

Sur quelques propriétés des isoclines dans un écoulement à deux dimensions⁽¹⁾

On some properties of isoclines in two-dimensional flow⁽¹⁾

PAR S. IRMAY

DIVISION OF HYDRAULIC ENGINEERING, ISRAEL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Les isoclines sont des lignes ayant la même inclinaison du vecteur de vitesse. Les isovels sont des lignes d'égale vitesse. Les isopièzes sont des lignes ayant la même hauteur piézométrique.

Dans un fluide non visqueux et incompressible en écoulement potentiel permanent, les iso-clines, dans un plan donné, sont normales aux lignes isopièzes.

Cette propriété vaut dans le cas d'un écoulement rotatif dans un plan, mais ici les isopièzes ne sont pas identiques aux isovels. Dans les gaz, pour de faibles vitesses, les iso-clines sont normales aux isobares.

Ce théorème reçoit de nombreuses applications : si l'on connaît un groupe de lignes (iso-clines ou isopièzes), théoriquement, expérimentalement ou graphiquement, on peut facilement déterminer l'autre groupe et calculer la vitesse. Dans une section transversale normale d'un écoulement parallèle, la répartition des pressions est quasi hydrostatique.

Une propriété tant soit peu semblable demeure vraie dans un plan donné pour un écoulement non permanent, visqueux ou non visqueux, pour un écoulement compressible, non visqueux et non permanent, et pour un écoulement axisymétrique.

En général, cette proposition n'est pas vraie dans le cas d'un écoulement à trois dimensions, excepté pour certains écoulements à deux dimensions dans des surfaces courbes, ce qui englobe la plupart des cas pratiques.

D'autres propriétés de l'écoulement plan visqueux sont étudiées.

Isoclines are lines of equal inclination of the velocity vector. Isovels are lines of equal velocity. Isopiestic lines have equal piezometric head.

In an inviscid incompressible fluid in steady potential flow in a plane the iso-clines are normal to the isopiestic lines.

This property holds in rotational flow in a plane, only here the isopiestic lines are not identical with the isovels. In gases at low velocities the iso-clines are normal to the isobars.

This theorem has numerous applications: If one set of lines (iso-clines or isopiestic lines) is known by theory, experiment or graphically, the other set may easily be determined and the velocity computed. In a normal cross-section of a parallel flow the distribution of pressures is quasi-hydrostatic.

A somewhat similar property holds in a plane for unsteady inviscid or viscous flow, unsteady inviscid compressible flow, and axially symmetrical flow.

In general it is not true in three-dimensional flow, except for certain two-dimensional flows in curved surfaces, which include most practical cases.

Some other properties of viscous plane flow are investigated.

I. — INTRODUCTION

Considérons le cas simple d'un fluide non visqueux et incompressible en régime permanent et en écoulement irrotationnel ou potentiel. Le vecteur de vitesse \underline{V} dérive d'un potentiel de vitesse scalaire φ :

$$\underline{V} = \text{grad } \varphi \quad (1.1)$$

Let us consider the simple case of an inviscid incompressible fluid in steady motion, in irrotational or potential flow. The velocity vector \underline{V} derives from a scalar velocity potential φ :

(1) Exposé fait à la 8^e réunion de l'Israel Association for theoretical and applied Mechanics, Haifa, 1958.

(1) Lecture given at the 8th Meeting of the Israel Association for theoretical and applied Mechanics, Haifa, 1958.

Soit P le potentiel combiné de la pression et des forces de gravité :

If P is the *combined pressure and gravity potential of forces* :

$$P = gZ + p/\varrho = gh \quad (1.2)$$

avec h = la hauteur piézométrique ou charge mesurée au moyen de tubes piézométriques :

where h is the *piezometric head* measured by piezometric tubes :

$$h = Z + p/g\varrho = Z + p/\gamma \quad (1.3)$$

(p = pression; Z = altitude au-dessus du niveau de référence; ϱ = densité ou masse spécifique; γ = poids unitaire). L'énergie mécanique spécifique E , c'est-à-dire l'énergie par masse unitaire du fluide, est constante partout :

(p = pressure; Z = vertical elevation above datum; ϱ = density or specific mass; γ = unit weight). Then the specific mechanical energy E , i.e. per unit mass of fluid, is constant everywhere :

$$E = P + V^2/2 = C^{te} \quad (1.4)$$

Une « *isovel* » (isotache, isodrome) est une ligne de vitesse constante. Suivant (1.4), elle est également une ligne sur laquelle P ou h sont constants; elle est donc en outre une ligne *isopièze*. Dans le cas des gaz aux faibles vitesses dans la gamme subsonique, les influences de la compressibilité et de la pesanteur sont négligeables. On peut remplacer (1.2) à titre approximatif par :

An *isovel* (isotach, isodrome) is a line of constant velocity. By (1.4) it is also a line of constant P or h , i.e. it is also an *isopiestic line*. In the case of gases at low subsonic velocities, the effects of compressibility and gravity are negligible. (1.2) may approximately be replaced by :

$$P \sim p/\varrho \quad (1.5)$$

Donc $P = C^{te}$ implique que $p = C^{te}$, c'est-à-dire soit une *isobare*.

Hence $P = \text{const}$ implies $p = \text{const}$, i.e. an *isobar*.

