Hydraulique des plaques tournantes

The hydraulics of rotating plates

PAR F. BIESEL

INGÉNIEUR A LA SOGREAH

Principaux caractères des forces de Coriolis et de leur effet dans le domaine de l'hydrodynamique. Règles de similitude, leur énoncé et leur justification par analogie. Importance des forces de Coriolis en général pour les études de marée. Comparaison de leur ordre de grandeur avec celui des autres forces en jeu, frottement, inertie, etc. Justification théorique de l'emploi de modèles fixes dans certaines conditions. Utilisation du schéma des ondes de Kelvin et du théorème de Bjerknes sur la circulation. Exemples d'application au cas de la Manche. Problèmes des conditions aux limites et technique des modèles « gigognes ».
Pour conclure, l'ingénieur n'est nullement désarmé devant ce genre de problème et possède des moyens d'analyse suffisamment sûrs pour définir les voies expérimentales à suivre.

The main features of Coriolis forces and their effect in the field of hydrodynamics. The statement and justification of the similarity laws by analogy. The importance of Coriolis forces in general in the study of tides. Comparison of their order of magnitude with that of other forces involved such as friction, inertia, etc. Theoretical justification of the use of stationary models under certain conditions. The use of Kelvin waves and the Bjerknes circulation theorem. Applications to the English Channel. Boundary condition problems and the method of "nesting" models.
In conclusion it is seen that engineers are in no way dismayed by this type of problem and that sufficiently reliable methods of analysis are available to define experimental paths to follow.

Il y a quelques années, un correspondant de l'éminent professeur Cyprien Leborgne démontrait péremptoirement que les eaux du Nil devaient couler du nord au sud et non du sud au nord comme le croyait jusqu'ici la majorité des géographes. Il prouvait, chiffres en main, que la pente du fleuve était insuffisante pour s'opposer à l'effet de la force centrifuge due à la rotation de la Terre... Cet estimable correspondant oubliait tout simplement que la pente du Nil est mesurée par rapport à la pesanteur, c'est-à-dire compte tenu de l'influence de la force centrifuge. Autrement dit, cette pente s'ajoute à celle strictement nécessaire pour équilibrer l'effet de cette force.

L'intérêt de cette histoire est qu'elle montre que l'on peut négliger la force centrifuge à condition de définir convenablement ce qu'on appelle « plan horizontal ». Cette définition est d'ailleurs des plus naturelles, puisque ledit plan horizontal local n'est autre que celui de la surface d'un liquide au repos.

Il importe cependant de remarquer que si cette simplification est possible, c'est parce que la force centrifuge, tout comme l'attraction de la Terre, dépend d'un potentiel. Ce potentiel s'ajoute purement et simplement à celui de la pesanteur, ce qui a pour effet de déformer légèrement les surfaces équipotentielles. De toute façon, ces surfaces ne seraient ni des sphères, ni même des ellipsoïdes parfaits; par conséquent, une petite déformation de plus ou de moins ne change rien à l'affaire et, pour tout ce qui concerne les problèmes pratiques, on peut oublier que la force centrifuge due à la rotation terrestre ait jamais existé. Nous dirons même plus : il ne faut pas oublier de l'oublier, comme le prouve la petite histoire du Nil que nous racontions ci-dessus.

Les traités de Mécanique rationnelle nous enseignent que, dans un système tournant d'un mouvement uniforme, les points matériels sont soumis non seulement à la force centrifuge, mais également à la force de Coriolis. Cette dernière peut sembler plus mystérieuse, car elle est, en quelque sorte, beaucoup moins quotidienne que la force centrifuge, dont nous ressentons les effets tous les jours en prenant un tournant un peu raide dans un véhicule quelconque. Ceci peut faire naître l'impression que les forces de Coriolis ont peu d'importance pratique et sont en général assez faibles. Mais c'est là une erreur due sans doute à ce que, si l'on excepte les propriétaires de manèges de chevaux de bois, l'homme d'aujourd'hui n'a que rarement l'occasion d'évoluer sur une plaque tournante.

Il est toutefois vrai que, pour les objets se déplaçant à des vitesses de l'ordre de quelques mètres par seconde, les forces de Coriolis dues à la rotation de la Terre sont très faibles, même par rapport à la force centrifuge. Cependant, tandis que cette dernière se laisse oublier avec une facilité presque déconcertante, il n'en est pas de même de la force de Coriolis, car celle-ci présente une particularité assez exceptionnelle. Cette particularité est de ne pas dépendre d'un potentiel et ainsi d'engendrer des mouvements dont une des caractéristiques marquantes sera la nature « rotationnelle ». Pour s'en convaincre, il suffit d'évoquer le rôle essentiel joué par les forces de Coriolis dans l'organisation de la circulation des grands courants marins ainsi que dans la formation des cyclones atmosphériques.

Il n'est pas impossible que le premier de ces phénomènes soit un jour étudié schématiquement sur la plaque tournante qui se construit actuellement à Grenoble, mais notre propos est plus spécialement d'étudier la reproduction du phénomène de la marée; nous limiterons donc notre exposé dans ce sens.

Nous commencerons par rappeler extrêmement brièvement l'expression théorique de la force de Coriolis dans un système animé d'un mouvement de rotation uniforme. L'accélération de Coriolis a pour expression :

$$\gamma_c = 2\,\overline{\varpi} \wedge \overline{V}$$

V étant le vecteur vitesse du point matériel considéré;

ω étant le vecteur rotation du système, c'est-à-dire un vecteur dirigé suivant l'axe de rotation, dont la longueur est égale à cette vitesse mesurée en radians par unité de temps, et dont le sens est donné par une convention appropriée;

et $\wedge$ indiquant le produit vectoriel.

La force de Coriolis, qui s'apparente à une force d'inertie, est égale à l'accélération multipliée par la masse et changée de signe, soit :

$$F_c = -\,2\,m\,\overline{\varpi} \wedge \overline{V} \qquad (1)$$

Nous ne chercherons pas, bien sûr, à démontrer ces formules qui sont très classiques, mais nous ferons à leur sujet quelques commentaires utiles pour la suite de notre exposé. Remarquons, tout d'abord, qu'il s'agit d'un champ de force assez particulier, du fait que les forces s'exerçant sur un point ne dépendent pas seulement de sa position, mais aussi de sa vitesse. Par cet aspect, les forces de Coriolis se rapprochent des forces dues au frottement, mais cependant, elles sont d'une classe très distincte pour une raison essentielle. La formule (1) montre en effet que la force de Coriolis est toujours perpendiculaire à la direction de la vitesse du point matériel sur lequel elle s'exerce. Au contraire, les forces de frottement sont, au moins approximativement, dirigées dans le sens opposé à la vitesse. Il en résulte que le travail exercé par les forces de frottement est toujours négatif, tandis que le travail exercé par les forces de Coriolis est toujours rigoureusement nul. Cette remarque montre, en particulier, qu'on ne peut espérer compenser l'absence de forces de Coriolis par l'addition de frottements convenables. Cette conséquence est regrettable, car il est évidemment beaucoup plus facile de régler la rugosité d'un modèle que d'y reproduire les forces de Coriolis.

