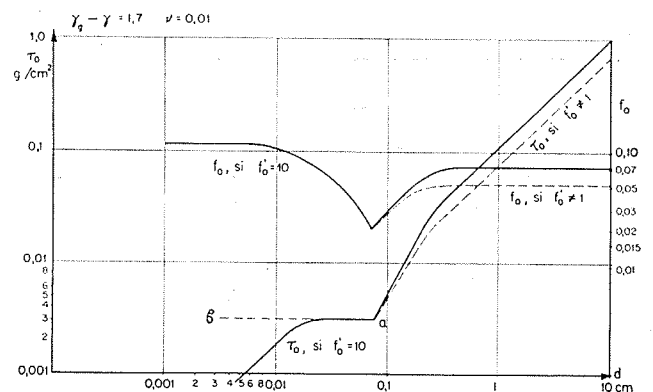


FIG. 5

Relations $f_0 = \varphi(d)$ et $\tau_0 = \varphi(d)$.

bien connues de $\sigma_\infty = \varphi(d)$ et de $\sigma_\infty = \varphi(\mathcal{R}_d)$ pour les sphères.

Ceci rend également possible le calcul de u_{0loc} pour des particules de forme quelconque, à condition que pour cette forme $\sigma_\infty = \varphi(d)$ soit connue.

Cette relation $\sigma_\infty = u_{0loc}$ permet de calculer $f_0 = [\tau_0 / (\gamma_g - \gamma) d]$ et $f_0 = \varphi(\mathcal{R}_{0*d})$ d'une nouvelle

manière. Ces nouveaux calculs ont donné la même relation pour $f_0 = \varphi(\mathcal{R}_{0*d})$ que celle déjà publiée (fig. 5).

La tension tangentielle, pour le seuil du mouvement, $\tau_0 = \gamma R_0 i = f_0 (\gamma_g - \gamma) d$, a été calculée pour différentes valeurs de d et de \mathcal{R}_{0*d} par la même méthode que le calcul de f_0 . Cette relation est reportée sur la figure 5.

IV. — VITESSE RELATIVE DU FLUIDE POUR LES GRAINS EN MOUVEMENT

Pour les grains en mouvement :

$$n = v_* / v_{0*} > 1, u_g > 0 \text{ et } u_{rel.} = u_{loc.} - u_g < u_{loc.}$$

La valeur de $u_{rel.}$ ne peut être déterminée par l'équation $u(y)$, même si celle-ci correspond à des grains en mouvement puisque u_g n'est pas connue.

Pour résoudre ce problème, l'auteur se propose de prendre comme base de départ les considérations quasi-rhéologiques mentionnées plus haut, en remarquant que les phénomènes qui se produisent dans la couche de fond de grande concentration sont de même nature physique que la filtration du fluide dans la couche en dilatation, et de même nature que la suspension des grains dans un courant ascendant du fluide, ce que montrent nettement les expériences de Bagnold.

On a déjà admis une extension semblable aux courants de filtration et de suspension [9, 20] et il a été démontré que :

$$u_{filt.} = u_{susp.} = u_{rel.} = \sigma.$$

Il est très important de remarquer que ces vitesses sont égales à $\sigma(p)$, vitesse de chute du grain gêné par des particules voisines et qui dépend du coefficient de porosité $m = 1 - p$ du milieu granuleux; p est ici la concentration en volume de la couche du fond et $\sigma(p)$ la vitesse de chute gênée, fonction de la concentration.

Jusqu'à présent, on n'avait pas osé généraliser les données de la théorie et de l'expérience concernant la suspension des grains dans un courant ascendant, à un courant horizontal ou en pente, puisqu'on admettait que la dilatation du milieu granuleux de la couche du fond n'était pas non plus uniforme et de plus inconnue.

Dès l'instant où les expériences de Bagnold ont montré la constance de la vitesse dans la couche du fond, la constance de la dilatation et de la concentration dans cette couche est démontrée.

Dans ces conditions, il n'y a pas de différence entre les deux phénomènes physiques, le phéno-

mène de dilatation dans un courant ascendant et le mouvement du milieu granuleux dû à un écoulement en pente.