D'après la théorie des fonctions, nous savons que si nous définissons une variable complexe par $z = x + iy$, nous pouvons alors considérer toute fonction analytique de cette variable comme étant le *potentiel complexe d'un écoulement* :

The theory of functions states : if we define a complex variable by $z = x + iy$, then any analytical function of this variable may be considered as the *complex potential of a flow* :

$$w = f(z) = \varphi + i\psi \quad (1.6)$$

puisqu'elle se compose d'une partie réelle $\varphi = \varphi(x, y)$, qui peut représenter un *potentiel de vitesse* éventuel en écoulement plan, et, d'autre part, d'une partie imaginaire $\psi = \psi(x, y)$, qui représente la *fonction de courant* correspondante. Le vecteur de vitesse \underline{V} est alors normal par rapport aux *lignes équipotentiell*es (lignes $\varphi = C^{te}$), et tangente aux lignes de courant (lignes $\psi = C^{te}$). Les équipotentielles et les lignes de courant sont orthogonales les unes aux autres, et constituent un réseau isotherme (2).

as it consists of a real part $\varphi = \varphi(x, y)$, which may represent a possible *velocity potential* in plane flow; and of an imaginary part $\psi = \psi(x, y)$ which represents the corresponding *stream-function*. The velocity vector \underline{V} is then normal to the *equipotential lines* (of equal φ) and tangent to the streamlines (of equal ψ). The equipotentials and streamlines are mutually orthogonal and form an isothermal flow-net (2).

(2) Méthode dite « des petits carreaux », exposée par P. DANIEL et G. SAUVAGE DE SAINT-MARC : « Cours d'hydrodynamique graphique », fasc. I, *Ecole Nationale Supérieure d'Electrotechnique et d'Hydraulique de Grenoble* (1950).

(2) Called "Small Squares," see DANIEL, P. & SAUVAGE DE SAINT-MARC, G.: "Cours d'hydrodynamique graphique," Fasc. I, *Ecole Nationale Supérieure d'Electrotechnique et d'Hydraulique de Grenoble* (1950).

La première dérivée représente ce que l'on connaît sous le nom de *vitesse complexe* ⁽³⁾ :

The first derivative represents the so-called *complex velocity* ⁽³⁾ :

$$dw/dz=f'(z)=u - iv=V \exp(-i \theta) \tag{1.7}$$

avec : θ =l'inclinaison de la vitesse par rapport à l'axe des x ; u, v étant les composantes cartésiennes de \underline{V} . Nous avons :

where θ is the *inclination* of the velocity to the x -axis; u, v —the cartesian components of \underline{V} . We have :

$$\cot \theta=u/v; \quad V^2=u^2+v^2 \tag{1.8}$$

D'après Kirchhoff

Following Kirchhoff

$$\ln(dw/dz)=\ln V - i \theta \tag{1.9}$$

est une autre fonction analytique, d'où il suit que les *isoclines* (lignes d'égale inclinaison θ) sont orthogonales par rapport aux *isovels* (lignes d'égales valeurs de V), et, par suite de (1.4), les isoclines sont normales aux lignes isopièzes

is another analytical function, hence the *isoclines*, i.e. lines of equal inclination θ , are orthogonal to the *isovels* (equal V), and because of (1.4) the isoclines are normal to the isopiestic lines (fig. 1).

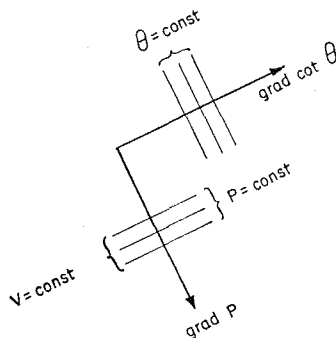


Fig. 1

(fig. 1). Qu'advient-il de cette propriété remarquable en écoulement rotationnel, en mouvement non permanent, dans un fluide compressible, dans un fluide visqueux, en écoulement tri-dimensionnel, en écoulement turbulent?

What happens to this remarkable property in rotational flow, in unsteady motion, in a compressible fluid, in a viscous one, in three dimensions, in turbulent flow?

II. — ECOULEMENT PLAN ROTATIONNEL D'UN FLUIDE INCOMPRESSIBLE NON VISQUEUX EN MOUVEMENT PERMANENT

PLANE ROTATIONAL FLOW OF AN INVISCID INCOMPRESSIBLE FLUID IN STEADY MOTION

Nous obtenons de l'équation de continuité :

Equation of continuity gives :

$$u_x + v_y = 0 \tag{2.1}$$

⁽³⁾ Voir MILNE-THOMSON, L. M. : « Theoretical Hydrodynamics », *Macmillan*, London (1955).

⁽³⁾ See MILNE-THOMSON, L. M.: *Theoretical Hydrodynamics*, *Macmillan*, London (1955).

les équations de mouvement d'Euler :

Euler's equations of motion :

$$uu_x + vu_y = -P_x \quad (2.2)$$

$$uv_x + vv_y = -P_y \quad (2.3)$$

En éliminant u_x de (2.2) et v_y de (2.3) au moyen de (2.1) :

Eliminating u_x from (2.2) and v_y from (2.3) by means of (2.1) :

$$P_x = uv_y - vu_y = -v^2 (u/v)_y = -v^2 (\cot \theta)_y \quad (2.4)$$

$$P_y = vu_x - uv_x = +v^2 (u/v)_x = +v^2 (\cot \theta)_x \quad (2.5)$$

En éliminant v^2 :

Eliminating v^2 :

$$P_x (\cot \theta)_x + P_y (\cot \theta)_y = \text{grad } P \cdot \text{grad } \cot \theta = 0 \quad (2.6)$$

Le point (.) symbolise la multiplication scalaire. Cette équation démontre l'orthogonalité des lignes isoclines et isopièzes dans un écoulement rotationnel (fig. 2).

