Répartition de l'énergie dans des zones de décollement

(Suite et fin)*

par HUNTER ROUSE

IOWA INSTITUTE OF HYDRAULIC RESEARCH
STATE UNIVERSITY OF IOWA

English text, p. 404

Au cours des dix dernières années, l'Institut de Recherches hydrauliques d'Iowa a entrepris une série d'études de l'écoulement au voisinage des tourbillons quasi stables produits par le décollement au voisinage de parois anguleuses.

Le professeur Rouse expose dans le présent mémoire le mode de détermination des écoulements axisymétriques moyen et secondaire pour deux parois de formes comparables : une entrée brusque de conduite et un cylindre tronqué.

Les mesures utilisables pour l'analyse comprennent les répartitions de la vitesse moyenne et de la pression moyenne, les intensités axiale et radiale de la turbulence, les contraintes de cisaillement turbulent et le gradient d'intensité axiale. Au moyen des équations de la quantité de mouvement et de l'énergie pour les mouvements moyen et secondaire, les répartitions mesurées sont rectifiées de façon à obtenir l'égalité nécessaire des

termes essentiels des équations, fournissant ainsi des résultats concordant généralement avec les conditions physiques. Ceux-ci sont eux-mêmes présentés sous forme de schémas de l'écoulement, accompagnés de courbes donnant la variation de l'énergie et des quantités de mouvement individuelles dans toutes les zones de décollement.

Une importance particulière s'attache à la relation entre la production de la turbulence, la convection et la dissipation et le fait qu'une quantité relativement faible de l'énergie de la turbulence est localement nécessaire pour amener un changement total dans la configuration de l'écoulement.

Enfin, deux diagrammes montrent la variation des termes de l'équation de Bernoulli étendue jusqu'à inclure les effets de la turbulence et de la dissipation de l'énergie.

LES MESURES EXPÉRIMENTALES

Soufflerie, cylindre et conduite

Afin de fournir les résultats expérimentaux essentiels pour l'analyse des deux états du mouvement considérés, deux stagiaires de l'Institut furent chargés d'entreprendre les essais de laboratoire correspondants, en vue de leur analyse par l'auteur pendant une période de répit relatif dans ses fonctions administratives.

Puisque les deux phénomènes dont il s'agit sont entièrement indépendants de l'action de la gravité, on a jugé souhaitable d'employer l'air au lieu de l'eau comme fluide expérimental [34]. Les mesures autour du cylindre se firent alors dans une soufflerie, et, pour les mesures à l'entrée de la conduite, un simple tuyau de la forme désirée fut monté. A cet égard, les appareils furent très semblables à ceux déjà employés pour des études précédentes de cette nature [1 à 9].

La soufflerie était du type fermé, d'une section droite allant de 2×3 mètres immédiatement au-delà du ventilateur centrifuge jusqu'à $0,9 \times 0,9$ mètre dans la zone d'essai. Celle-ci avait une longueur sans obstacle de 3 mètres, depuis la trompe d'entrée jusqu'aux redresseurs d'écoulement dans le coude en aval. Elle était munie de parois vitrées et de deux lignes de piézomètres en barres de laiton disposés axialement dans le bois dur du plancher et du plafond. La combinaison de vannes et d'un moteur à vitesse variable permettait le réglage de la vitesse de l'air, dans la section d'essais, entre 3 et 15 mètres par seconde. La soufflerie n'était certainement pas du type à basse-tur-

bulence, car l'intensité dans l'air ambiant dans la zone de mesures était à peu près de 1 % de la vitesse moyenne de l'air. Alors que cela aurait été excessif pour des expériences poussées, pour une telle étude exploratrice, cela était considéré comme acceptable.

Le cylindre fut formé d'un tube bouché en laiton tourné au diamètre de 7,5 cm sur une longueur de 120 cm. Au-delà, il était relié à un tuyau presque du même diamètre qui s'étendait jusqu'aux redresseurs d'écoulement au bout de la section des essais. Le cylindre entier était suspendu par des fils fins à l'axe de la section avec sa face tronquée en amont, à mi-chemin entre l'entrée et le coude. Des ouvertures piézométriques étaient pratiquées à travers la face normale et le long de la portion tournée du cylindre, aux endroits convenables.