Cependant, comme nous l'avons dit plus haut, le caractère le plus important, et, pourrait-on dire, le plus exceptionnel, de ces forces n'est pas celui-là. C'est plutôt que, même lorsque le champ des vitesses dépend d'un potentiel, il n'en est pas de même en général pour le champ des forces de Coriolis. Celles-ci auront donc la propriété d'engendrer des rotationnels ou de les modifier, propriétés qui distingueront nettement leur action de celle des champs de forces conservatifs tels que la pesanteur, la force centrifuge, etc... Nous verrons, par exemple, que les forces de Coriolis ont pour effet d'engendrer des mouvements tournants alternatifs, c'est-à-dire changeant de sens de rotation à chaque demi-marée, phénomène dont on ne peut envisager l'excitation par des champs de forces conservatifs. Remarquons également, en passant, que les champs de forces non conservatifs sont l'exception dans la nature et que, pratiquement, le seul autre exemple important est celui du champ magnétique dont, chose curieuse, l'action sur les particules chargées est donnée par une formule de forme identique à celle de la force de Coriolis.

RÈGLES DE SIMILITUDE

Les lois de la similitude des modèles où la force de Coriolis intervient d'une façon sensible sont connues depuis longtemps et l'on sait qu'il est nécessaire de monter ces modèles sur une plaque tournant à une vitesse convenable. Pour ne pas avoir à écrire toutes les équations de l'hydrodynamique s'appliquant aux modèles en similitude de Froude, nous nous contenterons ici de prendre un exemple très simple emprunté à un autre domaine de la Mécanique.

Chacun connaît l'extraordinaire expérience réalisée par Foucault, qui a suspendu un pendule sous le dôme du Panthéon pour montrer que le plan d'oscillation tournait, et ainsi mettre en évidence une conséquence tangible de la rotation de la Terre. Il est facile de montrer que ce phénomène, en contradiction avec les lois du pendule dans un espace absolu, est dû à l'effet cumulatif des forces de Coriolis agissant au cours de chaque demi-oscillation. Cette expérience perd d'ailleurs tout son mystère si on l'imagine réalisée exactement sur un pôle terrestre : le pôle nord par exemple. La mécanique classique nous apprend que le pendule peut osciller dans un plan immobile par rapport à des axes absolus et par conséquent, il est clair que la Terre tournera par rapport à ce plan, ou, si l'on préfère, que pour un observateur terrestre se référant à des axes terrestres, le plan d'oscillation du pendule semblera tourner.

Supposons maintenant que, renonçant à transporter le Panthéon au pôle nord, on cherche à y réaliser la même expérience en modèle réduit. Un pendule plus court aura une fréquence d'oscillation plus grande, tandis que la vitesse de rotation de son plan par rapport à la Terre sera la même que précédemment. Il n'y aurait donc similitude complète des mouvements que si l'on pouvait accélérer le mouvement de rotation de la Terre dans la proportion où la fréquence des battements du pendule a été accélérée. Bien entendu, ceci ne pourrait être que simulé, en plaçant l'observateur sur une « plaque tournante » (fictive ou non) à laquelle seraient liés les axes de coordonnées utilisés.

Nous retrouvons le même résultat, convenablement transposé, dans le cas des modèles hydrauliques. Si l'on voulait faire un modèle de l'Océan Arctique, par exemple, il serait nécessaire de le faire tourner par rapport à des axes absolus, de façon à ce que son temps de rotation soit réduit, par rapport au temps de rotation de la Terre, dans les proportions de l'échelle des temps du modèle ; par exemple, si une marée semi-diurne dure une minute sur le modèle, la période de rotation devrait être de l'ordre de 2 minutes.

Si l'on étudie les régions géographiques situées sur des latitudes plus basses, le problème se complique un peu. Cependant, il a été établi depuis longtemps que, pratiquement, seules les composantes horizontales des forces interviennent d'une manière sensible dans l'hydraulique des marées. Ceci a pour corollaire, d'ailleurs non évident, que si l'on considère une zone géographique pas trop étendue en latitude, tout se passe, du point de vue de la force de Coriolis, comme si cette zone était située au pôle, mais que la Terre tourne avec une vitesse réduite proportionnellement au sinus de la latitude. Grâce à cette loi, il est facile de calculer la valeur exacte de la vitesse de rotation qu'il est nécessaire de donner aux plaques tournantes supportant les modèles. Remarquons encore que la formule (1) montre que la position de l'axe de rotation n'intervient pas dans l'expression de la force de Coriolis. Celui-ci pourra donc être la verticale d'un point quelconque du modèle, point qui ne sera d'ailleurs ni plus ni moins favorisé que tous les autres en ce qui concerne la reproduction correcte de cette force.

Ceci étant déterminé, l'hydraulique de la plaque doit également tenir compte de l'existence de la force centrifuge. Il suffit pour cela de construire les lignes de niveau du modèle en tenant compte de cette force, c'est-à-dire, en fait, de remplacer les plans horizontaux par des paraboloïdes de révolution ayant pour axe l'axe de rotation de la plaque. Là, comme tout à l'heure pour le Nil, une fois cette précaution prise, il est licite et même obligatoire d'oublier l'existence de la force centrifuge. Notons toutefois que cet oubli n'est légitime que parce que cette force reste, dans les cas pratiques, peu importante par rapport à la pesanteur : dans le cas contraire, des précautions complémentaires devraient être prises.

Lorsque l'hydraulicien dispose d'une plaque tournante pour construire son modèle, il lui reste encore à résoudre les problèmes classiques de la technique des essais : choix de la distorsion, de la rugosité, réalisation des conditions aux limites, etc... Tous ces problèmes peuvent être d'une grande difficulté, en particulier d'ailleurs en ce qui concerne les conditions aux limites; nous en dirons quelques mots plus loin, mais nous n'y insistons pas ici, puisqu'ils ne sont pas propres à l'hydrodynamique des plaques tournantes.

Avant de terminer sur le sujet de la similitude, nous voudrions signaler que d'autres procédés ont été suggérés dans le but d'échapper à la nécessité de réaliser un modèle tournant relativement compliqué et coûteux.

On a pensé utiliser l'analogie que nous signalions plus haut entre les forces électromagnétiques et la force de Coriolis, mais les ordres de grandeur réalisables ne semblent pas promettre des résultats pratiques à des échelles convenables. On a aussi suggéré de réaliser des modèles en interface, c'est-à-dire des modèles où la surface libre de la mer serait représentée par une interface entre deux liquides superposés de densité très voisine et non miscibles. Théoriquement viable, cette idée ne semble pas pouvoir donner lieu à des réalisations pratiques car, pour que la similitude soit convenable, il faudrait que les périodes des marées sur le modèle soient égales aux périodes naturelles, ce qui représenterait évidemment des mouvements extrêmement lents et des vitesses pratiquement impossibles à mesurer.