En écoulement *potentiel*, en raison de (1.4), les isoclines sont normales aux isovels.

Dans les *gaz à faibles vitesses*, en raison de (1.5), les isoclines sont normales aux isobares.

The dot (.) represents scalar multiplication. This equation proves the orthogonality of isoclines and isopiestic lines in rotational flow. (Fig. 2)

In *potential flow*, because of (1.4), the isoclines are normal to the isovels.

In *gases at low velocities*, because of (1.5), the isoclines are normal to the isobars.

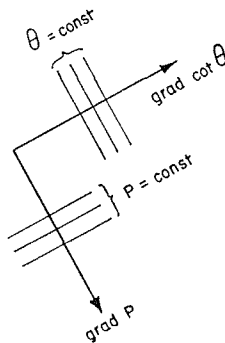


FIG. 2

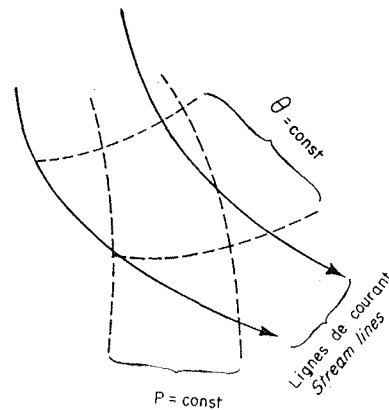


FIG. 3

Cette propriété trouve de nombreuses applications :

This property has many applications :

a) Si nous connaissons les lignes d'une catégorie (isoclines ou lignes isopièzes) théoriquement, par voie expérimentale ou graphique, nous pouvons aisément déterminer celles de l'autre catégorie; nous pouvons ensuite calculer v^2 au moyen de (2.4) ou (2.5) (fig. 3).

a) If one set of lines (isoclines, or isopiestic lines) is known by theory, experiment or graphically, the other set may easily be determined. Then v^2 may be computed by (2.4) or (2.5). (Fig. 3).

b) Beaucoup de veines liquides (jets libres, nappes) ont une section transversale plane dans laquelle les filets liquides sont parallèles, avec une courbure tendant à s'annuler, par exemple, la « vena contracta » d'un jet émergeant d'un orifice.

b) Many stream tubes (free jets, nappes) have often a plane cross-section where the streamlines are parallel with a vanishing curvature, e.g. vena contracta of a jet issuing from an orifice. In such a normal cross-section θ is constant, hence P is constant too by (2.4), (2.5). This reminds us of a similar result obtained in hydrostatics. Hence the rule :

Dans une section transversale normale telle que celle-ci, θ est constant, d'où P est constant également d'après (2.4), (2.5). Ceci nous rappelle un résultat similaire obtenu en hydrostatique. D'où nous tirons la loi :

La répartition des pressions dans une section transversale normale à une veine liquide à filets parallèles est *quasi hydrostatique*.

« Quasi », parce que, en hydrostatique, $P=C^{te}$ partout, tandis qu'ici $P=C^{te}$ seulement dans une section normale, et la constante peut varier de section à section.

c) Pour toute paroi solide d'équation $f(x, y)=0$, la ligne de courant est tangente à la paroi : la paroi est une ligne de courant. A la paroi :

$$\cot \theta = u/v = -f_y/f_x$$

et là :

There :

$$\text{grad } P \cdot \text{grad } (f_y/f_x) = 0$$

The distribution of pressures in a cross-section normal to a parallel stream-tube is *quasi-hydrostatic*.

Quasi — because in hydrostatics $P=\text{const}$ everywhere, whereas here $P=\text{const}$ only in one normal section, and the constant may be different from section to section.

c) At any solid wall of the equation $f(x, y)=0$ the stream-line is tangent to the wall : the wall is a streamline. At the wall :

III. — ECOULEMENT PLAN NON PERMANENT D'UN FLUIDE INCOMPRESSIBLE NON VISQUEUX PLANE UNSTEADY FLOW OF AN INVISCID INCOMPRESSIBLE FLUID

(2.2) et (2.3) sont remplacées par :

(2.2) and (2.3) are replaced by :

$$u_t + uu_x + vu_y = -P_x \tag{3.1}$$

$$v_t + uv_x + vv_y = -P_y \tag{3.2}$$

En procédant comme au paragraphe 2, nous obtenons (fig. 4) :

Proceeding as in Section 2, we obtain (Fig. 4) :

$$(P_x + u_t) (\cot \theta)_x + (P_y + v_t) (\cot \theta)_y = (\text{grad } P + \underline{V}_t) \cdot \text{grad } \cot \theta = 0 \tag{3.3}$$

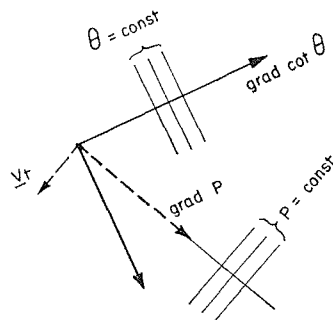


FIG. 4

Dans un jet parallèle :

In parallel jet :

$$\text{grad } P = -\underline{V}_t \tag{3.4}$$

**IV. — ECOULEMENT PLAN NON PERMANENT D'UN FLUIDE
VISQUEUX INCOMPRESSIBLE**
PLANE UNSTEADY FLOW OF A VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID

(2.2) et (2.3) sont remplacées par les équations de Navier-Stokes :

