Passage de la houle sur un seuil

The passage of waves over a bar

par P. JOLAS

INGÉNIEUR A ÉLECTRICITÉ DE FRANCE
DÉTACHÉ AU LABORATOIRE DE MÉCANIQUE DES FLUIDES DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Communication présentée à la Société Hydrotechnique de France le 18 juin 1959

Dans le cadre des recherches sur la houle effectuées au Laboratoire de Mécanique des Fluides de l'Université de Grenoble, nous nous sommes intéressés à l'influence d'un seuil immergé sur la propagation de la houle. Pour un seuil rectangulaire de faible hauteur, un calcul linéaire semble suffisant pour interpréter les faits observés. Pour une profondeur relative plus faible au-dessus du seuil, on constate l'apparition de houles transmises très courtes, que l'on essaie d'interpréter par une théorie non linéaire.

During the course of research on waves carried out at the University of Grenoble Mechanics of Fluids Laboratory, the author became concerned with the effect of a submerged bar on wave propagation. A linear treatment appears to be adequate for interpreting observations involving a low rectangular bar. When the depth above the bar is relatively smaller, very short transmitted waves are observed and an attempt is made to interpret them by a non-linear treatment.

Il y a quelques années, E.O. Macagno [1] avait étudié expérimentalement le problème de la propagation de la houle dans un canal présentant un passage en charge (problème du dock flottant) et avait constaté un bon accord entre les résultats d'une théorie globale et les données expérimentales. On se propose ici d'étudier un problème voisin : celui de la propagation de la houle dans un canal présentant un haut-fond (digue submergée, banc de sable, par exemple). Nous schématisons le problème de la façon suivante : on considère une houle plane se propageant en profondeur constante; cette onde incidente est supposée pure. L'onde se réfléchit toujours partiellement sur l'obstacle et une partie de son énergie est transmise à l'aval : sous forme d'une onde pure si la profondeur relative au-dessus du seuil est suffisante, sous forme d'une houle complexe si la profondeur est moins grande; enfin, si la profondeur est très faible, on a déferlement sur le seuil et la houle transmise est irrégulière.

En se limitant, ici, au cas d'un obstacle de section rectangulaire, nous nous proposons de déterminer, par une théorie du premier ordre que nous compléterons par des expériences, quelques coefficients de transmission et de réflexion du seuil pour une houle pure; puis nous essayons d'interpréter l'apparition d'harmoniques à l'aval du seuil.

I. — THÉORIE LINÉAIRE. — VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE

On appellera coefficient de transmission et coefficient de réflexion C_t et C_r, les nombres complexes définis comme suit : le module c_t de C_t est égal au rapport de l'amplitude de la houle transmise à celle de la houle incidente; son argument est la différence entre la phase de l'onde transmise et celle qu'aurait au même point l'onde incidente qui se serait propagée en l'absence de seuil. De même, le module c_r de C_r est égal au rapport de l'amplitude de la houle réfléchie à celle de la houle incidente. Son argument est la différence entre la phase de la houle réfléchie et celle de la houle incidente qui se serait réfléchie totalement au droit du bord amont du seuil.

Kenzo Takano [2], Attaché de recherche du

C.N.R.S. au Laboratoire de Mécanique des Fluides, en utilisant la méthode d'Apté, qui se trouve être ici d'un emploi commode, a formé la solution approchée du problème linéaire. Connaissant les caractéristiques de la houle incidente, il détermine celles des houles réfléchie et transmise ainsi que l'agitation sur le seuil en fonction des dimensions géométriques de celui-ci. Voici le principe de son calcul, qui ramène la solution du problème à la résolution d'un système infini d'équations linéaires.

Dans le plan du mouvement, on prend l'axe Oz vertical ascendant suivant le bord amont de l'obstacle : Ox horizontal suivant le fond du canal dans le sens de propagation des ondes incidentes. L'obstacle, de section rectangulaire, a une longueur l, une hauteur h_0; la profondeur d'eau dans le canal est h; on note T, $2\pi/m$ et $2\pi/\mu$ la période et les longueurs d'onde des houles en profondeur h et $h - h_0$ respectivement.