Enfin, de très importantes études avaient été faites par M. Vantroys au sujet de la distorsion généralisée applicable aux modèles à marées. Ces études sont trop délicates pour que nous les abordions ici, mais nous signalerons simplement qu'elles conduiraient à la mise en œuvre de dispositifs expérimentaux très complexes puisqu'il serait nécessaire d'injecter dans le modèle, non seulement sur le pourtour, mais également sur les pentes des fonds, des débits dont la valeur serait fonction des vitesses instantanées du courant local.

IMPORTANCE DES EFFETS DE LA FORCE DE CORIOLIS

Les difficultés de réalisation d'une plaque tournante de dimensions considérables sont loin d'être négligeables. Si bien que l'on peut à juste titre se demander si l'effet des forces de Coriolis est suffisamment important pour justifier de tels accroissements de dépenses. A ce titre, en effet, les doutes sont fort naturels. En dehors des bancs de l'école, on n'a que rarement l'occasion d'entendre parler de la force de Coriolis. On a bien le souvenir d'une certaine « déviation vers l'est », mais on se rappelle aussi qu'elle est tout à fait insignifiante dans la pratique courante. Le cas du pendule de Foucault, lui-même, n'est pas beaucoup plus convaincant, car il ne semble pas qu'il faille des forces bien considérables pour arriver péniblement à lui faire faire un tour en quelque trente heures (sous nos latitudes).

Il faut cependant se garder de conclure trop rapidement. Imaginons un pendule gigantesque qui aurait pour période celle de la marée semi-diurne. Son « plan d'oscillation » ferait alors un tour complet au cours de deux ou trois balancements. Autrement dit, la « forme » du mouvement du pendule serait complètement et profondément modifiée par l'influence de la force de Coriolis.

Ne risque-t-on pas de trouver des effets d'importance comparable pour les marées semi-diurnes? Nous pouvons répondre à cette question et préciser les ordres de grandeur en présence par quelques calculs simples.

Considérons une particule d'eau qui oscille horizontalement à la fréquence de la marée semi-diurne et soit V_{max} sa vitesse maximum au cours de cette oscillation. Si l'on appelle ω la fréquence angulaire de cette marée, on sait que l'accélération maximum au cours du mouvement est donnée par le produit :

$$\omega \cdot V_{max}$$

Par ailleurs, la valeur maximum de l'accélération de Coriolis, pour la même particule, vaut :

$$2 \sin \lambda \cdot \omega_T \cdot V_{max}$$

où $\sin \lambda$ est le sinus de la latitude, tandis que ω_T représente la vitesse de rotation de la Terre en radians par seconde. Il est facile de voir que les deux expressions ci-dessus sont à peu près du même ordre de grandeur, car pour une marée semi-diurne, ω est à peu près égal au double de ω_T, tandis que $\sin \lambda$, pour nos latitudes, est de l'ordre de 0,75. Appliquées par exemple au cas de la Manche, ces considérations montrent que la valeur maximum de la force de Coriolis agissant sur une particule au cours d'un mouvement de marée semi-diurne est de l'ordre de 80 % de la valeur des forces d'inertie ordinaires. Notons également que les études faites par M. Bonnefille, au Laboratoire National d'Hydraulique, montrent que les forces de frottement sont également d'un ordre de grandeur comparable.

De cette première comparaison brutale, on pourrait déduire, d'une façon apparemment justifiée, que puisque les forces de Coriolis sont pratiquement aussi importantes que toutes les autres forces en présence, leur action sera toujours du même ordre de grandeur et par conséquent impossible à négliger. Cette conclusion, qui conduirait à construire sur plaque tournante tous les modèles où la marée interviendrait peu ou prou, est heureusement excessive ainsi que nous allons nous efforcer de le montrer dans ce qui suit.

THÉORIES PERMETTANT DE JUSTIFIER DANS CERTAINS CAS L'EMPLOI DE MODÈLES FIXES

L'étude théorique des ondes dans un liquide en rotation, c'est-à-dire où intervient, entre autres, la force de Coriolis, se révèle extrêmement difficile. Il existe cependant un certain nombre de solutions basées sur les équations du premier ordre, ce qui est en général légitime pour la marée, et sur l'hypothèse d'un fluide parfait exempt de frottement, ce qui est moins légitime pour le cas des mers littorales. Ces quelques solutions sont connues depuis fort longtemps et toutes celles utilisables pour l'étude des marées se trouvent dans les œuvres de Poincaré. Notons, pour montrer la nature des difficultés rencontrées, que le problème de la réflexion sur un plan vertical, si facile à traiter en l'absence des forces de Coriolis, n'a pas encore reçu de solution générale lorsque celles-ci sont présentes.

La portée des quelques solutions particulières connues est toutefois accrue par les analogies qu'il est possible d'établir entre les phénomènes d'onde avec et les phénomènes d'ondes sans force de Coriolis. On peut ainsi ajouter à l'arsenal théorique, à titre d'outils secondaires et sujets à caution, quelques-uns des problèmes résolus pour les ondes de gravité ordinaires.

Ce préambule nous montre bien qu'en dehors des quelques cas exceptionnels où la nature voudra bien ressembler de très près à une des solutions théoriques connues, il sera nécessaire de faire intervenir le bon sens autant que la théorie dans l'exécution de calculs sur les ondes de marée. Par-dessus tout, il sera indispensable de se référer constamment à l'observation pour contrôler la validité des schématisations consenties.

Parmi les solutions théoriques que l'on peut ainsi utiliser, il en est une qui se révèle particulièrement adaptée à l'étude des marées dans les mers littorales relativement étroites, c'est-à-dire dont les dimensions, mesurées transversalement par rapport au sens de propagation de la marée, sont inférieures à la moitié de la longueur d'onde de celle-ci. Il s'agit des « ondes de Kelvin », qui sont, pour la marée, l'équivalent, en quelque sorte, des ondes cylindriques ordinaires parcourant un canal à houle étroit et de profondeur constante. Les comparaisons entre la nature et le calcul ont montré que non seulement les ondes de Kelvin étaient susceptibles d'expliquer d'une façon très satisfaisante beaucoup d'aspects de la marée, mais que l'on pouvait améliorer encore la concordance entre l'observation et les résultats théoriques en accordant aux ondes de Kelvin certaines des caractéristiques connues pour les ondes ordinaires.

Des considérations de ce genre ont permis d'expliquer, au moins en ordre de grandeur, non seulement la répartition des amplitudes observées dans la Manche, mais également l'allure des déphasages amplitude-courant qui suivent pourtant des lois assez complexes.

Parmi les autres outils théoriques, il importe également de souligner le théorème de Bjerknes, d'une application très générale et répondant en définitive à un concept mécanique simple. Ce théorème permet de mettre en évidence des différences profondes entre le comportement des modèles fixes et des modèles tournants.