La conduite était en matière plastique commerciale, d'un diamètre de 15 cm et d'une épaisseur de parois de 5 mm. Son extrémité amont fut coupée au tour et cimentée dans un orifice percé dans un morceau carré de matière plastique de 30 cm de long et 6 mm d'épaisseur; lequel fut alors placé dans un ouvrage en bois de 2×2 m pour simuler le mur d'un réservoir. La conduite était d'un diamètre constant sur une longueur de 2,5 m. Son extrémité en aval était reliée à l'entrée d'un ventilateur centrifuge, dont une vanne-papillon permettait de régler la vitesse entre 3 et 30 m par seconde. Des ouvertures piézométriques latérales se trouvaient placées à des intervalles appropriés sur toute sa longueur. De plus, environ

(*) Cf. *La Houille Blanche*, n° 3, 1960.

deux douzaines d'ouverture d'accès étaient pratiquées par couples opposés au-dessus et au-dessous, avec des bouchons étanches faits de telle sorte que la surface intérieure était continue quand les ouvertures n'étaient pas en service.

Instruments

Dans les deux cas, trois sortes de mesures se firent : un contrôle continu sur la constance de l'écoulement ambiant, la répartition de la vitesse et de la pression, et les caractéristiques de la turbulence, dont la seconde seule différait dans les deux essais. La première dépendait de la variation de pression due au changement brusque de la section — à travers la trompe d'entrée de la soufflerie et à travers l'entrée de la conduite même — conformément aux mesures faites au moyen d'un tube de Pitot, des vases ambiantes pendant les essais d'étalonnage. Un simple manomètre différentiel à eau, sensible à 0,3 mm, assurait le contrôle en chaque cas. La troisième sorte de mesure — celle de la turbulence — s'effectuait toujours au moyen de l'anémomètre à fil chaud et des circuits connexes, dont la description exigerait déjà un petit livre : heureusement un tel livret a déjà été préparé à cet effet [35]. Il suffira de dire ici que les sondes se montèrent sur le même agencement traversant que les indicateurs de vitesse, encore à décrire, et que les quantités mesurées étaient l'intensité axiale, l'intensité radiale, leur produit, et la dérivée de l'intensité axiale par rapport au temps. Les circuits étaient de telle sorte qu'ils indiquaient directement la racine du carré moyen ou le carré moyen de chaque valeur et son rapport à la vitesse moyenne locale ou à son carré. Bien que des erreurs de 5 à 10 % puissent être attendues au stade actuel, pour des intensités relativement faibles, il est évident que dans des régions de décollement de faible vitesse moyenne, une assez grande inexactitude de mesure peut en résulter.

Les indications de la vitesse moyenne autour du cylindre s'obtinrent au moyen d'un tube de 3 mm de diamètre pourvu d'orifices piézométriques, à 30° l'un de l'autre, à mi-chemin de sa longueur. Par rotation du tube autour d'un axe perpendiculaire au plan d'écoulement, il était possible de déterminer la position de la pression différentielle maximum et ensuite la direction de la vitesse vectorielle; la lecture du manomètre permettait de plus de trouver la valeur de la vitesse sur une courbe d'étalonnage. Le tube avait une longueur de 15 cm entre les pivots, sur l'un desquels était monté un petit rapporteur, et se plaçait symétriquement sur l'appareil traversant qui était bien en aval de la section étudiée. La position radiale du tube était

lue sur une graduation sensible à 0,3 mm d'eau et la pression observée au moyen d'un indicateur Wahlen modifié [36] sensible à 0,03 mm d'alcool. La répartition de la pression dans l'écoulement se déterminait au moyen d'une plaque de laiton de $2,5 \times 40 \times 0,3$ cm de grandeur, à arêtes vives, au milieu de laquelle étaient douze orifices piézométriques sur une ligne droite. Cette plaque pouvait se monter comme un aileron radial parallèle au courant pour permettre la détermination de la répartition radiale de pression.