On décompose le canal en trois domaines : amont, au-dessus du seuil et aval; $D_{1,2}$, D_0 et D_3, définis respectivement par les inégalités :

$$-\infty < x \leqslant 0 \qquad 0 \leqslant z \leqslant h \qquad (D_{1,2})$$
$$0 \leqslant x \leqslant l \qquad h_0 \leqslant z \leqslant h \qquad (D_0)$$
$$l \leqslant x < \infty \qquad 0 \leqslant z \leqslant h \qquad (D_3)$$

On suppose le mouvement irrotationnel et on définit dans les domaines $D_{1,2}$, D_0 et D_3 respectivement, les potentiels $\Phi_1 + \Phi_2$, Φ_0 et Φ_3 des houles incidente et réfléchie, de l'agitation sur le seuil et de la houle transmise, sous la forme :

$$\Phi_1 = A_1 \operatorname{ch} mz\, e^{-imx}$$

$$\Phi_2 = A_2 \operatorname{ch} mz\, e^{imx} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \sigma_n z\, e^{-\sigma_n x}$$

$$\Phi_3 = A_3 \operatorname{ch} mz\, e^{-im(x-l)} + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \cos \sigma_n z\, e^{-\sigma_n (x-l)}$$

$$\Phi_0 = A_4 \operatorname{ch} \mu (z - h_0)\, e^{i\mu x} + A_5 \operatorname{ch} \mu (z - h_0)\, e^{-i\mu x}$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (C_n\, e^{-\lambda_n x} + D_n\, e^{-\lambda_n (x-l)}) \cos \lambda_n (z - l)$$

avec :

$$A_n = a_n\, e^{i(kt+\alpha_n)}$$
$$A_1 = a_1\, e^{ikt}$$

Les constantes σ_n et λ_n sont définies par les relations :

$$4\pi^2/T^2 = k^2 = -g\sigma_n \operatorname{tg} \sigma_n h = -g\lambda_n \operatorname{tg} \lambda_n (h - h_0)$$

On montre en effet que, moyennant certaines hypothèses, Φ_0, Φ_2 et Φ_3 admettent des développements du type précédent. En particulier, on sait que les ondes transmise et réfléchie subissent des déformations au voisinage des bords amont et aval du seuil; ces déformations sont localisées et s'amortissent rapidement quand on s'en éloigne.

Le terme A_1 caractérisant la houle incidente étant connu, il s'agit de déterminer les inconnues complexes A_2, A_3, A_4, A_5 et B_n, C_n, D_n, G_n. Les conditions aux limites sont les suivantes : pression constante à la surface libre, vitesse normale nulle aux parois, potentiel et gradient de potentiel continus aux frontières communes aux domaines $D_{1,2}$ et D_0, D_0 et D_3. On montre que ces conditions entraînent pour les inconnues complexes, d'être solutions d'un système infini d'équations linéaires. Ce système linéaire infini est d'une forme beaucoup plus compliquée que celle obtenue par Takano [2] avec les mêmes conditions aux limites pour le problème de passage en charge de E.O. Macagno.

Les essais de vérification expérimentale ont été réalisés dans le canal à houle du Laboratoire déjà décrit par ailleurs. La régulation électronique, récemment réalisée du mouvement d'entraînement du batteur, qui garantit la constance de la période à 0,001 seconde près, nous a permis de réaliser au S.M. des enregistrements continus [4]. Les profils temporels obtenus pour la surface libre se sont révélés assez bons pour permettre une analyse harmonique précise. Nous n'avons réalisé que des mesures portant sur la surface libre.

Pour déterminer les coefficients de réflexion du seuil, nous avons renoncé à la méthode qui consiste à mesurer à la pointe ou par photographie l'amplitude aux ventres et aux nœuds du clapotis partiel; cette méthode ne donne qu'un résultat global dans le cas d'une houle impure et surtout des résultats peu précis; d'autre part, la complexité des phénomènes à l'aval du seuil nous obligeait à faire l'enregistrement et l'analyse harmonique des déformations de la surface libre.

Nous avons employé la méthode suivante: pour connaître l'agitation à l'amont et à l'aval du seuil, nous avons toujours procédé à trois enregistrements amont et trois enregistrements aval; enregistrements simultanés en des abscisses différentes. Il est évident que deux enregistrements simultanés, à deux abscisses différentes, suffisent pour déterminer en module et en phase l'onde progressive et l'onde réfléchie en un point du canal; le troisième enregistrement sert de contrôle.