Enfin, un troisième outil, d'une puissance théorique considérable, est apparu relativement récemment. Il s'agit de l'utilisation, pour la solution des équations de la marée, des puissantes machines à calculer que la technologie moderne met à notre disposition. Hansen a montré que l'on pouvait, par des procédés numériques, trouver des solutions tenant compte, avec théoriquement autant de précision qu'on le veut, non seulement des conditions aux limites, mais également de l'effet du frottement. Cette idée de base a été profondément étudiée et améliorée par Vantroys qui a réussi à mettre au point de véritables « modèles mathématiques » sur lesquels il est possible d'étudier le comportement des ondes de marée avec ou sans force de Coriolis.

Ce tour d'horizon rapide nous montre que l'ingénieur hydraulicien est loin d'être complètement désarmé pour estimer l'importance des effets de la force de Coriolis. Nous allons maintenant examiner successivement plus en détail chacun des outils mathématiques que nous venons de décrire.

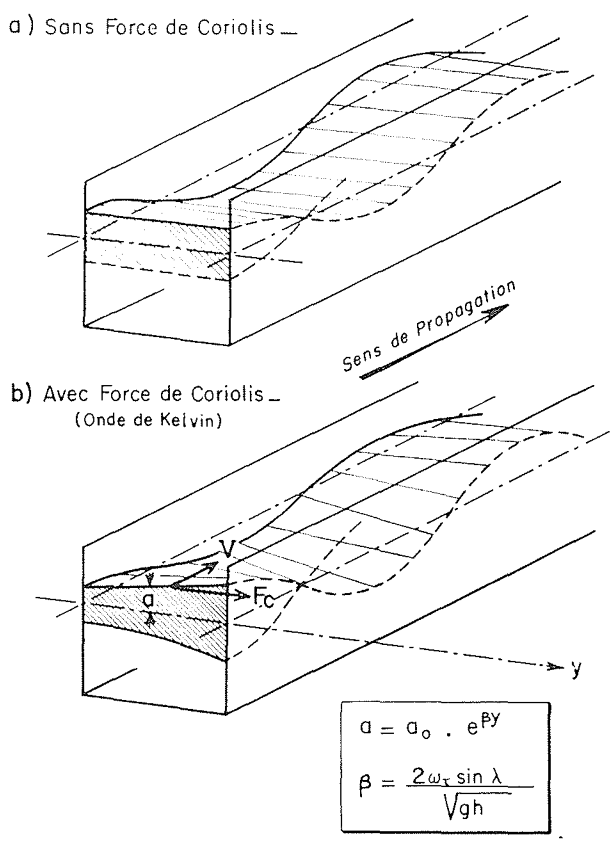

FIG. 1

La figure 1 montre l'influence de la force de Coriolis sur une onde se propageant dans un canal étroit. Le dessin du haut montre l'allure de cette onde en l'absence de force de Coriolis. Elle est caractérisée par le fait que les amplitudes ne varient pas transversalement dans le canal. On peut montrer que lorsque celui-ci est sensiblement plus étroit que la demi-longueur d'onde, il n'y a pas d'autre mouvement possible à la fréquence considérée et que par conséquent, si l'on néglige des perturbations mineures, la surface des coupes transversales reste horizontale.

La solution est également unique lorsqu'il y a des forces de Coriolis, mais par contre l'amplitude n'est plus constante transversalement mais croît ou décroît exponentiellement ainsi que le montre le dessin du bas de la figure 1. Si y est mesuré perpendiculairement aux parois verticales du canal, l'amplitude de l'onde est proportionnelle à :

$$e^{\beta y}$$

où β vaut :

$$\frac{2\,\omega_T \sin\lambda}{\sqrt{gh}}$$

Ce type d'onde s'appelle onde de Kelvin. Notons d'ailleurs que son comportement n'est pas difficile à expliquer car il est possible de le rattacher à une notion élémentaire d'équilibre. Considérons par exemple un point situé sur une crête; la vitesse de ce point a la direction indiquée sur la figure 1. Par conséquent, la force de Coriolis, qui lui est perpendiculaire, s'exerce transversalement à l'axe du canal et tend à rejeter les eaux de la crête vers la paroi de droite. Cette tendance atteindra son équilibre lorsque la pente de la surface sera juste égale à celle nécessaire pour compenser l'effet de la force de Coriolis. Au droit d'un creux de l'onde, les vitesses seront inversées et les pentes de la surface également, si bien que le même raisonnement sera valable *mutatis mutandis.*

Le dévers transversal des ondes de marée correspond donc à une réalité élémentaire profonde et par conséquent se retrouvera, au moins en ordre de grandeur, même lorsque le problème réel sera plus compliqué, par exemple lorsque les profondeurs ne seront pas constantes ou lorsque les forces de frottement joueront un rôle sensible. Pour fixer un premier ordre de grandeur, indiquons que l'application de la formule ci-dessus au cas de la Manche occidentale montre que l'onde entrant dans cette mer, — onde qui est la principale —, doit avoir, sur les côtes bretonnes, une amplitude légèrement supérieure au double de celle qu'elle a sur les côtes anglaises. Cette conclusion, qui d'ailleurs peut être encore affinée en tenant compte de l'onde réfléchie sortant de la Manche, est étayée avec une précision remarquable par les observations.

Le théorème de Bjerknes permet de calculer l'effet rotationnel, que nous avons signalé plus haut, des forces de Coriolis. Là encore, il s'agit à la base d'un phénomène élémentaire que nous allons essayer de dégager de son contexte hydraulique, nécessairement complexe, en utilisant un exemple mécanique plus simple et plus agréable à considérer.

Chacun de nous a eu certainement plusieurs fois l'occasion de voir de gracieuses acrobates, suspendues par les dents à un support adéquat, pivoter sur elles-mêmes avec une rapidité impressionnante. Et nous n'avons pas été sans observer la manière dont ce mouvement de rotation rapide était obtenu. Le partenaire lance l'acrobate, qui a les bras largement écartés, jusqu'à ce qu'elle ait atteint une vitesse de rotation relativement modérée. Puis soudain elle rabat les bras le long de son corps et l'on voit, comme par miracle, son mouvement s'accélérer soudain. La cause de cette accélération n'est autre que l'effet des forces de Coriolis agissant sur les bras au cours de leur mouvement centripète : mais on peut décrire encore plus simplement et synthétiquement le phénomène en remarquant que, puisqu'aucun couple extérieur n'est exercé sur le système mécanique considéré, le moment des quantités de mouvement doit se conserver. Or ce moment n'est autre que le produit du moment d'inertie de l'acrobate par sa vitesse de rotation; le fait de ramener les bras au voisinage de l'axe de cette rotation diminue le moment d'inertie total et par conséquent le nombre de tours-minute doit augmenter en proportion inverse.