Une plaque piézométrique (voir fig. 12 a), semblable à celle du cylindre, était utilisée dans la conduite. Cependant, elle ne comportait que deux orifices, et la répartition de la pression était mesurée pendant que la plaque se déplaçait par

Fig. 12

Plaque piézométrique et prise de pression
Piezometer plate and stagnation tube

étapes dans la section. Pendant les mesures, elle franchissait complètement le conduit. Au lieu du cylindre tournant, dont n'importe quelle forme aurait causé trop d'étranglement dans la conduite, on employait une simple prise de pression au moyen d'une aiguille hypodermique (fig. 12 b). Celle-ci pouvait se monter de manière interchangeable avec la plaque piézométrique sur l'appareil traversant de telle sorte qu'elle se déplaçait, sa pointe étant sur la ligne suivie auparavant par les orifices piézométriques. La direction du tube pouvait être inversée sans déplacer la pointe pour les mesures postérieures. Car une telle prise de pression indique correctement la pression totale moyenne même pour des angles d'inclinaison relativement grande [37], la soustraction de la pression statique mesurée, de celle-là, donnait la hauteur moyenne due à la vitesse au point considéré. A cause de leurs valeurs relativement grandes, ces pressions se mesuraient au moyen d'un manomètre différentiel à eau, sensible à 0,3 mm.

Bien que n'étant pas du même genre, la méthode de détermination de la position de l'extrémité aval du tourbillon, dans chaque cas, doit être aussi citée. Car cette zone était toujours l'endroit d'une variation intense, et comme les indications de vitesse devenaient indéterminées près de la limite zéro, une faible longueur de fil à coudre fut montée de façon à flotter librement au bout d'un fil métallique et introduite dans l'écoulement près de la paroi. La section où il flottait en amont aussi souvent qu'en aval était considérée comme l'extrémité du tourbillon.

Présentation des mesures

Dans les figures 13 à 18 sont reproduites les données essentielles obtenues pendant les expériences avec l'entrée, et dans les figures 19 à 24 les mesures correspondantes pour le cylindre. Toutes les valeurs ont été réduites à une forme sans dimension au moyen d'une division par les grandeurs de référence convenables. Dans les deux cas, les mesures avaient été faites dans des sections identiques — c'est-à-dire pour des valeurs de x/R égales à 0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 3,0; 4,0; 6,0 et 8,0. Toutefois, vu que la détermination indépendante de la longueur du tourbillon avait montré que celle-ci était presque exactement deux fois plus grande pour le cylindre ($x/R=3,1$) que pour l'entrée ($x/R=1,5$), les valeurs correspondant aux sections alternées le long du cylindre furent omises. Les mêmes symboles sont utilisés alors pour des sections comparables par rapport à la longueur du tourbillon.

La vitesse fut mesurée à la section initiale du cylindre et aussi à des valeurs de r/R supérieures à 2,0, mais à cause d'anomalies évidentes, ces mesures n'ont pas été reproduites. Toujours dans un but d'homogénéité, les vitesses vectorielles sont indiquées dans les deux cas, bien que les directions et par conséquent les composantes aient été obtenues pour le cylindre. Puisque les conditions de continuité rendent possible d'évaluer les composantes au moyen d'une seule approximation pour toutes les sections sauf la première (où aucune mesure acceptable n'eut lieu), les composantes sont ainsi représentées implicitement sur les diagrammes. Les valeurs de pression se rapportent à celles de l'écoulement ambiant dans les deux cas, à la suite desquelles les mesures pour l'entrée apparaissent comme très négatives; elles peuvent naturellement se rapporter à n'importe quelle valeur de base sans changer de forme. Toutes les mesures

pour l'entrée ont été corrigées à cause de l'effet général (mais non local) d'étranglement de la plaque piézométrique, comme indiqué par le piézomètre dans la paroi, avec et sans plaque en place; et toutes les mesures pour le cylindre ont été corrigées pour le gradient de pression le long de la soufflerie, comme indiqué par les piézomètres dans la paroi. Seules deux composantes de la turbulence furent mesurées; la composante axiale se détermina séparément par fil unique et, en même temps que la composante radiale, par fil croisé; et seules ces mesures-ci sont représentées. Enfin, toutes les valeurs de la dérivée, par rapport au temps, de la vitesse axiale ont été converties en celles de la dérivée spatiale correspondante en divisant par la composante moyenne axiale de la vitesse au point considéré.