En fait, nous faisons le dépouillement, en opérant sur les données de plusieurs enregistrements, par une variante de la méthode des moindres carrés déjà utilisée par A. Daubert et G. Chabert d'Hières [5]. Représentons sous forme complexe par B_p, Z_p et z_p respectivement le profil enregistré, l'onde incidente et l'onde réfléchie à l'abscisse x_p, en se limitant au fondamental :

$$B_p = Z_p + z_p + \varepsilon_p$$

On cherche à rendre minimum :

$$\sum_{p=1}^{P} | \varepsilon_p |^2$$

On montre qu'on obtient un système de deux équations à deux inconnues, dont la solution s'écrit :

$$Z_0 = \frac{\sum\limits_{p,q} B_p\, e^{2\pi x_p i/\lambda}\, c^{-4\pi x_q i/\lambda} - P \sum\limits_{p} B_p\, e^{-2\pi x_p i/\lambda}}{\sum\limits_{p,q} e^{4\pi x_p i/\lambda}\, e^{-4\pi x_q i/\lambda} - P^2}$$

$$z_0 = \frac{P \sum\limits_{p} B_p\, e^{2\pi x_p i/\lambda} - \sum\limits_{p,q} B_p\, e^{-2\pi x_p i/\lambda}\, e^{4\pi x_q i/\lambda}}{\sum\limits_{p,q} e^{4\pi x_p i/\lambda}\, e^{-4\pi x_q i/\lambda} - P^2}$$

$p = 1, 2, 3 \ldots P$

$q = 1, 2, 3 \ldots P, \qquad q \neq p$

On a une idée de l'erreur faite sur la détermination des amplitudes par la valeur de l'écart quadratique moyen :

$$\sum_{p=1}^{3} | \varepsilon_p |^2$$

entre les valeurs calculées et les valeurs trouvées expérimentalement aux trois abscisses. Nous n'avons pas tenu compte dans les dépouillements des termes d'interaction, non linéaires, leur intervention n'apportant pas une diminution sensible de l'écart quadratique moyen.

Comme le canal n'est pas indéfini, il y a toujours une onde réfléchie par la plage d'amortissement. Nous en tenons compte dans le calcul du coefficient de réflexion. Soit A'_3 l'onde réfléchie par la plage; en reprenant les notations précédentes en amont du seuil, l'onde progressive est égale à A_1, l'onde réfléchie à $A_2 + C_t A'_3$; en aval, l'onde progressive est égale à $A_3 + C_r A'_3$, et l'onde réfléchie à A'_3. On montre que ceci est valable quel que soit le nombre de réflexions parasites sur la plage et le batteur.

Nous n'avons pas tenu compte de $C_r A'_3$ qui apporte dans le cas qui nous intéresse une correction négligeable.

Nous nous sommes placés dans des conditions où la théorie linéaire est susceptible de s'appliquer : profondeur relative assez grande au-dessus du seuil et faible cambrure. C_r et C_t sont pratiquement indépendants de la cambrure dans les conditions où nous opérons et compte tenu de la précision avec laquelle ils sont déterminés.

Nous avons comparé les résultats théoriques aux résultats expérimentaux pour $h_0 = 20$ cm, $L = 101$ cm, $h = 31{,}40$ cm, $T = 0{,}616$, $0{,}910$, $1{,}005$, $1{,}004$ s.

T	VALEURS EXPÉRIMENTALES			VALEURS THÉORIQUES		
	c_r	c_t	$c_r^2 + c_t^2$	c_r	c_t	$c_r^2 + c_t^2$
0,816	0,040	0,910	0,82	0,091	0,991	0,99
0,910	0,177	0,877	0,80	0,214	0,979	1,00
1,005	0,222	0,842	0,75	0,283	1,007	1,09
1,104	0,110	0,850	0,73	0,173	0,965	0,96

On constate des écarts assez importants entre les valeurs expérimentales et théoriques. Mais le calcul numérique n'est qu'un calcul de première approximation, ne tenant compte que du premier des termes de la série des termes non progressifs (ce qui explique que $c_t^2 + c_r^2$ puisse dépasser 1); et surtout la théorie ne prend pas en compte les pertes d'énergie dans l'écoulement qui semblent grandes.