En donnant à cette généralisation un nouveau développement et en l'appliquant à tous les courants fluides transportant des particules solides concentrées, on obtient ainsi un moyen adéquat pour exprimer $u_{rel.}$, car $u_{rel.} = \sigma(p)$ et par suite on peut déterminer également la vitesse des particules solides $u_g = u - u_{rel.}$.

Notons que la relation $u_{0rel.} = \sigma_\infty$ est un des cas particuliers de la relation générale, pour $m = 1$ et $p = 0$.

Par suite, pour déterminer $u_{rel.}$ il faut avoir la possibilité de mesurer la vitesse de chute pour des concentrations de $p = 0$ jusqu'à $p = p_{max} = 0,65$ pour des grains arrondis.

Une telle relation $\sigma(p)$, ou ce qui revient au même $C_w = \varphi(\mathcal{R}_d, p)$ est obtenue expérimentalement par les nombreuses recherches sur la suspension dans un courant ascendant du fluide traversant un milieu granuleux dans le cas où les parois sont assez éloignées [14, 21].

A ma connaissance, on n'avait pas jusqu'à présent utilisé ces recherches dans l'étude et le calcul du débit solide.

La relation $C_w = (\mathcal{R}_d, p)$ qui nous intéresse diffère légèrement suivant les différents auteurs. En comparant les données de Minz [13] avec celles de Richardson et Zaki [14], l'abaque présenté par Bagnold (1956) dans sa dernière publication, avec les données de Cohen de Lara [15], de Gasparian [16] et de Smirnov [17], en tenant compte de la comparaison faite par Cohen de Lara avec les relations de Kozeny [18], de Terzaghi [19] et de Craya [20], on peut noter que toutes les relations $C_w = \varphi(\mathcal{R}_d, p)$ donnent la même diminution notable du rapport $C_w / C_w(p)$ lorsqu'augmente la concentration p .

Les courbes de Minz pour $\mathcal{R} > 400$, aux environs donc de la turbulence complète, se confondent pratiquement avec celles de Cohen de Lara et par suite avec celles de Kozeny, Terzaghi et

Craya, Richardson et Kaki indiquent des valeurs plus grandes du rapport envisagé, pour $p > 0.15$. Les chiffres de Gasparian et de Smirnov se confondent avec ceux de Cohen de Lara pour $\mathcal{R} > 500$, mais divergent pour $\mathcal{R} < 500$.

On a toutefois une relation approximative pour $C_w = \varphi(\mathcal{R}_d, p)$ et par suite pour $\sigma = \psi(\mathcal{R}_d, p)$.

La relation $C_w(p)/C_w(\infty) = 1/m^5$ est proposée par Cohen de Lara.

Dans nos recherches sur l'équation du débit solide, seul le rapport de $\sigma(p)$ à $\sigma(\infty)$ est important, et non leurs valeurs absolues.

C'est pourquoi on peut, en attendant des recherches nouvelles plus détaillées et plus précises pour $\sigma(\mathcal{R}_d, p)$, utiliser la relation de Cohen de Lara.

V. — CALCUL DES CONCENTRATIONS DE LA COUCHE DU FOND ET DE LA SALTATION

Pour déterminer la vitesse relative $u_{rel.} = \sigma(p)$, il faut donc calculer la concentration volumétrique p de la couche de fond.

Les conditions de ce calcul sont facilitées par la constance de la vitesse locale au foyer des courbes de vitesse $u(y)$ pour toutes les valeurs de n , et par suite, par la constance de la concentration p au foyer et dans la couche de saltation du fond.

Les limites de variation de p sont faciles à déterminer. La concentration maxima des grains immobiles pour des sphères est égale à 0,73 et pour des grains arrondis à 0,65 (Bagnold). La concentration minimum est $p=0$, pour laquelle la vitesse de chute libre des grains est $\sigma = \sigma_\infty$. La valeur de C_w pour la turbulence complète est de 0,4 pour des sphères et de 0,8 pour les grains arrondis (Haywood, Bagnold, Richardson et Zaki).