Un simple coup d'œil sur les points mesurés révèle une dispersion expérimentale considérable, et un examen plus attentif ferait découvrir beaucoup de contradictions, dont l'élimination partielle sera discutée dans les pages suivantes. Avant de terminer ce chapitre, il importe de noter que la façon de procéder nécessairement adoptée dans le cas présent — expérimentation et analyse à des temps et emplacements différents — n'est pas la manière idéale d'étudier de tels écoulements, parce que les deux phases de l'étude auraient pu être conduites beaucoup plus efficacement sous forme de collaboration. Pourtant, peu d'études d'écoulement aussi complexes sont vraiment satisfaisantes dans leur forme initiale, et c'est seulement lorsqu'elles sont refaites à la lumière des découvertes préliminaires que des connaissances de valeur permanente sont acquises. Donc, pour plus d'une raison, il faut regarder l'étude présente comme tout à fait provisoire, avec, pour objet, celui de dégager, par n'importe quel moyen, les aspects approximatifs de la répartition de l'énergie.

ÉVALUATION ET DISCUSSION DES RÉSULTATS

Détermination des schémas des écoulements moyens

Bien que les données présentées dans le chapitre précédent comprennent en général la connaissance expérimentale qui est nécessaire à l'analyse, on y trouve des discordances de trois types différents, qu'il faut tout d'abord éliminer. A savoir : la dispersion des points d'une seule série, de même que des différences entre les séries successives dans le même système; le déplacement systématique des points dû à l'in-

fidélité bien connue des instruments; et des discordances entre les données expérimentales et les exigences des équations du mouvement. Il a fallu tout réduire à des proportions admissibles par un moyen ou par un autre, ainsi qu'il est décrit dans les pages suivantes.

La dispersion des points d'une série se compense d'habitude en traçant une courbe moyenne entre eux, soit à vue d'œil, soit par la méthode des moindres carrés. Un semblable procédé peut être employé pour raccorder plusieurs courbes successives, pour lesquelles un bon « lissage »

FIG. 13-18

Mesures de vitesse, de pression et de turbulence pour l'entrée
Velocity, pressure, and turbulence measurements for inlet

FIG. 19-24

Mesures de vitesse, de pression et de turbulence pour le cylindre
Velocity, pressure, and turbulence measurements for cylinder

doit toujours exister même si une autre variable intervient comme paramètre. Par exemple, une série de courbes montrant u/U en fonction de r/R pour des valeurs successives du paramètre x/R peut être tracée en vue de montrer u/U en fonction de x/R avec r/R comme paramètre. L'ajustement des deux systèmes de courbes, de telle sorte que tous les deux soient continus et rationnels, s'opère donc avec des données comportant trois variables, ce que l'ajustement d'une seule courbe fait seulement dans le cas de deux variables. Toutes les mesures en question ont été soumises à cette procédure, et les valeurs utilisées pour les calculs subséquents sont celles des courbes rectifiées, plutôt que les mesures elles-mêmes.

Certaines corrections à cause des erreurs instrumentales — en particulier celles sur la répartition de la pression — ont été mentionnées comme étant déjà comprises dans les mesures présentées. Une correction du même genre reste encore à noter : celle pour l'effet de la turbulence sur l'indication de la vitesse. On entend généralement que, par suite de la variation de vitesse, un instrument capable d'enregistrer la grandeur instantanée du vecteur donnerait une indication moyenne égale à :

$$\Delta p = \frac{\rho}{2} (\bar{V}^2 + \overline{V'^2}) \quad (43)$$

Divers instruments [37] sont sensibles à de telles variations, à des degrés différents, et l'exactitude de leur réponse dépend aussi beaucoup du rapport entre la fluctuation et la moyenne locale. Par exemple, une prise de pression formée d'une aiguille hypodermique est pratiquement insensible à l'inclinaison du courant jusqu'à un angle voisin de 15° de telle sorte que les composantes perpendiculaires de la vitesse jusqu'à 25 % de la valeur moyenne, doivent être enregistrées sans erreurs. Par contre, le tube de Pitot du type Prandtl est conçu pour indiquer sûrement la composante axiale elle-même dans la même étendue, et il doit donc être insensible à des fluctuations normales, sauf si elles sont grandes ou si la vitesse moyenne locale est faible. Le tube transversal est évidemment sensible à des degrés différents dans les deux directions perpendiculaires. Après réduction à la composante axiale du vecteur moyen, les mesures dont il s'agit furent corrigées seulement selon la variation axiale. À l'égard d'autres ajustements, la valeur réelle de la correction était probablement peu importante, spécialement parce que la turbulence était presque toujours maximum dans les zones de vitesse minimum, où l'erreur était la plus grande dans la correction comme dans la mesure.