(2.2) and (2.3) are replaced by the Navier-Stokes equations :

$$u_t + uu_x + vu_y = -P_x + \nu \nabla^2 u \tag{4.1}$$

$$v_t + uv_x + vv_y = -P_y + \nu \nabla^2 v \tag{4.2}$$

ν = viscosité cinématique. En procédant comme au paragraphe 3, nous obtenons (fig. 5) :

ν = kinematic viscosity. Proceeding as in section 3, we obtain (Fig. 5) :

$$(P_x + u_t - \nu \nabla^2 u) (\cot \theta)_x + (P_y + v_t - \nu \nabla^2 v) (\cot \theta)_y = (\text{grad } P + \underline{V}_t + \nu \text{ rot rot } \underline{V}) \cdot \text{grad } \cot \theta = 0 \tag{4.3}$$

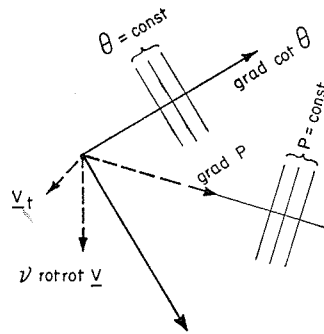


FIG. 5

comme en écoulement incompressible :

as in incompressible flow :

$$\text{rot rot } \underline{V} = -\nabla^2 \underline{V} \tag{4.4}$$

Dans un jet parallèle :

In a parallel jet :

$$\text{grad } P = -\underline{V}_t - \nu \text{ rot rot } \underline{V} \tag{4.5}$$

Dans le cas d'un écoulement visqueux en contact avec une paroi plane solide, nous pouvons prendre l'axe des y normal à la paroi et l'axe des x le long de la paroi. Dans ce cas, la paroi est une isocline et le long de celle-ci, (4.5) est valable. Comme, en n'importe quel point de la paroi, $\underline{V} = 0$, il en découle que $u, v, \underline{V}_t, u_t, v_t, u_x, u_{xx} = 0$ aussi, à la paroi. Comme, d'après (4.4) également, $-\text{rot rot } \underline{V}$ a les composantes $\nabla^2 u, \nabla^2 v$:

In the case of viscous flow in contact with a solid plane wall, we may choose the y -axis normal to the wall, the x -axis along the wall. In this case the wall is an isocline and along it (4.5) is valid. As at any point of the wall $\underline{V} = 0$, hence $u, v, \underline{V}_t, u_t, v_t, u_x, u_{xx} = 0$ too at the wall. As also by (4.4) $-\text{rot rot } \underline{V}$ has the components $\nabla^2 u, \nabla^2 v$:

$$P_x = \nu \cdot u_{yy} \tag{4.6}$$

d'où la loi :

Hence the rule :

Si le profil de vitesse est convexe à la paroi ($u_{yy} < 0$), $P_x < 0$, la hauteur piézométrique dé-

If the velocity profile is convex at the wall ($u_{yy} < 0$), $P_x < 0$ the piezometric head decrea-

croît dans le sens de l'écoulement. Mais si le profil de vitesse est concave à la paroi ($u_{yy} > 0$), $P_x > 0$, la hauteur piézométrique croît dans le sens de l'écoulement et celui-ci est instable (4).

ses in the direction of flow. But if the velocity profile is concave at the wall ($u_{yy} > 0$), $P_x > 0$ the piezometric head increases in the direction of flow and the flow is unstable (4).

V. — ECOULEMENT PLAN NON PERMANENT D'UN FLUIDE NON VISQUEUX ET COMPRESSIBLE

PLANE UNSTEADY FLOW OF AN INVISCID COMPRESSIBLE FLUID

(3.1) et (3.2) restent valables, mais P n'est pas déterminé par (1.2), mais par :

(3.1) and (3.2) remain valid, only P is not defined by (1.2), but by :

$$P = gZ + f(dp/\rho) \tag{5.1}$$

Nous avons :

We have :

$$\text{grad } P = -g \cdot \underline{1}_z + (\text{grad } p)/\rho \tag{5.2}$$

$\underline{1}_z$ est un vecteur unitaire vertical dirigé vers le haut. (2.1) est remplacé par :

$\underline{1}_z$ is a vertical unit vector directed upwards. (2.1) is replaced by :

$$(\rho u)_x + (\rho v)_y + \rho_t = 0 \tag{5.3}$$

ou :

or :

$$u_x + v_y = -(\underline{V} \cdot \text{grad } \ln \rho) - (\ln \rho)_t \tag{5.4}$$

En procédant comme ci-dessus, nous obtenons :

Proceeding as above, we obtain :

$$[P_x + u_t - u(\underline{V} \cdot \text{grad } \ln \rho) - u(\ln \rho)_t] (\cot \theta)_x + [P_y + v_t - v(\underline{V} \cdot \text{grad } \ln \rho) - v(\ln \rho)_t] (\cot \theta)_y = \{ \text{grad } P + \underline{V}_t - \underline{V} [(\underline{V} \cdot \text{grad } \ln \rho) + (\ln \rho)_t] \} \cdot \text{grad } \cot \theta = 0 \tag{5.5}$$

Dans un jet parallèle :

In a parallel jet :

$$\text{grad } P = -\underline{V}_t + \underline{V} [(\underline{V} \cdot \text{grad } \ln \rho) + (\ln \rho)_t] \tag{5.6}$$

En écoulement permanent (fig. 6) :

In steady flow (Fig. 6) :

$$\text{grad } P = b \cdot \underline{V}$$

où b est la valeur scalaire de la parenthèse.

where b is the scalar value of the paranthesis.