II. — APPARITION DE HOULES DE COURTE PÉRIODE A L'AVAL DE L'OBSTACLE

Lors de son séjour au Laboratoire, le professeur J.J. Stoker avait attiré notre attention sur un phénomène intéressant qui est, d'ailleurs, à l'origine de nos études sur le seuil. On observe sur certaines photos aériennes qu'une houle attaquant un banc de sable engendre à l'aval de celui-ci des ondes de longueur d'onde très inférieures à celle de la houle génératrice. On a pu reproduire ce phénomène en canal avec des ondes incidentes très longues et en faire des enregistrements très réguliers. J. Kravtchenko a proposé l'interprétation qualitative suivante : on sait qu'une houle plane, pure, de gravité se propageant en profondeur constante h, est une onde indéformable qui comprend, à côté du fondamental linéaire de période T, des harmoniques non linéaires de période T/n. Si A est l'amplitude du fondamental, l'amplitude de l'harmonique est en gros fonction croissante de λ/h (inverse de la profondeur relative). De plus, comme R. Gouyon [5] l'a montré, si la courbure $2\,a/\lambda$ dépasse une certaine limite, la série de Fourier qui représente l'onde, cesse de converger, l'amplitude des harmoniques de période T/n peut prendre une grande valeur. Dans ces conditions, la houle abordant l'obstacle, voit sa profondeur relative diminuer, sa cambrure augmenter; les termes non linéaires en T/n prennent une grande importance et engendrent par-delà des ondes de même période T/n.

Pour un seuil rectangulaire, Takano a donné une expression approchée de l'amplitude du terme en T/2, mais les formules résolutives sont si compliquées qu'il n'a pas été possible jusqu'ici d'en faire une application numérique.

La détermination expérimentale est rendue délicate par suite de la présence des termes d'interaction. Toutefois, on peut estimer que ces termes d'interaction ne sont pas assez importants pour masquer l'allure du phénomène. On a constaté que les harmoniques donnés par l'analyse avaient des amplitudes qui se conservaient et que leur vitesse correspondait sensiblement à celle calculée par la formule d'Airy, on peut donc estimer que c'étaient, dans une forte proportion, des harmoniques vrais.

BIBLIOGRAPHIE

[1] MACAGNO (E. O.). « Houle dans un canal présentant un passage en charge. »
Thèse, n° 37. *La Houille Blanche,* 1953.

[2] TAKANO (K.). *C.R.A.S.*, t. 246, pp. 3580-3582; *C.R.A.S.*, t. 248, pp. 1768-1771.

[3] APTÉ (A.). Recherches théoriques et expérimentales sur les mouvements des liquides pesants avec surface libre.
Thèse. *Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air,* 1957, n° 333.

[4] SANTON (L.). Enregistrement graphique d'une houle de laboratoire. Analyse harmonique, pp. 188-207. *Proceedings of the Vth Conf. of Coastal Engineering,* 1952.

[5] MARCOU (C.). Communication au *Congrès de l'A.I.R.H.*, D.1, Lisbonne, 1957.

[6] GOUYON (R.). Thèse de Doctorat, juillet 1958. (A paraître dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.*)

DISCUSSION

Président : M. KRAVTCHENKO

M. le Président remercie M. JOLAS de son exposé et ouvre la discussion :

M. LARRAS fait part de trois doutes qui lui sont venus au cours de l'exposé :

1° la forme des potentiels utilisés donne à penser que les calculs présentés se rapportent au clapotis, et non pas à la houle, à moins qu'on additionne deux potentiels diphasés pour passer du clapotis à la houle en première approximation;

2° la grande hauteur relative du seuil (1/3 de la profondeur) donne à penser qu'il doit apparaître de forts tourbillons au droit des discontinuités de profondeur, ce qui pourrait affecter le caractère d'irrotationnalité du mouvement pris en compte dans les calculs;

3° la présence d'une plage d'amortissement à l'aval du seuil donne enfin à penser qu'il n'y aurait pas non plus, par suite des pertes d'énergie correspondantes, mouvement irrotationnel dans la totalité de la masse liquide prise en compte dans les calculs.

En ce qui concerne la première question, M. le Président estime qu'il ne s'agit là que d'une question d'écritures. Les équations du problème étant linéaires et homogènes, il suffit de conserver ou de supprimer le facteur e^{ikt} dans l'expression des A_n, B_n, etc., pour passer du cas de la houle à celui du clapotis. M. LARRAS lui-même précise que les expériences exposées se rapportent à la houle, et les calculs au clapotis, mais l'un peut compenser l'autre.

M. JOLAS répond à la deuxième question relative aux tourbillons qui peuvent se produire au droit des discontinuités de profondeur et que l'on a effectivement constatés. On essaie de les éviter au maximum, en opérant avec une cambrure faible. L'existence de ces tourbillons peut, dans une certaine mesure, expliquer la différence qu'il y a entre les valeurs théoriques et les valeurs expérimentales, encore que l'ordre de grandeur de cette erreur soit difficile à chiffrer.