Pour le cas de l'écoulement autour du cy-

lindre, les composantes axiales des mesures vectorielles étaient disponibles tout de suite au moyen des inclinaisons mesurées. Pour le cas de l'écoulement dans la conduite, au contraire, il a fallu évaluer les composantes par approximations successives. Les vecteurs mesurés furent d'abord supposés représenter les composantes; celles-ci furent intégrées, une section après l'autre, pour donner la fonction de courant non dimensionnelle :

$$\frac{\psi}{R^2 U} = \int \frac{\bar{u}}{U} \frac{r}{R} \frac{dr}{R} \quad (44)$$

en fonction de r/R , et la sélection des valeurs de r/R pour des accroissements constants de $\psi/R^2 U$ dans la fonction tracée donna ensuite comme première approximation les positions des lignes de courant correspondantes dans les sections successives. Avec le tracé des lignes de courant, on obtint les inclinaisons des vecteurs, et par elles une seconde approximation des composantes et de la fonction de courant. Bien entendu, la répartition pour la section de l'entrée elle-même n'avait pas été mesurée et il fallait l'obtenir autrement. Elle fut prise comme première approximation des valeurs théoriques pour la répartition dans le plan d'un orifice circulaire [13] et corrigées selon la différence entre les pressions théoriques et mesurées, respectivement à l'arête de l'orifice et de l'entrée. Toutes les courbes de vitesse pour la conduite furent alors subordonnées à des ajustements mineurs aux environs de la paroi pour obtenir la grandeur constante de 0,5 exigée par l'intégrale $\int (\bar{u}/U) (r/R) dr/R$ dans les conditions de continuité, c'est-à-dire en fonction du débit, $Q = 2\pi\psi$, d'où $\psi/R^2 U = 1/2 Q/\pi R^2 U = 1/2$. Le système de profils résultant est reproduit dans la figure 25 et le schéma des lignes de courant correspondantes, dans la figure 26.

FIG. 25

Courbes rectifiées de la vitesse pour l'entrée
Adjusted velocity curves for inlet

FIG. 26

Schéma des lignes moyennes du courant pour l'entrée
Pattern of mean streamlines for inlet

Pour le cylindre, les constructions comparables étaient un peu plus complexes. La répartition de la grandeur vectorielle de la vitesse dans la section initiale fut d'abord déduite approximativement de celle de l'écoulement potentiel à la section centrale d'une sphère, et corrigée selon la différence entre la pression minimum correspondante et celle mesurée au bout du cylindre. Le schéma des lignes de courant au voisinage du cylindre fut alors déterminé de la même manière que pour le tuyau. Or, cependant, une condition de continuité semblable à celle de la conduite uniforme n'existait pas, aux fins de contrôle, et, néanmoins il apparaissait que l'augmentation de vitesse mesurée juste en dehors du tourbillon manquait de grandeur. Ce qui correspond à l'épaisseur du déplacement [19] de la couche limite :

$$\frac{\delta}{R} = \int \left(1 - \frac{\bar{u}}{U}\right) \frac{r}{R} \frac{dr}{R} \quad (45)$$

qui représente la distance à laquelle l'écoulement est déplacé radialement par le dérangement local, fut donc calculé d'après des courbes de vitesse. En évaluant l'intégrale, on doit remarquer que sa limite était prise nécessairement au point où la vitesse atteint la première fois la valeur U . Un diagramme de S/R en fonction de x/R est superposé aux lignes brisées sur le schéma des lignes de courant de la figure 28. Il représente évidemment la force d'un corps imaginaire qui déplacerait un écoulement irrotationnel environnant dans la même mesure que

le ferait la combinaison du cylindre, du tourbillon et du sillage.