Toutes les recherches mentionnées plus haut montrent que la hauteur de saltation et la hauteur de la trajectoire d'un grain sont d'autant plus grandes que d est plus grand; elles varient donc suivant les zones de la traînée : laminaire, turbulente lisse, turbulente rugueuse transitoire, turbulente quadratique.

Gontscharoff [6] a démontré la relation qui lie la hauteur y_s de saltation et le diamètre des particules pour la zone de complète turbulence :

$$\frac{y_s}{d} = 1,43 \frac{\rho_g}{\rho} \log \left[\frac{1,22}{\rho_g/\rho} (n^2 - 1) + 1 \right]$$

En généralisant cette solution pour toutes les valeurs de la traînée et de la portance, c'est-à-dire pour la turbulence incomplète, l'auteur a obtenu une équation, où entrent les coefficients C_w et C_y (voir ci-dessus) :

$$\frac{y_s}{d} = C^{te} \frac{\rho_g}{\rho C_w} \log \left[C^{te} \frac{C_y}{\rho_g/\rho} [2n^2 - 1] + 1 \right]$$

Pour $\rho_g/\rho = 2,7$, lorsque les particules sont coincées et que l'on a alors $C_y = C_w$, on obtient :

$$\frac{y_s}{d} = \frac{C^{te}}{C_w} \cdot \log [C^{te} \cdot C_w (2n^2 - 1) + 1]$$

Bagnold [10] propose :

$$\frac{y_s}{d} = 0,9 \frac{\rho_g}{\rho C_w}$$

qu'il a appelé « pénétration » qui est une expression plus approximative.

Il faut souligner qu'il n'est pas encore possible d'obtenir une équation précise pour y_s , mais pour le but que nous nous sommes imposé de calculer p dans la limite déjà fixée de $p_{min}=0$ et p_{max} , on peut se contenter d'une expression approximative.

En rendant y_s/d égal à l'unité pour $C_y = C_w = 0,8$, c'est-à-dire pour la porosité $m=1$ ($p=0$), on peut en déduire les valeurs relatives de y_s/d pour les autres valeurs de C_w . On peut donc écrire :

$$p = 1 - m = [1 - (y/y_{s,c})] \cdot p_{max}$$

VI. — ÉQUATION TRANSFORMÉE DU DÉBIT SOLIDE ET COMPARAISON AVEC LES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Nous avons donc obtenu, d'après l'analyse précédente, le critère du débit solide ou module de concentration moyenne :

$$p''/\sqrt{i} = idem \quad (2)$$

et le critère de charriage maintenant transformé :

$$\frac{N}{N_0} = \frac{\tau u_{rel.}}{\tau_0 \cdot u_{0,rel.}} = \frac{\tau \sigma(p)}{\tau_0 \sigma_\infty} = idem \quad (3)$$

et par suite une nouvelle forme de l'équation critique :

$$\frac{p''}{\sqrt{i}} = \varphi \left[\frac{\tau \cdot \sigma(p)}{\tau_0 \cdot \sigma_\infty} - 1 \right] \quad (4)$$

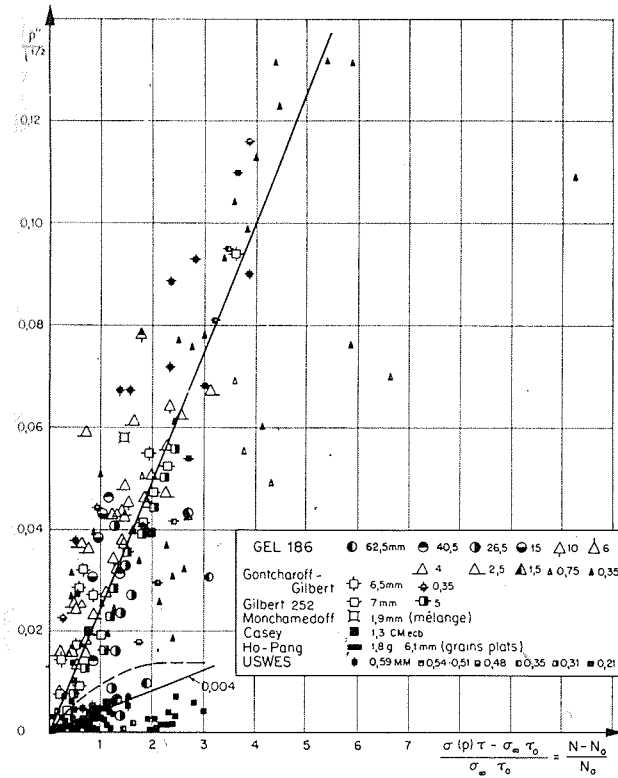


FIG. 6

La nouvelle relation générale $p''/\sqrt{i} = \varphi [(N - N_0)/N_0]$ pour :