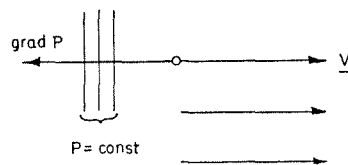


FIG. 6

(4) Ceci correspond au critère de l'instabilité de l'écoulement de Rayleigh-Tollmien : le profil concave ne peut croître jusqu'à l'infini, de sorte qu'il doit s'infléchir quelque part et il devient convexe. L'existence d'un point d'inflexion est un critère d'instabilité suffisant. Voir SCHLICHTING, H. : « Grenzschicht-Theorie », Braun, Karlsruhe (1951), p. 59; LIN, C. C. : « The theory of hydrodynamic stability », Camb. Univ. Press (1955).

(4) This corresponds to the Rayleigh-Tollmien criterion of instability of flow: the concave profile cannot grow to infinity, so it has to turn somewhere and becomes convex. The existence of an inflexion point is a sufficient criterion of instability. See SCHLICHTING, H.: Grenzschicht-Theorie, Braun, Karlsruhe (1951), p. 59; LIN, C.C.: The theory of hydrodynamic stability, Camb. Univ. Press (1955).

VI. — ECOULEMENT AXI-SYMETRIQUE D'UN FLUIDE NON VISQUEUX ET INCOMPRESSIBLE

AXIALLY-SYMMETRICAL FLOW OF AN INVISCID INCOMPRESSIBLE FLUID

Equation de continuité :

Equation of continuity :

$$(ru)_r + (rv)_y = 0 \tag{6.1}$$

Equations de mouvement d'Euler en coordonnées ⁽⁵⁾ cylindriques :

Euler's equations of motion in cylindrical coordinates ⁽⁵⁾ :

$$u_t + uu_r + vv_y = -P_r \tag{6.2}$$

$$v_t + uv_r + vv_y = -P_y \tag{6.3}$$

$$\cot \theta = u/v \tag{6.4}$$

u = composante radiale (direction r); v = composante axiale (direction y).

u = radial component (direction r); v = axial component (direction y).

En éliminant u_r de (6.2) et v_y de (6.3) au moyen de (6.1) :

Eliminating u_r from (6.2) and v_y from (6.3) by means of (6.1) :

$$P_r + u_t - u^2/r = -v^2 (\cot \theta)_y \tag{6.5}$$

$$P_y + v_t - uv/r = +v^2 (\cot \theta)_r \tag{6.6}$$

En éliminant v^2 :

Eliminating v^2 :

$$(P_r + u_t - u \cdot u/r) (\cot \theta)_r + (P_y + v_t - v \cdot u/r) (\cot \theta)_y = (\text{grad } P + \underline{V}_t - \underline{V} \cdot u/r) \cdot \text{grad } \cot \theta = 0 \tag{6.7}$$

Ceci est montré sur la figure 7 pour l'écoulement permanent :

In steady flow this is shown in Fig. 7 :

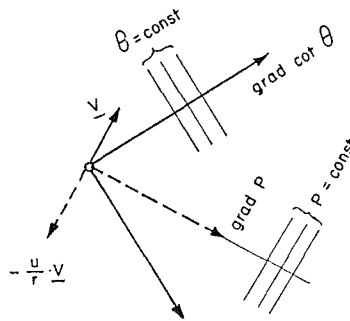


FIG. 7

Ici $\theta = \text{Cte}$ signifie que nous avons un écoulement parallèle dans un plan diamétral, ce plan tournant autour d'un axe.

Here $\theta = \text{const}$ means parallel flow in a diametral plane, the plane being rotated round an axis.

Dans un tel écoulement :

In such a flow :

$$\text{grad } P = \underline{V}_t - \underline{V} \cdot u/r \tag{6.8}$$

⁽⁵⁾ Sans le terme azimutal, à cause de la symétrie axiale.

⁽⁵⁾ Without the azimuthal term, because of the axial symmetry.

VII. — ECOULEMENT CURVILIGNE A TROIS DIMENSIONS D'UN FLUIDE VISQUEUX ET INCOMPRESSIBLE

THREE-DIMENSIONAL CURVILINEAR FLOW OF A VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID

L'écoulement visqueux d'un fluide incompressible obéit à l'équation de continuité :

Viscous flow of an incompressible fluid obeys the equation of continuity :

$$\text{div } \underline{V} = 0 \tag{7.1}$$

et aux équations de mouvement de Navier-Stokes qui donnent le vecteur d'accélération \underline{a} :

and the Navier-Stokes equations of motion which give the acceleration vector \underline{a} :

$$\underline{a} = \underline{V}_t - \underline{V} \times \text{rot } \underline{V} + \text{grad } (V^2/2) = - \text{grad } P - \nu \text{rot rot } \underline{V} \tag{7.2}$$

\times : symbole de multiplication vectorielle.

(\times) — symbol of vectorial multiplication.

Considérons trois familles de surfaces réciproquement orthogonales dans un système de coordonnées cartésiennes X, Y, Z :

Let us consider in a cartesian system of coordinates X, Y, Z three families of mutually orthogonal surfaces :

$$f_1(X, Y, Z) = x; \quad f_2(X, Y, Z) = y; \quad f_3(X, Y, Z) = z \tag{7.3}$$

En général, il n'y a qu'une seule surface de chaque famille qui passe par un point donné M(X, Y, Z), que l'on peut également définir par les trois paramètres ou coordonnées générales ou curvilignes x, y, z⁽⁶⁾.

In general only one surface of each family passes through a given point M(X, Y, Z), which may also be defined by the three general or curvilinear parameters or coordinates x, y, z⁽⁶⁾.