A ce propos, M. le Président insiste sur la difficulté des calculs du professeur TAKANO qui ont été effectués d'une façon approchée et qui, malgré ce fait, ont conduit à des résultats concordant relativement bien avec l'expérience.

M. le Président demande à M. TAKANO de bien vouloir donner quelque détails sur le prolongement non linéaire de son calcul, consacré au cas particulier d'un problème posé par l'Amirauté américaine au professeur STOKER et qui consiste à interpréter théoriquement l'apparition des houles de courte période — ou harmoniques linéaires — à l'aval du seuil. M. TAKANO a entrepris à cet effet un calcul très long pour lequel il a déployé des qualités de ténacité et de compétence auxquelles M. le Président se plaît à rendre hommage.

M. TAKANO donne alors les précisions suivantes :

« Dans le cas linéaire, j'ai fait des calculs numériques pour $n = 0$, 1, 2 et 3. Autrement dit, j'ai pris en compte n termes ($n = 0$, 1, 2, 3) des séries de Fourier généralisées représentant les solutions. Pour la période 0,8 s les coefficients correspondants de réflexion et de transmission à $n = 1$, 2 et 3 sont à peu près identiques. La convergence de la série semble être très rapide. Pour la période 0,9 s, elle est moins rapide et pour les périodes 1,0 s et 1,1 s, les coefficients varient beaucoup avec n. Ces constatations confirment le fait que la convergence des séries utilisées diminue très vite avec la profondeur relative.

« J'ai obtenu ensuite une solution formelle exacte du 2e ordre pour un seuil semi-infini au lieu d'un seuil fini; cette hypothèse permet de simplifier beaucoup les calculs. La solution reste cependant très compliquée.

« D'autre part, j'ai obtenu une solution approchée du 1er ordre en supposant la continuité du débit et celle de la pression aux frontières et poussé le calcul au 2e ordre. La solution de 1er ordre ainsi obtenue conduit à un coefficient de transmission en bon accord avec les expériences de M. JOLAS; mais la valeur théorique du coefficient de réflexion est trois fois plus grande que la valeur expérimentale; je n'ai pas poussé le calcul au second ordre jusqu'aux applications numériques.

« Mais de toute façon, l'apparition de la période T/2 semble s'expliquer qualitativement par les théories du second ordre, soit exactes, soit seulement approchées. »

M. le Président remercie M. TAKANO de ses explications et fait remarquer que le calcul n'est limité que par la programmation de la machine à calculer.

M. le Président répond ensuite à la troisième observation de M. LARRAS : le caractère irrotationnel du mouvement ne semble pas être affecté par l'existence des tourbillons localisés dans le voisinage du seuil.

A propos de la plage d'amortissement, il semble que dans la zone affectée par les mesures de M. JOLAS, le mouvement soit encore irrotationnel de telle sorte que sa théorie semble s'appliquer à l'ensemble de la masse liquide.

Pour l'étude approchée du passage de la houle sur un seuil, M. VALEMBOIS signale la possibilité d'employer une méthode extrêmement simple qui, si elle ne permet pas de voir les effets du second ordre, montre bien l'influence des divers paramètres.

Cette méthode est celle qui est utilisée par exemple pour les calculs de coups de bélier. M. VALEMBOIS l'a appliquée avec succès depuis 1948 à de nombreux cas pratiques concernant la propagation de la houle. (Un certain nombre d'exemples ont été présentés à la S.H.F. en 1948, à la Xe Assemblée Générale de l'U.G.G.I. en 1954.)

On considère la propagation d'une houle dans un canal rectangulaire de largeur B et de profondeur d. Cette houle rencontre au cours de sa propagation divers éléments qui réagissent sur elle, par exemple absorbent ou réfléchissent une partie de son énergie.

Pour calculer aux points intéressants les valeurs des grandeurs que l'on cherche à connaître, par exemple la houle réfléchie, la houle transmise ou l'énergie absorbée, on assimile la houle à une onde sinusoïdale se propageant avec la célérité c donnée par les formules du premier ordre.

On admet, sauf dans quelques cas, que les obstacles ne créent pas de distorsion, c'est-à-dire qu'en chaque point du canal la houle incidente donne naissance à deux ondes sinusoïdales se propageant, l'une F vers l'aval, l'autre f vers l'amont, avec la célérité c correspondant à la profondeur au point considéré.