$$N = \sigma(p) \cdot \tau \quad \text{et} \quad N_0 = \sigma_\infty \cdot \tau_0$$

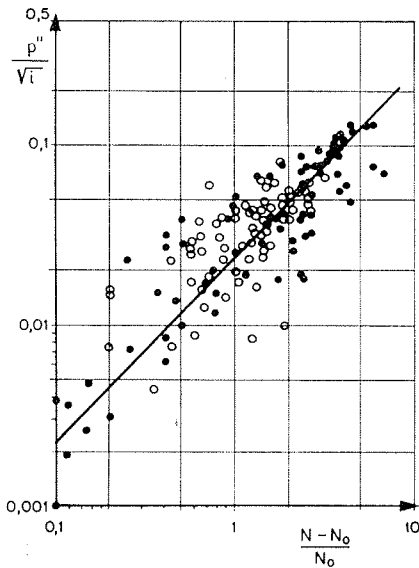


FIG. 6 a

Relation générale de la figure 6 représentée en coordonnées logarithmiques.

dans laquelle entrent maintenant les vitesses de chute.

Les points expérimentaux dans ce système de coordonnées permettent de déterminer la fonction φ .

La figure 6 obtenue à la suite de cette nouvelle méthode met en évidence une relation linéaire déjà obtenue lors de recherches antérieures, pour lesquelles les valeurs de N et N_0 étaient déterminées différemment.

La dispersion des points de la figure 6 est assez grande, mais le grand nombre de points (près de 260) correspondant aux données de différents chercheurs de différents pays et l'absence d'écart systématique pour différentes valeurs permet d'accepter cette relation linéaire.

La gamme des données considérées pour le diamètre de grains est de 300 ($d=0,2$ mm à $d=62,5$ mm), et la valeur maxima de $n=v_*/v_{0*}$ est de 3,5.

Mais cette dispersion des points exige une analyse supplémentaire.

La plus grande dispersion des points correspond naturellement à ceux qui sont situés en bas de la figure 6, c'est-à-dire aux petites valeurs de $(N - N_0)/N_0$ et de p''/\sqrt{i} , donc de n .

Dans cette zone, c'est la forme des grains qui a une grande influence. Les essais de Ho Pang Young [21] ont été effectués d'une façon assez détaillée avec des particules très plates (points rectangulaires allongés sur la figure 6); ces points donnent une relation correspondant à un coefficient angulaire de 0,004, alors que la plupart des points donnent près de 0,025.

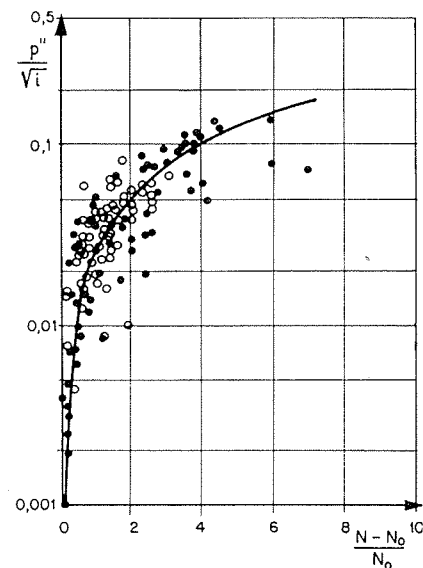


FIG. 6 b

Relation générale de la figure 6 représentée en coordonnées semi-logarithmiques.