La longueur de la normale limitée par les surfaces x et x+dx est donnée par :

The length of the normal intercepted between the surfaces x and x+dx is given by :

$$ds_1 = h_1 dx; \quad 1/h_1^2 = x_x^2 + x_y^2 + x_z^2 \tag{7.4}$$

Les indices inférieurs représentent des dérivées partielles. De même façon, la distance normale entre les surfaces y, y+dy est h₂dy, et celle entre les surfaces z, z+dz est h₃dz.

The lower letter indices represent partial derivatives. Similarly the normal distance between the surfaces y, y+dy is h₂dy, and between the surfaces z, z+dz it is h₃dz.

Soit u, v, w les composantes de la vitesse \underline{V} dans les trois directions de x, y, z augmentant (appelées également les lignes x, y, z).

Let u, v, w be the components of the velocity \underline{V} in the three directions of x, y, z increasing (called also the x, y, z—lines).

L'équation de continuité (7.1) devient :

Equation of continuity (7.1) becomes :

$$h_1 h_2 h_3 \text{div } \underline{V} = (h_2 h_3 u)_x + (h_3 h_1 v)_y + (h_1 h_2 w)_z = 0 \tag{7.5}$$

(6) Voir LOVE (A. E. H.) : « A treatise on the mathematical theory of elasticity », *Camb. Univ. Press* (1927), page 51. Nous écrivons h_i comme on le fait aujourd'hui, qui correspond au 1/h_i de Love; voir par exemple MILNE-THOMSON, l.c., p. 57-60; STRATTON (J. A.) : « Electromagnetic Theory », *McGraw-Hill*, New York (1941), p. 47-59; OLLENDORFF (F.) : « Die Welt der Vektoren, Springer, Vienne (1950); BRILLOUIN (L.) : « Les tenseurs en mécanique et en élasticité », *Dover*, New York (1946). Les h_i² sont équivalents aux composantes g_{ii} du tenseur métrique de Riemann.

(6) See LOVE, A. E. H.: "A treatise on the mathematical theory of elasticity," *Camb. Univ. Press* (1927), p. 51. We write h_i for Love's 1/h_i following modern usage, see e.g. MILNE-THOMSON, l.c., p. 57-60; STRATTON, J.A.: "Electromagnetic theory," *McGraw-Hill*, New York (1941), p. 47-59; OLLENDORFF, F.: "Die Welt der Vektoren," *Springer*, Wien (1950); BRILLOUIN, L.: "Les tenseurs en mécanique et en élasticité," *Dover*, New York (1946). The h_i² are equivalent to the components g_{ii} of the Riemannian metric tensor.

En écoulement à deux dimensions, c'est-à-dire écoulement dans la surface courbe $z=C^te$, nous avons $w=0$ et $\partial/\partial z=0$.

Alors (7.5) devient :

$$(h_2 h_3 u)_x + (h_3 h_1 v)_y = h_2 h_3 u_x + h_3 h_1 v_y + (h_2 h_3)_x u + (h_3 h_1)_y v = 0 \tag{7.6}$$

Le vecteur gradient P a les composantes $P_x/h_1; P_y/h_2; 0$

(7.7)

\underline{V}_t a les composantes $u_t; v_t; 0$

(7.8)

Le vecteur grad $(V^2/2) = \text{grad} [(u^2 + v^2)/2]$ a les composantes :

$$(uu_x + vv_x)/h_1; (uu_y + vv_y)/h_2; 0 \tag{7.9}$$

Le vecteur rot \underline{V} est défini par :

$$h_1 h_2 h_3 \text{rot } \underline{V} = \begin{vmatrix} h_1 1_x & h_2 1_y & h_3 1_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ h_1 u & h_1 v & h_1 w \end{vmatrix} \tag{7.10}$$

et a les composantes :

$$0; 0;$$

In two-dimensional flow, i.e. flow in the curved surface $z=\text{const}$, we have $w=0$ and $\partial/\partial z=0$.

Then (7.5) becomes :

The vector grad P as the components $P_x/h_1; P_y/h_2; 0$

(7.7)

\underline{V}_t has the components $u_t; v_t; 0$

(7.8)

The vector grad $(V^2/2) = \text{grad} [(u^2 + v^2)/2]$ has the components :

The vector rot \underline{V} is defined by :

and has the components :

$$[(h_2 v)_x - (h_1 u)_y]/h_1 h_2 \tag{7.11}$$

Le vecteur :

$$\underline{V} \times \text{rot } \underline{V} = \begin{vmatrix} 1_x & 1_y & 1_z \\ u & v & w \\ 0 & 0 & [(h_2 v)_x - (h_1 u)_y]/h_1 h_2 \end{vmatrix} \tag{7.12}$$

a les composantes :

$$[(h_2 v)_x - (h_1 u)_y] v/h_1 h_2;$$

has the components :

$$- [(h_2 v)_x - (h_1 u)_y] u/h_1 h_2; 0 \tag{7.13}$$

Le vecteur rot rot \underline{V} tel qu'il est défini par :

$$h_1 h_2 h_3 \text{rot rot } \underline{V} = \begin{vmatrix} h_1 1_x & h_2 1_y & h_3 1_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & [(h_2 v)_x - (h_1 u)_y]/h_1 h_2 \end{vmatrix} \tag{7.14}$$

a les composantes :

$$\{ [(h_2 v)_x - (h_1 u)_y]/h_1 h_2 \}_y/h_2 h_3;$$

has the components :

$$- \{ [(h_2 v)_x - (h_1 u)_y]/h_1 h_2 \}_x/h_1 h_3; 0 \tag{7.15}$$

En introduisant ces expressions dans (7.2) :