Au voisinage du tourbillon même, le profil du déplacement se trouve en bon accord avec celui d'un ovoïde de Rankine (figuré en ligne pointillée) ayant un demi-diamètre de 1,5 et une demi-longueur de 2,2. La fonction de courant pour un tel corps :

$$\frac{\psi}{R^2 U} = \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^2 + 0,87 \left[\frac{(x/R) - 1,3}{\sqrt{[r/R]^2 + [(x/R) - 1,3]^2}} - \frac{(x/R) + 1,3}{\sqrt{[r/R]^2 + [(x/R) + 1,3]^2}} \right] \quad (46)$$

doit donc donner avec une belle approximation la forme des lignes de courant autour de l'extrémité du cylindre — mais bien entendu, ni assez près pour qu'il y ait un effet de face plane plutôt qu'arrondie, ni assez loin radialement pour qu'il y ait un effet de profil étendu plutôt que symétrique. Le premier effet ne s'élimine pas facilement par l'analyse. Mais, en revanche, le second se réduit sans difficulté en appliquant à la fonction du courant donné par l'équation (8) l'approximation de Munk, $\Delta(t) \approx \frac{1}{4} \delta$ pour de minces profils, avec ce résultat que :

$$\frac{\psi}{R^2 U} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \left\{ \frac{1}{2} - \int_0^{\frac{(x/R)^2}{\left[\left(\frac{t}{R} - \frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^{3/2}}} \frac{dt}{R} \right\} \quad (47)$$

Par ajustement des parties irrotationnelles des courbes de vitesse entre ces deux conditions limites, fut obtenue la séquence que montre la figure 27 et avec elle la forme finale des lignes de courant de la figure 28.

La comparaison des deux schémas d'écoulement est bien instructive, car on y voit facilement la ressemblance fondamentale des deux phénomènes de décollement et en même temps la différence essentielle de leur étendue dans l'écoulement en conduite et à l'air libre. Les deux tourbillons ne diffèrent pas d'une façon marquée soit dans leurs proportions générales, soit dans leurs relations avec la variation axiale de pression, soit encore dans leur effet sur l'écoulement voisin. Pourtant, à cause de leur dissemblance essentielle dans l'interaction de l'écoulement voisin, le tourbillon dans le cas de la conduite n'a que la demi-longueur de l'autre, et il est aussi sensiblement plus mince, malgré l'identité de la dimension radiale de la paroi. D'autres ressemblances et différences deviendront apparentes

FIG. 27

Courbes rectifiées de la vitesse pour l'entrée
Adjusted velocity curves for cylinder

FIG. 28

Schéma des lignes moyennes du courant pour le cylindre
Pattern of mean streamlines for cylinder

dans les relations d'énergie du chapitre suivant.

Avant que l'analyse d'énergie fut commencée, une épreuve se fit encore sur la précision des courbes ajustées au moyen de l'équation de la quantité de mouvement en direction axiale. En supposant que la tension tangentielle à la paroi ne soit appréciable ni dans un cas, ni dans l'autre, et que l'intégration soit portée plus loin que la région de tension appréciable dans le cas du cylindre, et en divisant par la quantité de référence $\pi \rho R^2 U^2$, on a pu ramener l'équation aux formes non dimensionnelles suivantes pour la conduite et le cylindre, respectivement :

$$2 \int \left(\frac{\bar{u}}{U} \right)^2 \frac{r}{R} \frac{dr}{R} + 2 \int \frac{\bar{u}^2}{U^2} \frac{r}{R} \frac{dr}{R} + \int \left(\frac{\bar{p}}{\rho U^2/2} - 1 \right) \frac{r}{R} \frac{dr}{R} = 0 \quad (48)$$

$$2 \int \left[\left(\frac{\bar{u}}{U} \right)^2 - 1 \right] \frac{r}{R} \frac{dr}{R} + 2 \int \frac{\bar{u}^2}{U^2} \frac{r}{R} \frac{dr}{R} + 2 \left(\frac{\bar{u}}{U} \right) \int \left(1 - \frac{\bar{u}}{U} \right) \frac{r}{R} \frac{dr}{R} + \int \frac{\bar{p}}{\rho U^2/2} \frac{r}{R} \frac{dr}{R} = 0 \quad (49)$$

Dans chaque équation, le premier terme représente la différence dans la quantité de mouvement moyenne (égale au facteur β de Boussinesq, pour l'entrée) et le second celle dans la quantité de mouvement turbulente, entre la section considérée et une très lointaine en amont. Le dernier terme représente l'effet de la différence de pression entre les deux sections. Les équations diffèrent en forme, pour trois raisons. La première est simplement que la vitesse relative en amont est nulle dans le cas de l'entrée de conduite et égale à l'unité dans le cas du cylindre. La seconde réside dans le fait que la pression est reliée à celle où la vitesse relative est l'unité dans les deux cas — c'est-à-dire, loin du

cylindre, et ce qui existerait loin en aval de l'entrée si la tension tangentielle à la paroi n'existait pas. La troisième se trouve dans la différence entre l'écoulement en conduite et à l'air libre, par suite de laquelle un terme additionnel est nécessaire dans l'équation du cylindre pour tenir compte du flux de la quantité de mouvement à travers la périphérie de la région considérée, où la vitesse axiale a la valeur moyenne $(\bar{u}/U)_m$; cette valeur diffère peu de l'unité à la limite utilisée de l'intégration $r/R=3$.