Les points correspondant aux essais du Laboratoire U.S.W.E.S. [22] (U.S.A) pour $d=0,35$ et $0,59$ mm sont également en bas et à droite de la figure 6, ce qui s'explique également par la forme des grains, mais les données sur leurs formes ne sont pas assez détaillées. Malgré cela, les points obtenus pour $d=0,35$ mm par Gontscharoff et au Laboratoire d'Hydraulique G.E.L. (petits triangles noirs et petits carrés à quatre queues) se placent avec la majorité des points correspondant à la zone de traînée transitoire (petits points) et à la zone de turbulence complète (gros points) même légèrement vers la gauche.

Les points correspondant aux plus petits diamètres ($d=0,2$ mm) étudiés par le Laboratoire U.S.W.E.S. pour des valeurs de n allant jusqu'à 3 (petits points carrés noirs) se rassemblent près de la droite de coefficient angulaire $0,025$, comme la majorité des points, ce qui démontre la singularité des points du Laboratoire U.S.W.E.S. pour $d=0,35$ et $0,59$ mm.

Ainsi la conclusion donnée dans les publications antérieures reste valable, et peut être ainsi formulée : « Dans le cas général, le module de concentration moyenne p''/\sqrt{i} est proportionnel à l'excès relatif de l'énergie du courant

$$(N - N''_0)/N_0.$$

Dans le cas particulier de la turbulence complète, ce même module est proportionnel à l'excès relatif de la tension tangentielle $(\tau - \tau_0)/\tau_0$; dans ce cas, l'équation (4) se transforme en :

$$\frac{p''}{\sqrt{i}} = K \frac{\tau - \tau_0}{\tau_0} = K (1/f_0) \frac{Ri}{\varphi'd} \left(1 - f_0 \frac{\varphi'd}{Ri} \right) \quad (5)$$

publiée en 1949.

Pour le calcul du débit solide dans le cas général, l'équation 4 prend la forme :

$$\frac{p''}{\sqrt{i}} = K \frac{\tau \sigma(p) - \tau_0 \sigma_\infty}{\tau_0 \sigma_\infty} = K \frac{\sigma(p)}{\sigma_\infty f_0} \frac{Ri}{\varphi'd} \left[1 - \frac{\sigma_\infty f_0}{\sigma(p)} \frac{\varphi'd}{Ri} \right] \quad (6)$$

Il est intéressant de comparer la position des points expérimentaux de la figure 7 avec ceux de la figure 6 quand sur l'axe des abscisses se trouve $(\tau - \tau_0)/\tau_0$ et non $(N - N_0)/N_0$.

On voit que, dans ce cas, les points qui correspondent à des grains dont la traînée est incomplètement turbulente (petits points) sont dispersés sur toute la surface de la figure 7, tandis que sur la figure 6, ces points se rassemblent et donnent une relation unique entre les deux critères.