Tout ceci serait encore plus frappant si cela se passait dans un cirque animé, autour d'un axe vertical, d'un mouvement de rotation de vitesse intermédiaire entre les vitesses de rotation maximum et minimum de l'acrobate. Les sièges étant convenablement inclinés pour compenser la force centrifuge, les spectateurs immobiles ne s'apercevraient de rien, mais verraient avec stupeur le sens de rotation de notre héroïne s'inverser car, suivant la position de ses bras, elle tournerait tantôt dans un sens, tantôt dans un autre ou même pourrait à son gré s'immobiliser, le tout bien entendu par rapport aux axes de coordonnées liés au cirque.

Or, c'est un effet identique et tout aussi surprenant que nous observons dans les mers soumises à des marées. Lorsque la mer est haute, dans une région donnée, les masses d'eau qui s'y trouvent tournent dans un sens (celui de la rotation de la Terre), tandis que, lorsque la mer est basse, elles tournent dans l'autre sens; tout ceci bien entendu par rapport à des axes terrestres.

Il est d'ailleurs facile de comprendre que lorsque le niveau monte, les masses d'eau intéressées se contractent nécessairement dans le plan horizontal, puisque les volumes doivent être conservés. Cette contraction a exactement le même effet que l'abaissement des bras de notre saltimbanque, elle diminue le moment d'inertie autour d'un axe vertical de la masse d'eau considérée et, par conséquent, le mouvement de rotation de celle-ci doit accélérer, c'est-à-dire devenir plus grand que le mouvement de rotation de la Terre.

Cette considération permet d'établir presque immédiatement le théorème de Bjerknes qui donne, en chaque point, les variations du rotationnel dues à l'action de la force de Coriolis. En pratique, il est commode de substituer à cette notion un peu abstraite de rotationnel, celle de « circulation » relative à une aire donnée. Cette circulation n'est autre que l'intégrale, le long du pourtour de cette aire, des projections tangentielles des vitesses du courant aux points de ce contour. Ceci signifie en d'autres termes qu'en divisant la circulation par le périmètre on obtient la valeur moyenne de la composante tangentielle des vitesses de courant.

Un théorème général montre que la circulation est égale à l'intégrale, sur toute la surface considérée, du rotationnel; par conséquent cette vitesse tangentielle moyenne doit être nulle pour un mouvement irrotationnel et donne ainsi une bonne mesure de l'effet giratoire de la force de Coriolis.

Ces considérations de conservation du moment de la quantité de mouvement permettent d'établir immédiatement les formules essentielles du théorème de Bjerknes. Par exemple, si l'on suppose que la circulation à l'étale est nulle, la circulation à marée haute est donnée par l'expression :

$$C_h = -2\,\omega_T \sin\lambda . (A_h - A_0)$$

où A_0 représente la surface occupée par la masse d'eau considérée à l'étale;

et A_h la surface, plus faible, occupée par celle-ci au moment de la haute mer.

L'application élémentaire de la loi de la conservation des volumes permet d'écrire cette formule sous la forme (*) :

$$C_h = 2\,\omega_T \sin\lambda\, A_0 \frac{a}{h+2\,a}$$

tandis que la circulation à marée basse est donnée d'une façon analogue par :

$$C_b = 2\,\omega_T \sin\lambda\, A_0 \frac{a}{h}$$

On voit que cette circulation est, toutes choses égales d'ailleurs et pour une latitude donnée, proportionnelle à la surface considérée, proportionnelle au marnage et à peu près inversement proportionnelle à la profondeur moyenne $h+a$. D'après la remarque que nous avons faite tout à l'heure, les vitesses tangentielles moyennes seront également inversement proportionnelles à la longueur du périmètre.

Le théorème de Bjerknes ne tient pas compte du frottement qui intervient certainement pour en corriger quelque peu les résultats. Il ne faut

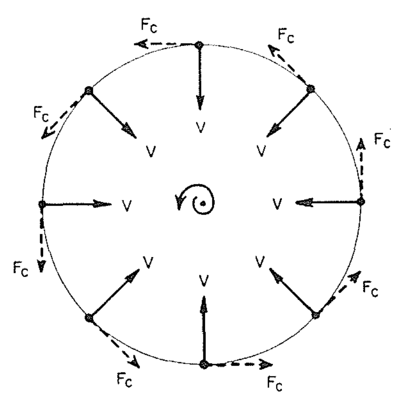

FIG. 2

(*) h étant la profondeur lue sur la carte marine et $2\,a$ le marnage.

pas penser cependant qu'un frottement même important puisse étouffer complètement les mouvements de rotation. Nous avons en effet souligné que la direction des forces de frottement était à angle droit avec celle des forces de Coriolis et que, par conséquent, il ne pouvait y avoir compensation parfaite.

On peut voir ceci d'une façon peut-être plus convaincante sur un exemple hydraulique très simple : celui où toutes les vitesses seraient convergentes vers un même point central. La figure 2, sur laquelle les vitesses sont marquées en traits pleins et les forces de Coriolis en pointillés, fait comprendre immédiatement la façon dont celles-ci peuvent intervenir pour donner à la masse d'eau en mouvement une rotation dans un sens déterminé. Il est clair sur cet exemple que le frottement ne pourra intervenir pour limiter cette rotation qu'après que celle-ci ait pris une certaine amplitude et que, par conséquent, en aucun cas, il ne pourrait la supprimer totalement.

Un exemple nous permettra ici aussi de préciser les ordres de grandeurs. Nous avons eu l'occasion de montrer, dans une note présentée au Pool Coriolis, puis au cours ds IVèmes Journées de l'Hydraulique, que si l'on appliquait le théorème de Bjerknes à un carré d'environ 60 km de côté, situé au voisinage du golfe de Saint-Malo, on trouvait à marée haute une vitesse moyenne tangentielle de l'ordre de 0,65 nœud, tandis que les observations faites, en particulier sous la direction de M. Lacombe, donnaient, pour la même région, une vitesse tangentielle moyenne de 0,53 nœud. On peut donc considérer que, là encore, la concordance est excellente, compte tenu de la nature des approximations consenties.

Les ondes de Kelvin et le théorème de Bjerknes nous donnent donc deux outils théoriques que l'on peut considérer comme raisonnablement sûrs. *Ils sont en effet bien confirmés par l'observation et, de plus, ils peuvent être établis dans leurs caractères essentiels à partir de considérations mécaniques très simples et donc peu sujettes à caution.*

Applications comparées du Théorème de Bjerknes et des ondes de Kelvin

Il est intéressant de faire une comparaison rapide des vertus relatives de ces deux aspects d'une même vérité : le schéma des ondes de Kelvin nous donne un outil d'utilisation moins générale que le théorème de Bjerknes, puisqu'il exige que, dans la complexité des mouvements réels, on puisse au moins distinguer des sens de propagation d'onde. C'est le cas, dans la Manche occidentale, où le mouvement principal est une onde venant de l'Atlantique; ce ne sera pas le cas dans le golfe de Saint-Malo où de nombreuses réflexions, réfractions, diffractions, etc., compliquent les phénomènes. Notons toutefois que le schéma de l'onde de Kelvin pourra être utilisé dans ce même cadre du golfe de Saint-Malo pour l'étude très particulière de l'onde de remous émise par l'usine marémotrice. En effet, dans ce cas, le sens de propagation de la perturbation est bien défini. Nous verrons plus loin que les prévisions que l'on peut faire d'après ce schéma sont confirmées et même dépassées par les calculs d'ondes de remous auxquels s'est spécialement attaché M. Vantroys.