Introducing these expressions into (7-2) :

$$a_1 = u_t - [(h_2 v)_x - (h_1 u)_y] v/h_1 h_2 + (uu_x + vv_x)/h_1 = - P_x/h_1 - \{ [(h_2 v)_x - (h_1 u)_y]/h_1 h_2 \}_y/h_2 h_3 \tag{7.16}$$

$$a_2 = v_t + [(h_2 v)_x - (h_1 u)_y] u/h_1 h_2 + (uu_y + vv_y)/h_2 = - P_y/h_1 + \{ [(h_2 v)_x - (h_1 u)_y]/h_1 h_2 \}_x/h_1 h_3 \tag{7.17}$$

En mettant sous une autre forme, après avoir éliminé u_x de (7.16) et v_y de (7.17) au moyen de (7.6), nous obtenons :

$$P_x/h_1 + u_t + v(\text{rot rot } \underline{V})_1 = (u/v)_y v^2/h_2 + uv \cdot (\ln h_3)_y/h_2 + u^2 \cdot (\ln h_2)_x/h_1 + V^2 (\ln h_2)_x/h_1 \quad (7.18)$$

$$P_y/h_2 + v_t + v(\text{rot rot } \underline{V})_2 = - (u/v)_x v^2/h_1 + v^2 (\ln h_3)_y/h_2 + uv \cdot (\ln h_3)_x/h_1 + V^2 (\ln h_1)_y/h_1 \quad (7.19)$$

En multipliant (7.18) par $(u/v)_x/h_1$ et (7.19) par $(u/v)_y/h_2$, et en ajoutant :

$$\begin{aligned} & [\text{grad } P + \underline{V}_t + v \text{ rot rot } \underline{V} + \underline{V} (\underline{V} \cdot \text{grad } \ln h_3)] \cdot \text{grad } (u/v) \\ & = V^2 [(\ln h_2)_x/h_1 \cdot (u/v)_x/h_1 + (\ln h_1)_y/h_2 \cdot (u/v)_y/h_2] \end{aligned} \quad (7.20)$$

a) Quand $h_1 = h_2 = f(x)$ (7.21) a) When $h_1 = h_2 = f(x)$ (7.21)

$$[\text{grad } P + \underline{V}_t + v \text{ rot rot } \underline{V} + \underline{V} (\underline{V} \cdot \text{grad } \ln h_3) - V^2 \text{ grad } \ln h_2] \cdot \text{grad } (u/v) = 0 \quad (7.22)$$

b) Quand $h_1 = h_2 = f(y)$: (7.23) b) When $h_1 = h_2 = f(y)$.

$$[\text{grad } P + \underline{V}_t + v \text{ rot rot } \underline{V} + \underline{V} (\underline{V} \cdot \text{grad } \ln h_3) - V^2 \text{ grad } \ln h_1] \cdot \text{grad } (u/v) = 0 \quad (7.23)$$

c) Quand $h_{2x} = 0; h_{1y} = 0$ (7.24) c) When $h_{2x} = 0; h_{1y} = 0$ (7.24)

$$[\text{grad } P + \underline{V}_t + v \text{ rot rot } \underline{V} + \underline{V} (\underline{V} \cdot \text{grad } \ln h_3)] \cdot \text{grad } (u/v) = 0 \quad (7.25)$$

d) Quand $h_1 = h_2 = h_3 = 1$ (coordonnées cartésiennes, nous obtenons la formule (4.3) pour écoulement plan simple.

Re-arranging, after elimination of u_x from (7.16) and of v_y from (7.17) by means of (7.6), we get :

Multiplying (7.18) by $(u/v)_x/h_1$ and (7.19) by $(u/v)_y/h_2$, and adding :

d) When $h_1 = h_2 = h_3 = 1$ (cartesian coordinates) we obtain formula (4.3) for simple plane flow.

EXEMPLES :

EXAMPLES :

1) Coordonnées cylindriques :

1) Cylindrical coordinates :

$$\begin{aligned} x &= r ; & h_1 &= 1 \\ y &= y ; & h_2 &= 1 \\ z &= 0 ; & h_3 &= r \end{aligned}$$

Ici $h_1 = h_2$, d'où, suivant (7.22), parce que $(\ln h_3) = 1/r$:

Here $h_1 = h_2$, hence by (7.22) as $(\ln h_3) = 1/r$:

$$(\text{grad } P + \underline{V}_t + v \text{ rot rot } \underline{V} - \underline{V} \cdot u/r) \text{ grad } (u/v) = 0 \quad (7.26)$$

Ce qui est exactement la formule (6.7).

This is exactly formula (6.7).

2) Coordonnées paraboliques :

2) Parabolic coordinates :

$$h_1 = h_2 = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad h_3 = xy \quad (7.27)$$

Si, dans une zone $u/v = C^{\text{te}}$, le jet n'est pas parallèle, mais est caractérisé par une inclinaison égale par rapport aux courbes des x , nous avons alors :

If in a zone $u/v = \text{const}$, the jet is not parallel, but is characterised by equal inclination to the curved x — lines; we have then :

Dans le cas a) :

In case a) :

$$\text{grad } P = - \underline{V}_t - v \text{ rot rot } \underline{V} - \underline{V} (\underline{V} \cdot \text{grad } \ln h_3) + V^2 \text{ grad } \ln h_2 \quad (7.28)$$

Dans le cas *b*) :

In case *b*) :

$$\text{grad } P = -\underline{V}_t - \nu \text{ rot rot } \underline{V} - \underline{V} (\underline{V} \cdot \text{grad } \ln h_3) + V^2 \text{ grad } \ln h_1 \quad (7.29)$$

Dans le cas *c*) :

In case *c*) :

$$\text{grad } P = -\underline{V}_t - \nu \text{ rot rot } \underline{V} - \underline{V} (\underline{V} \cdot \text{grad } \ln h_3) \quad (7.30)$$

Dans le cas général, il n'existe pas de relation d'orthogonalité dans les surfaces courbes, excepté dans les cas *a*), *b*), *c*).