On voit facilement, en employant une méthode analogue à celle utilisée pour les ondes de gravité, qu'en un point d'abscisse x, le débit par unité de largeur q/B résultant à travers la section droite du canal et la surélévation Z sont donnés par les formules :

$$\begin{aligned} q/\mathrm{B} &= \mathrm{F} - f \\ c\,\mathrm{Z} &= \mathrm{F} + f \end{aligned} \qquad (1)$$

Par exemple, si l'on considère une houle de creux H_0 se propageant vers l'aval dans un canal de caractéristiques uniformes, on a :

$$\mathrm{F} = c\,(\mathrm{H}_0/2)\sin\left[\omega\,(t - x/c) - \alpha\right] \quad \text{et} \quad f = 0.$$

Pour une houle se propageant vers l'amont :

$$\mathrm{F} = 0 \quad \text{et} \quad f = c\,\mathrm{H}_0 \sin\left[\omega\,(t + x/c) - \beta\right]$$

Les équations (1), l'équation de continuité et les relations caractéristiques de l'action des obstacles permettent de déterminer les valeurs de F et f aux divers points intéressants.

Pour un seuil comme celui étudié par M. JOLAS, on obtient, en notations imaginaires :

$$1/t = \cos\varphi + j\ 1/2\ \left[\alpha + (1/\alpha)\right] \sin\varphi$$

t est le coefficient de la transmission,

φ le déphasage de la houle entre le début et la fin du seuil ($\varphi = 2\pi l/c'\mathrm{T}$, si l est la longueur du seuil, c' la célérité de la houle sur le seuil, et T sa période),

$\alpha = c'/c$ est le rapport de la célérité sur le seuil à la célérité dans le reste du canal.

On voit immédiatement qu'il faut que α soit assez différent de 1 pour que le seuil ait une action sensible. On voit aussi que, quelle que soit la hauteur du seuil, si sa longueur est un nombre entier de demi-longueurs d'ondes, il n'a aucune action. Ceci naturellement dans les limites d'utilisation de la méthode (faibles creux), qui sont les mêmes que celles de la méthode de M. TAKANO.

Les valeurs obtenues sont comparables à celles trouvées par M. JOLAS.

Notons qu'on a pu employer cette méthode dans les cas suivants : résistance visqueuse ou quadratique en travers du canal, dérivations sur le canal (poches d'air, ouvrages résonants), passage en charge, seuils, etc.

M. le Président remercie M. VALEMBOIS de son intervention et fait remarquer que les méthodes qu'il a indiquées sont bien connues des membres de l'équipe des Laboratoires de Grenoble. Mais l'objectif poursuivi par M. JOLAS et ses collaborateurs était de faire une théorie aussi exacte que possible du phénomène et de contrôler cette théorie par des mesures exactes. L'effort du Laboratoire de Mécanique des Fluides de Grenoble constitue la première phase d'une recherche à poursuivre pendant de longues années.

M. TAKANO indique que la méthode simple exposée par M. VALEMBOIS est voisine de celle de H. Jeffreys, publiée en 1944. Cet auteur postule la continuité des vitesses et des pressions le long des frontières des domaines occupés en lesquels la présence du seuil permet de décomposer le domaine occupé par toute la masse liquide.

M. TAKANO indique ensuite qu'au point de vue numérique un procédé simplifié dont il vient de rendre compte conduit aux mêmes valeurs théoriques des coefficients de transmission et de réflexion que le procédé de M. VALEMBOIS, dans le cadre des expériences de M. JOLAS, tout au moins. Mais comme il vient de l'indiquer, les valeurs des coefficients de réflexion, ainsi évalués, cadrent mal avec les valeurs expérimentales. M. TAKANO croit que les procédés simplifiés comme celui de M. VALEMBOIS ou le sien propre, peuvent rendre de grands services dans le cas des obstacles avec un passage en charge (c'est le cas des expériences de M. MACAGNO); il ne doit pas en être de même dans le cas de seuil avec surface libre et en profondeur relative assez petite.

M. DIEPHUIS constate que ces phénomènes de l'existence des ondes à demi-période n'existent pas seulement en cas d'un seuil rectangulaire mais aussi en cas d'un fond faiblement incliné. Il a observé ce phénomène en laboratoire de même qu'en nature avec des ondes d'une période de 8 secondes.

M. le Président précise que l'on a choisi un seuil de forme rectangulaire par simple commodité de calcul.