Au contraire, le théorème de Bjerknes est d'une application très générale et c'est pour cela que nous l'avions utilisé dans l'analyse des mouvements du golfe de Saint-Malo. En contrepartie, il ne permet pas de tirer des conclusions aussi complètes que dans le cas où le mouvement peut se représenter par des ondes de Kelvin, puisqu'il ne donne en définitive qu'une valeur moyenne d'un certaine composante de la vitesse, tandis que les ondes de Kelvin ou les amphidromies de Kelvin définissent tous les caractères essentiels du mouvement.

Il ne faut pas cependant sous-estimer pour autant le théorème de Bjerknes pour l'étude qui nous occupe, car s'il ne donne qu'un seul renseignement sur l'effet de la force de Coriolis, ce renseignement est le plus essentiel, car il concerne le caractère exceptionnel que nous avons signalé au sujet de cette force. Ce caractère, qui est de créer, de modifier, de modeler constamment les mouvements de rotation de la masse liquide, ne peut être compensé par aucune des forces de masse classiques qui sont presque toutes conservatrices. On connaît en effet le célèbre théorème de Lagrange sur ce sujet, théorème d'application délicate, il est vrai, lorsque les frottements sont importants, mais qui donne quand même une indication d'une valeur certaine sur ce qui est réalisable ou sur ce qui ne l'est pas.

Notons, de plus, que ces deux outils de travail peuvent souvent s'appliquer simultanément à la même région pour mettre en relief tel ou tel aspect important de l'action des forces de Coriolis.

Par exemple nous avons utilisé les ondes de Kelvin pour décrire la marée dans la Manche occidentale, mais il est intéressant aussi de considérer cette région sous l'aspect du théorème de Bjerknes. Les amplitudes de marée plus grandes sur les côtes de France que sur les côtes anglaises s'accompagnent à marée haute de courants ouest-est également plus importants au sud qu'au nord. Ceci est normal, l'intensité des courants étant liée étroitement aux déplacements de masses d'eau, donc au marnage. On voit clairement sur la figure 3 que cette disparité dans les courants correspond à un mouvement de rotation d'ensemble des masses d'eau de la Manche occidentale à marée haute; à marée basse, le courant serait sensiblement inverse et ce mouvement de rotation s'inverserait également,

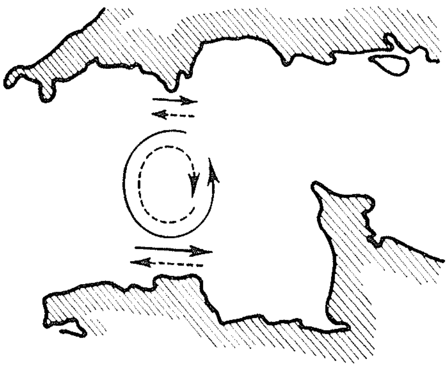

Fig. 3

Au voisinage de la pleine mer dans la Manche occidentale, les courants venant de l'ouest sont plus forts au sud qu'au nord, d'où un mouvement de rotation lévogyre des masses d'eau — *flèches en traits pleins* —. A marée basse, ce mouvement de rotation s'inverse — *flèches en pointillés* — avec les courants.

comme le prédit le théorème de Bjerknes qui permet d'ailleurs de calculer l'ordre de grandeur de cette rotation.

Nous disions tout à l'heure qu'il était pratiquement impossible sur un modèle fixe de réaliser de tels rotationnels alternatifs; la remarque que nous venons de faire montre que cela revient, en quelque sorte, à dire qu'il n'est pas possible de réaliser sur un modèle fixe de la Manche occidentale des amplitudes de marée sensiblement différentes sur les côtes françaises et anglaises. Cette conclusion qui, *a priori*, pouvait sembler excessive, a été confirmée d'une façon totale par des expériences faites à Chatou sur le modèle fixe de la Manche, expériences qui ont montré que, malgré les réglages de conditions aux limites, les ajustements dissymétriques des rugosités, etc., voire même l'introduction dans le modèle d'une onde venant du nord et que l'on pouvait escompter voir se réfléchir sur les côtes de la Bretagne, il a été impossible de reproduire la disparité des amplitudes entre les côtes anglaises et françaises.

Cette expérience montre qu'il n'est pas exagéré de considérer que la création de rotationnels alternatifs ne peut être réalisée d'une façon conforme à la nature que si les forces de Coriolis sont convenablement représentées (*).

Ainsi que nous l'avons mentionné plus haut, le schéma des ondes de Kelvin peut être utilisé avec quelque chance de succès, même dans le cadre du golfe de Saint-Malo, pour l'étude de l'onde de remous causée par le fonctionnement de l'usine. La direction de propagation de la perturbation est en effet bien définie, puisqu'elle provient de l'usine. Cependant il est clair que le « canal » est très particulier, puisqu'il se présente sous la forme d'un large divergent. Par conséquent, nous nous trouvons là dans un cas où l'application aveugle des formules de Kelvin ne saurait être valable, mais où l'on peut affirmer néanmoins que les différences d'amplitudes transversales doivent se retrouver en ordre de grandeur, puisqu'en définitive elles s'expliquent par des considérations d'équilibre très simples.

On peut ainsi prévoir que l'onde de remous de l'usine tendra à avoir une amplitude plus importante au nord qu'à l'ouest. Au contraire, en l'absence des forces de Coriolis, on peut escompter que les amplitudes tendront à être à peu près uniformément réparties sur un arc de cercle centré approximativement sur l'usine.

Ces considérations et les calculs basés sur les ondes de Kelvin resteraient certainement encore encore sujets à caution s'ils n'avaient été largement confirmés par les calculs plus précis effectués sous la direction de M. Vantroys.