Ces équations contiennent évidemment deux caractéristiques non encore discutées en détail : la pression moyenne et l'intensité axiale de la turbulence, dont les courbes ajustées se trouvent dans les figures 29 à 32. Tandis que les courbes spécifiques différent souvent considérablement des mesures originales, elles concordent

FIG. 29 - 30

Courbes rectifiées de la pression pour l'entrée et le cylindre

Adjusted pressure curves for inlet and cylinder

FIG. 31 - 32

Courbes rectifiées des fluctuations axiales de la vitesse

Adjusted curves of longitudinal velocity fluctuations

avec elles-mêmes, avec la tendance générale des mesures, et avec les indications trouvées pour d'autres parois semblables [3, 8]. De plus, lors-

que les divers termes de la relation de quantité de mouvement se calculent section par section, les résultats (voir fig. 33 et 34) ne dévient pas

FIG. 33

Analyse de la quantité de mouvement pour l'entrée
Momentum analysis for inlet

FIG. 34

Analyse de la quantité de mouvement pour le cylindre
Momentum analysis for cylinder

des conditions requises par l'équation, plus que de 7 % de la variation de la quantité de mouvement. En ce qui concerne les deux systèmes de courbes, on doit remarquer qu'à l'entrée la réduction de la pression sur la face du réservoir (0,32) est comprise dans la valeur totale pour chaque section, mais jamais explicitement, pendant que la valeur finale du cylindre (0,37) représente exactement l'augmentation de pression sur sa face tronquée. Tout aussi digne de remarque est le fait que l'effet des composantes de la turbulence sur l'équation est petit.

Avec ces contrôles sur les mesures ajustées, on tend à accepter les courbes correspondantes

comme représentatives du schéma d'écoulement réel avec un degré d'approximation satisfaisant. On pourrait aussi supposer qu'avec plus d'ajustement la précision deviendrait encore meilleure. Pourtant, cela ne fut pas essayé, parce que la satisfaction des conditions imposées est nécessaire, mais insuffisante pour la précision définitive (c'est-à-dire, un nombre indéfini de répartitions de vitesse et de pression satisfait les conditions de continuité et de quantité du mouvement), et par conséquent on ne doit pas mettre trop de confiance dans la finalité de ces indications. Une meilleure confirmation sera trouvée, cependant, dans l'analyse de l'énergie au chapitre suivant.

Production, transfert, et dissipation de la turbulence

A cause des conditions simplifiées sous lesquelles la relation de la quantité de mouvement fut évaluée, et avec la supposition également raisonnable d'un nombre de Reynolds assez grand pour que les tensions visqueuses moyennes soient partout négligeables, l'équation de l'énergie de l'écoulement moyen peut être ramenée aux formes convenables suivantes pour l'entrée et pour le cylindre, rendues maintenant non dimensionnelles en divisant par la quantité de base $\frac{1}{2} \rho \pi R^2 U^3$:

$$2 \int \frac{\bar{u}}{U} \left(\frac{\bar{V}}{U} \right)^2 \frac{r}{R} \frac{dr}{R} + 2 \int \frac{\bar{u}}{U} \left(\frac{\bar{p}}{\rho U^2/2} - 1 \right) \frac{r}{R} \frac{dr}{R} + 4 \int \left(\frac{\bar{u}}{U} \frac{\bar{u}^2}{U^2} + \frac{\bar{v}}{U} \frac{\bar{u}'\bar{v}'}{U^2} \right) \frac{r}{R} \frac{dr}{R} - 4 \iint \left[\frac{\bar{u}'\bar{v}'}{U^2} \left(\frac{\partial \bar{u}/U}{\partial r/R} + \frac{\partial \bar{v}/U}{\partial x/R} \right) + \frac{\bar{u}^2}{U^2} \frac{\partial \bar{u}/U}{\partial x/R} + \frac{\bar{v}^2}{U^2} \frac{\partial \bar{v}/U}{\partial r/R} + \frac{\bar{w}^2}{U^2} \frac{\bar{v}/U}{r/R} \right] \frac{r}{R} \frac{dr}{R} \frac{dx}{R} = 0 \quad (50)$$