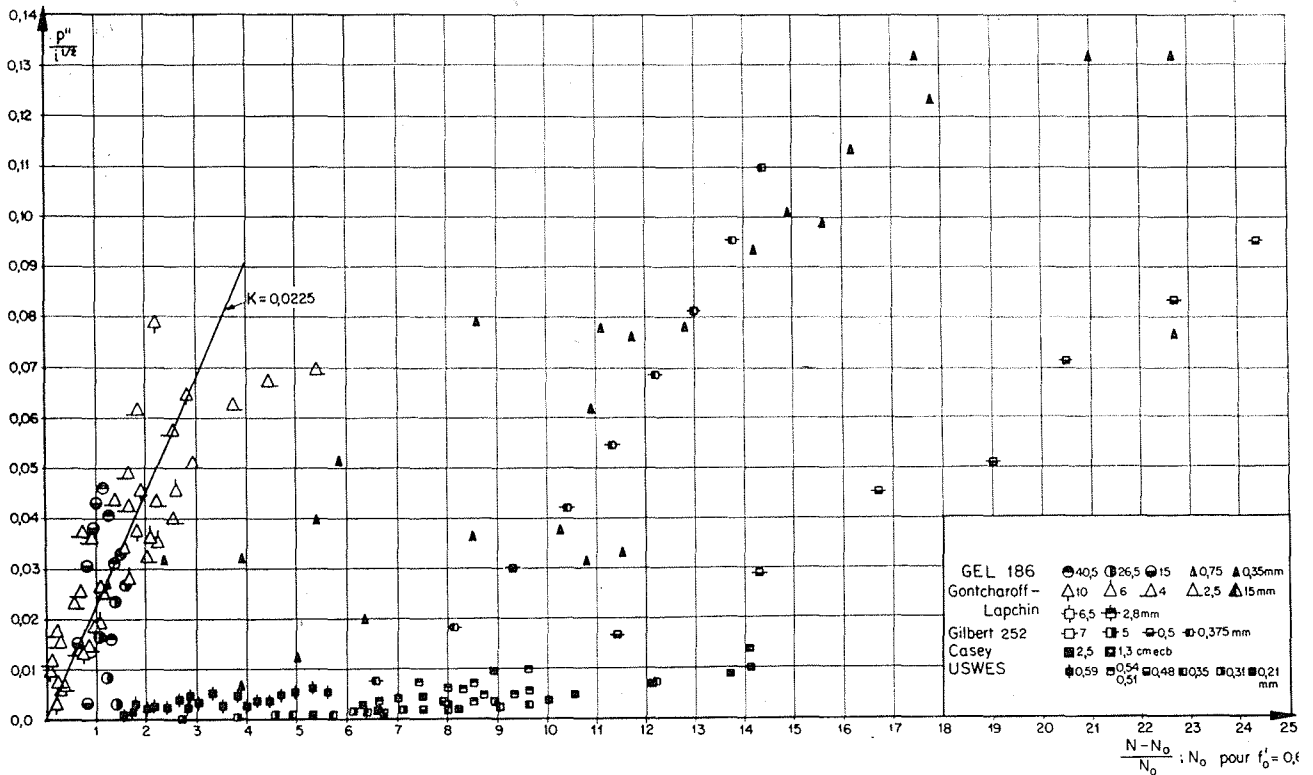


FIG. 7

La relation $p''/\sqrt{i} = \varphi [(\tau - \tau_0)/\tau_0]$.

Pour les points des figures 6 et 7, la traînée est en turbulence complète. Pour les points de petite dimension, la turbulence est incomplète.

VII. — QUELQUES CONSIDÉRATIONS SUR L'ÉQUATION CRITÉRIELLE DU DÉBIT SOLIDE ET LA SIMILITUDE

Les deux complexes non dimensionnels (2) et (3) qui nous ont permis de représenter le phénomène du transport des matériaux solides dans un simple système de coordonnées cartésiennes peuvent être représentés de la manière suivante :

$$\frac{p''}{\sqrt{t}} = \varphi(p'', i) = \varphi(p'', \mathcal{F}_{*R}) \quad (7)$$

$$\frac{N}{N_0} = \frac{\tau \cdot \sigma(p)}{\tau_0 \cdot \sigma_\infty} = \frac{\sigma(p)}{\sigma_\infty f_0} \frac{Ri}{\varphi' d} = \frac{\varphi(\mathcal{R}_d, p)}{\varphi(\mathcal{R}_{0*d})} \cdot \frac{\mathcal{F}_{*d}^2}{\varphi'} \quad (8)$$

où :

$$\mathcal{F}_{*d}^2 = \frac{v_*^2}{gd} = \mathcal{F}_{*R}^2 \cdot R/d$$

et :

$$\mathcal{R}_{0*d} = \frac{v_{0*d}}{v}, \quad \mathcal{R}_d = \frac{ud}{v}$$

c'est-à-dire que l'équation critérielle (4) peut s'écrire sous la forme habituelle des critères de similitude :

$$\varphi(p'', \mathcal{F}_{*R}, \mathcal{F}_{*d}, \varphi', \mathcal{R}_d, p, \mathcal{R}_{0*d}) = 0 \quad (9)$$

où p'' est la concentration moyenne en poids sous l'eau et p la concentration en volume de la couche de fond.

Cette équation présente sept critères de similitude, les sept π non dimensionnels du théorème de Buckingham.

Pour le phénomène de transport des matériaux solides, le nombre de variables dimensionnelles indépendantes est de 3, et le nombre de variables physiques dimensionnelles déterminant le problème doit être de $7+3=10$.