La figure 4 montre le golfe de Saint-Malo et

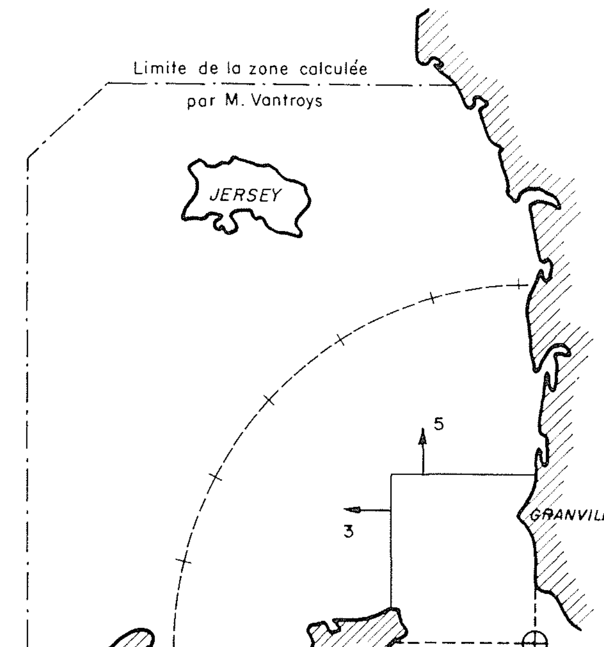

Fig. 4

la zone où ces calculs ont été effectués. A titre de comparaison, les amplitudes ont été relevées sur un arc de cercle qui est choisi à peu près à mi-chemin entre les limites du calcul (où les

(*) Des résultats récents obtenus par M. Gohin de la SOGREAH sur un modèle mathématique confirment à nouveau ces points.

conditions sont imposées un peu arbitrairement) et le voisinage de l'usine où l'onde peut ne pas avoir eu le temps de s'organiser.

La figure 5 montre, sur un même graphique,

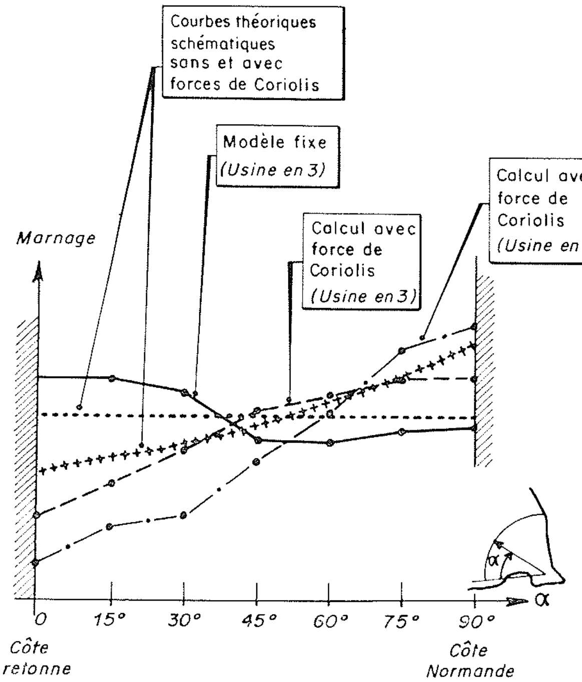

FIG. 5

la façon dont les amplitudes varient sur l'arc de cercle considéré suivant les observations ou les calculs qui ont été faits. Les observations faites sur le modèle fixe de la Manche montrent (courbe en trait plein) que la perturbation est à peu près du même ordre de grandeur sur les côtes bretonnes et sur les côtes normandes, mais que néanmoins elle pousse une sorte de pointe vers l'ouest. Nous disions tout à l'heure qu'en l'absence de force de Coriolis, on pouvait s'attendre à voir l'amplitude uniformément répartie sur un tel arc de cercle. La pointe vers l'ouest peut probablement s'expliquer par le fait que l'expérience considérée a été faite avec une usine débitant vers l'ouest, ce qui, au voisinage de celle-ci, favorisait certainement cette direction. D'ailleurs, les calculs de M. Vantroys, faits avec plusieurs emplacements d'usine, confirment que cette orientation a un effet loin d'être négligeable.

Le dernier (à notre connaissance) (*) calcul de M. Vantroys, pour le même emplacement de l'usine, donne, ainsi que le montre la figure 5 (trait interrompu), une disparité considérable entre les amplitudes à l'ouest et au nord. Ces dernières sont en effet de l'ordre au moins double des premières, ce qui, du point de vue énergétique, représente une densité d'énergie quatre fois plus grande. Si d'ailleurs on place l'usine à la position 5 à peu près symétrique de la précédente par rapport à l'axe du golfe, on obtient un effet directionnel opposé qui tend à renforcer encore l'amplitude au nord ainsi que le montre la courbe en traits mixtes de la même figure.

En résumé, on peut penser que la moyenne entre les deux courbes calculées par M. Vantroys doit correspondre à l'absence d'effets directifs propres à l'usine. Le rapport des amplitudes sur les côtes normandes et bretonnes est alors de l'ordre de 4. Le calcul comparatif, fait à partir de la théorie des ondes de Kelvin, donne une disparité d'amplitude dans le même sens, mais à vrai dire, moins importante, le rapport calculé étant de l'ordre de 2 seulement. Il est possible que l'accentuation de cet effet de déviation vers le nord résulte de la façon particulière dont les conditions limites ont été imposées au modèle mathématique, ou même peut-être de la méthode de calcul employée. Il est quand même intéressant de signaler que la même tendance s'est retrouvée avec toujours des ordres de grandeur comparables dans tous les calculs successifs exécutés sous la direction de M. Vantroys, soit à l'aide des machines à calculer de l'Electricité de France, soit à l'aide des machines IBM, soit encore à l'aide de machines analogiques. Au contraire, ceux de ces calculs qui ont été faits sans tenir compte de la force de Coriolis, n'ont pas donné lieu à ce phénomène, même lorsque, par ailleurs, certaines particularités peu explicables les avaient fait rejeter par M. Vantroys comme peu sûrs.

PROBLÈMES DES CONDITIONS AUX LIMITES — MODÈLES « GIGOGNES »

Nous n'avons guère parlé jusqu'ici de la réalisation des conditions aux limites en disant que le problème se posait de la même façon que sur les modèles fixes et, par conséquent, ne dépendait pas de l' « l'hydrodynamique des plaques tournantes ». Il nous faut toutefois apporter un léger correctif sur ce point.

On sait que les conditions aux limites d'un modèle de marémotrice sont beaucoup plus difficiles

(*) Depuis la date de rédaction de cet exposé des résultats plus récents nous ont été communiqués par la S.E.U.M. Ils apportent une nouvelle confirmation à ce qui suit.

à réaliser correctement que celles d'un modèle à marée ordinaire. Dans ce dernier cas, en effet, les perturbations de la marée sont négligeables ou nulles et par conséquent les conditions aux limites peuvent être réglées d'une façon rigide une fois pour toutes.

Au contraire, dans les modèles de marémotrices, les perturbations de la marée peuvent être importantes et essentielles pour l'étude du problème. Il importe donc que les conditions aux limites soient modifiées en fonction de l'exploitation de l'usine. Cette modification, dépendant de la « réponse » des zones extérieures au modèle, ne pourra être réalisée automatiquement que dans certains cas, par exemple celui de la Manche entière, parce que l'on peut admettre que l'Atlantique ne sera pas sensiblement affecté par le fonctionnement d'une usine, même très puissante, à Chausey. Les conditions aux limites des modèles, représentant des zones plus restreintes, ne pourront se régler qu'à l'aide de modèles de zones plus vastes englobant les premières. (Modèles qui pourront être à une échelle plus petite, voire même, être des « modèles mathématiques ».)