In the general case there exists no orthogonality relationship in curved surfaces, except in the cases *a*), *b*), *c*).

VIII. — SUR D'AUTRES PROPRIÉTÉS D'UN ÉCOULEMENT PLAN VISQUEUX PERMANENT

ON FURTHER PROPERTIES OF PLANE STEADY VISCOUS FLOW

Les équations de Navier-Stokes (4.1), (4.2) sont :

The Navier-Stokes equations (4.1), (4.2) are :

$$uu_x + vu_y = -P_x + \nu (u_{xx} + u_{yy}) \quad (8.1)$$

$$uv_x + vv_y = -P_y + \nu (v_{xx} + v_{yy}) \quad (8.2)$$

La continuité donne :

Continuity gives :

$$u_x + v_y = 0 \quad (8.3)$$

En éliminant u_x de (8.1) et v_y de (8.2) d'après (8.3) :

Eliminating u_x from (8.1) and v_y from (8.2) by (8.3) :

$$vu_y - uv_y = v^2 (\cot \theta)_y = -P_x - \nu \zeta_y \quad (8.4)$$

$$uv_x - vu_x = -v^2 (\cot \theta)_x = -P_y + \nu \zeta_x \quad (8.5)$$

où la seule composante de vorticité (dans la direction z) est :

where the only component of vorticity (in direction z) is :

$$\zeta = v_x - u_y \quad (8.6)$$

En multipliant (8.4) par $(\cot \theta)_x$ et (8.5) par $(\cot \theta)_y$ et ajoutant :

Multiplying (8.4) by $(\cot \theta)_x$ and (8.5) by $(\cot \theta)_y$ and adding :

$$\text{grad } P \cdot \text{grad } \cot \theta = \nu \cdot |[\text{grad } \zeta \times \text{grad } \cot \theta]_3 \quad (8.7)$$

où l'indice inférieur 3 représente la composante du produit vectoriel (symbole \times) le long de Z .

En ajoutant (8.3) multiplié par u , à (8.4), et multiplié par v , à (8.5), nous obtenons :

where the lower index 3 represents the component of the vectorial product (symbol \times) along Z .

Adding (8.3) multiplied by u to (8.4), and multiplied by v to (8.5), we get :

$$(u^2)_x + (uv)_y = -P_x - \nu \zeta_y \quad (8.8)$$

$$(uv)_x + (v^2)_y = -P_y + \nu \zeta_x \quad (8.9)$$

En introduisant l'énergie mécanique spécifique de l'écoulement (par rapport à la masse unitaire) :

Introducing the specific mechanical energy of flow (per unit mass) :

$$E = P + V^2/2 = P + (u^2 + v^2)/2 \tag{8.10}$$

$$\left(\frac{u^2 - v^2}{2}\right)_x + (uv)_y = -E_x - v\zeta_y \tag{8.11}$$

$$(uv)_x - \left(\frac{u^2 - v^2}{2}\right)_y = -E_y + v\zeta_x \tag{8.12}$$

ou :

or :

$$\left(\frac{u^2 - v^2}{2} + E\right)_x + (uv + v\zeta)_y = 0 \tag{8.13}$$

$$\left(\frac{u^2 - v^2}{2} + E\right)_y + (uv - v\zeta)_x = 0 \tag{8.14}$$

En dérivant (8.11) par rapport à x (puis à y), et (8.12) par rapport à y (puis à x), en ajoutant et en soustrayant :

Differentiating (8.11) with respect to x (then y), and (8.12) with respect to y (then x), adding and subtracting :

$$\nabla^2 (uv) = -2 E_{xy} + v (\zeta_{xx} - \zeta_{yy}) = u_{yyy} + v_{xxx} \tag{8.15}$$

$$\nabla^2 \frac{u^2 - v^2}{2} = E_{yy} - E_{xx} - 2 v\zeta_{xy} \tag{8.16}$$

$$(uv)_{yy} - (uv)_{xx} + (u^2 - v^2)_{xy} = -v \nabla^2 \zeta \tag{8.17}$$

$$(u^2 - v^2)_{xx} - (u^2 - v^2)_{yy} + 4 (uv)_{xy} = -\nabla^2 E \tag{8.18}$$

(8.8) et (8.9) peuvent également s'écrire :

(8.8) and (8.9) may be written also :

$$(u^2 + P)_x + (uv + v\zeta)_y = 0 \tag{8.19}$$

$$(v^2 + P)_y + (uv - v\zeta)_x = 0 \tag{8.20}$$

En dérivant (8.19) par rapport à x , et (8.20) par rapport à y , en ajoutant et en soustrayant :

Differentiating (8.19) with respect to x , and (8.20) with respect to y , adding and subtracting :

$$(u^2 + P)_{xx} - (v^2 + P)_{yy} + 2 v\zeta_{xy} = 0 \tag{8.21}$$

$$(u^2 + P)_{xx} + (v^2 + P)_{yy} + 2 (uv)_{xy} = 0 \tag{8.22}$$