Ces variables sont :

$$\varphi(g'', q', \gamma_g, \gamma_s, v_*, v_{0*}, \sigma, d, R) = 0 \quad (10)$$

le coefficient de forme des grains entre dans $\sigma(p)$.

Il n'y a pas à notre connaissance d'autres facteurs ayant une influence importante sur le phénomène envisagé.

Le fait que les deux complexes non dimensionnels qui ont été présentés sont des critères de similitude donne l'assurance d'une extrapolation possible des résultats déterminés au Laboratoire sur le débit solide au prototype, c'est-à-dire à la nature dans les conditions des cours d'eau en mouvement uniforme et rectiligne.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) EGUIASAROFF (I. V.). — *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de l'Arménie Soviétique*, 1949, n° 5.
— *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S.*, Section technique, 1956, n° 2.
— *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S.*, Section technique, 1956, v. 107, n° 4.
- (2) EGUIASAROFF (I. V.). — *Comptes rendus du 3^e Congrès Hydrologique*, U.R.S.S., 1957, Leningrad.
- (3) EGUIASAROFF (I. V.). — *Comptes rendus du 7^e Congrès de l'A.I.R.H.*, 1957, Lisbonne, D 43-1.
- (4) REYNOLDS (O.). — *Philos. Mag.*, 1885, Works vol. II, p. 203.
- (5) DEMENTIEF. — *Comptes rendus de l'Institut Hydro-technique*, Leningrad, 1935, v. 15.
- (6) GONTSCHAROFF (V. N.). — « La dynamique des courants et du lit. » Chapitre XIV. Les calculs de la saltation, Leningrad, *Guidrotmeteor. Izdat.*, 1954.
- (7) WHITE. — *Proc. Royal Soc.*, London, 1940, v. 174.
- (8) EL SAMNI ET EINSTEIN (H.). — *Review of Modern Physics*, 1949, v. 21, p. 520.
- (9) ROUSE (H.). — « Elementary Mechanics of Fluids », New York, Wiley, 1946.
— « Engineering Hydraulics », New York, Wiley, 1950.
- (10) BAGNOLD. — « The Physics of Blown Sand and Desert Dunes », London, Methuen, 1954.
— *Proc. Royal Soc.*, London, 1954, v. 225.
— *Journ. Appl. Physics*, 1951, n° 2.
— *Geogr. Journ.*, 1935, n° 3.
— *Geogr. Journ.*, 1957, n° 5.
— *Proc. Royal Soc.*, London, 1936, v. 157.
- *Proc. Royal Soc.*, London, 1938, v. 167.
- *Proc. Inst. Civ. Eng.*, London, 1955, p. 111, April.
- (11) EINSTEIN (H.). — *U.S. Dep. of Agriculture, Technical Bulletin* n° 1026, 1950.
- (12) SCHIELDS. — *Mitteilungen der Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau*, Berlin, 1936, Heft 26.
- (13) MINZ et SCHUBERT. — « Hydraulics of Granular Media », Moscou, 1955.
- (14) RICHARDSON et ZANI. — *Tr. Inst. Chem. Eng.*, London, 1954, n° 2.
- (15) COHEN DE LARA (G.). — *La Houille Blanche*, 1955, n° 2.
- (16) GASPARIAN. — *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de l'Arménie Soviétique*, 1956, v. 22, n° 1.
— *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de l'Arménie Soviétique*, 1957, v. 25, n° 4.
- (17) SMIRNOV. — *Zurnal Prikladnaya Khimii*, 1956, v. 29, n° 8.
- (18) KOZENY. — *Wasserkraft und Wasserwirtschaft*, 1927, p. 67.
- (19) TERZAGHI. — *American Institute of Mining and Metallurgical Engineers, Techn. publ.* n° 215.
— *Engineering News-Record*, 1925, p. 382.
- (20) CRAYA (Tsakonias et Skalan). — *Columbia University, Techn. Rep.* 1953, n° 2.
- (21) HO PANG JUNG. — *Mitteilungen der Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau*, Berlin, 1939, Heft 37.
- (22) WATERWAYS EXPERIMENT STATION. — « Studies of River Bed Materials and their Movement, with Special Reference to the Lower Mississippi River », Vicksburg, January 1935, Paper 17.