On voit ainsi se dessiner une technique de modèles successifs que l'on peut appeler modèles gigognes; cette technique n'est d'ailleurs pas nouvelle dans le domaine des modèles hydrauliques. Ce que nous voulons signaler ici, en rapport avec l'hydrodynamique des plaques tournantes, c'est qu'il est possible que certains des modèles d'une telle série soient fixes et d'autres tournants.

Autrement dit, même lorsque la zone géographique représentée sera suffisamment réduite pour qu'un modèle fixe suffise, il pourra néanmoins être nécessaire de construire un modèle tournant pour régler les conditions aux limites du premier.

CONCLUSION

En conclusion, nous voyons que les forces de Coriolis ne sont pas au fond aussi mystérieuses que l'on aurait pu le craindre *a priori*. Si elles paraissent l'être, c'est que l'on n'a pas souvent à s'en préoccuper, mais au fond les lois de leur action sont simples et les hydrauliciens souhaiteraient certainement que toutes les forces de leur domaine soient aussi bien connues. Même la difficulté mathématique très grande des solutions rigoureuses n'empêche pas que l'on dispose d'un petit arsenal fort utile et permettant d'estimer valablement la plupart des ordres de grandeur essentiels. De plus, grâce à l'introduction des machines à calculer, qui permettent de bâtir de véritables « modèles » mathématiques, les prévisions peuvent être de plus en plus dignes de confiance.

Ainsi que nous l'avions annoncé plus haut, l'ensemble de ces moyens permet de montrer que certaines catégories d'études peuvent s'effectuer sur des modèles fixes alors que la comparaison trop simpliste des ordres de grandeur donnait une note excessivement pessimiste. Prenons par exemple le théorème de Bjerknes qui nous indique que les erreurs « irréductibles » sur les courants ont une valeur moyenne qui dépend principalement de paramètres simples à calculer, tels que :

— l'étendue géographique, puisque la circulation est proportionnelle à la surface considérée;

— le périmètre, puisque la vitesse tangentielle moyenne est inversement proportionnelle à ce périmètre. L'ensemble de ces deux éléments montre que la forme de la zone étudiée intervient également et qu'une surface allongée est plus facile à étudier sur modèle fixe qu'une surface égale mais plus ramassée;

— la profondeur, puisque la circulation est inversement proportionnelle à sa valeur moyenne, ce qui fait que plus les profondeurs sont faibles, plus l'effet des forces de Coriolis est important;

— et enfin le marnage, auquel les effets sont également proportionnels.

Les calculs simples que nous avons présentés ici montrent que la plaque tournante de Grenoble pourra être un outil précieux, sinon indispensable, pour l'étude du fonctionnement des usines marémotrices. Qu'il me soit donc permis ici de rendre hommage au professeur Kravtchenko grâce auquel cette réalisation a pu prendre jour sous l'égide de l'Université de Grenoble, avec l'accord de M. Gibrat et avec la participation du Laboratoire National d'Hydraulique et de la SOGREAH.

DISCUSSION

Président : M. LACOMBE

M. le Président remercie M. BIESEL d'avoir, par sa communication, fait sentir l'importance de la force de Coriolis à des hydrauliciens, c'est-à-dire à des spécialistes autres que les océanographes et les météorologistes qui, jusqu'à présent, s'étaient seuls préoccupés de cette force.

M. le Président signale que le théorème de Bjerknes, mentionné par M. BIESEL, est le même que celui rappelé tout à l'heure par M. SAINT-GUILY dans sa communication, mais sous une forme différente : la formule de Bjerknes, appliquée par Helland-Hansen aux courants, a été initialement démontrée à partir du théorème de la circulation et c'est ensuite qu'on la déduisit, bien plus simplement, des équations de l'hydrodynamique sous la forme qu'a écrite M. SAINT-GUILY.

M. le Président propose enfin une généralisation du théorème de la circulation dont M. BIESEL a donné la valeur par profondeur moyenne constante :

« Si l'on explicite les équations de l'hydrodynamique, même en tenant compte des termes rectangles et si on fait la différentiation croisée des deux équations, il apparaît immédiatement la dérivée particulaire totale du rotationnel relatif ζ, plus celle du paramètre de Coriolis $f = 2\,\omega \sin \varphi$, plus un autre terme qui est $f + \zeta$ multiplié par la divergence horizontale de la vitesse $(\partial u/dx) + (\partial v/dy)$; leur somme égale 0 s'il n'y a pas de frottement :

$$\frac{d}{dt}(\zeta+f)+(\zeta+f)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0$$

$$(\text{avec } f=2\,\omega \sin \varphi,\ \varphi \text{ latitude})$$

« Pour un fluide de densité constante et pour une onde longue, c'est-à-dire une onde telle que les vitesses soient les mêmes à toute immersion, l'équation de continuité prend la forme très simple :

$$-\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial t}=\text{div. vitesse}$$

« h » étant la hauteur totale d'eau dépendant de x, y et t, le fond pouvant ne pas être horizontal.

« Il en résulte que, dans ce cas :

$$\frac{\zeta+f}{h}=Cte$$

pour un ensemble de particules déterminées. « h » intervient et l'on voit que la circulation de l'ensemble des particules fluides est proportionnelle à la hauteur du volume de fluide occupé par cet ensemble de particules, même si le fond n'est pas horizontal.

« D'ailleurs, on peut aussi introduire les termes de frottement et il apparaît alors dans l'équation le rotationnel des frottements verticaux en surface et au fond et également le rotationnel des efforts latéraux. La considération de cette équation permet de se rendre compte de la variation du rotationnel d'une masse fluide en mouvement vers le nord. Elle explique très facilement l'intensification des courants sur le bord ouest des océans, qu'a indiquées M. SAINT-GUILY, et fait ressortir aussi les indications que M. BIESEL a données concernant la circulation. »

M. BIESEL remercie M. le Président de lui avoir donné des éclaircissements à propos des théorèmes de Bjerknes et de Helland-Hansen.

Il communique, ensuite, quelques dessins des résultats de M. GOHIN auxquels il a fait allusion dans son exposé.

M. le Président souligne le grand intérêt de ces résultats, surtout du fait que M. BIESEL arrive à trouver un schéma de la marée dans la Manche qui rappelle la réalité, malgré des variations des conditions aux limites au large. Par conséquent, peut-être n'est-il pas extrêmement critique d'avoir, à condition d'être assez au large, des conditions aux limites qui correspondent exactement à la réalité. Ceci recoupe d'ailleurs ce qui avait été trouvé à Chatou; l'addition d'un batteur transversal ne changeait pratiquement rien au régime de la marée trouvé sur le modèle fixe au 1/50 000^e de la Manche.

M. BONNEFILLE confirme cette constatation, qui a été faite aussi bien sur le modèle avec force de Coriolis que sur le modèle fixe : la marée est pratiquement indépendante de ce que l'on introduit à l'entrée.

M. le Président conclut que le critère essentiel est le rapport de la dimension du bassin à la longueur d'onde.