$$2 \int \left[\frac{\bar{u}}{U} \left(\frac{\bar{V}}{U} \right)^2 - 1 \right] \frac{r}{R} \frac{dr}{R} + 2 \int \frac{\bar{u}}{U} \frac{\bar{p}}{\rho U^2/2} \frac{r}{R} \frac{dr}{R} + 2 \int \left(1 - \frac{\bar{u}}{U} \right) \frac{r}{R} \frac{dr}{R} + 4 \int \left(\frac{\bar{u}}{U} \frac{\bar{u}^2}{U^2} + \frac{\bar{v}}{U} \frac{\bar{u}'\bar{v}'}{U^2} \right) \frac{r}{R} \frac{dr}{R} - 4 \iint \left[\frac{\bar{u}'\bar{v}'}{U^2} \left(\frac{\partial \bar{u}/U}{\partial r/R} + \frac{\partial \bar{v}/U}{\partial x/R} \right) + \frac{\bar{u}^2}{U^2} \frac{\partial \bar{u}/U}{\partial x/R} + \frac{\bar{v}^2}{U^2} \frac{\partial \bar{v}/U}{\partial r/R} + \frac{\bar{w}^2}{U^2} \frac{\bar{v}/U}{r/R} \right] \frac{r}{R} \frac{dr}{R} \frac{dx}{R} = 0 \quad (51)$$

La signification des termes comprenant les caractéristiques du mouvement moyen sera donnée par des commentaires sur celles de la relation de quantité de mouvement, (le premier terme pour l'entrée représentant maintenant le facteur de Coriolis) et l'évaluation de leurs grandeurs section par section aura les résultats reproduits dans les figures 35 et 36. La somme

algébrique de ces termes est invariablement négative, et elle représente une perte d'énergie de l'écoulement moyen. Dans le cas de l'entrée, la valeur asymptotique de perte (0,36) est nécessairement en accord avec la réduction de pression et l'augmentation de vitesse satisfaisant déjà à l'équation de la quantité de mouvement. Pour le cylindre, la valeur asymptotique (0,74)

FIG. 35

Analyse de l'énergie moyenne pour l'entrée
Mean energy analysis for inlet

FIG. 36

Analyse de l'énergie moyenne pour le cylindre
Mean energy analysis for cylinder

est le produit de la vitesse ambiante et de la pression sur la face du cylindre.

Dans chaque cas, une telle perte équivaut à un accroissement de l'énergie du mouvement secondaire, comme indiqué par le terme final pour la production de la turbulence. Ce terme est le même dans les deux cas et il contient trois quantités non encore introduites : l'intensité radiale et tangentielle de la turbulence, et le produit moyen des fluctuations axiales et radiales, qui est proportionnel à la tension tangentielle turbulente. La première fut supposée reliée à la composante axiale de la manière $\overline{u'^2} \approx 2 \overline{v'^2} \approx 2 \overline{w'^2}$, déjà trouvée applicable à un degré d'approximation suffisant pour un tel besoin [8]; en effet, nous avons trouvé que seul le produit de la tension tangentielle et du gradient radial de la vitesse axiale contribue de façon appréciable à la production de la turbulence. Les courbes ajustées pour les produits moyens des variations sont montrées dans les figures 37 et 38, et les intégrales doubles résultantes dans les figures 35 et 36. La somme des termes tracés dans ces dernières sera trouvée satisfaisant les équations d'énergie moyenne à moins de 5 % du flux différé-

Fig. 37 - 38

Courbes rectifiées du produit des fluctuations
Adjusted curves for cross products
of velocity fluctuations

rentiel d'énergie. Il est à remarquer que, pour obtenir un tel accord, une augmentation appréciable des produits moyens à l'entrée est nécessaire — ceci en dépit du fait que les composants individuels aient paru, peut-être, trop grands. Quand l'équation de l'énergie pour le mouvement turbulent (y compris l'approximation de Kolmogoroff) s'écrit en utilisant les mêmes restrictions que celles introduites pour le mouvement moyen, elle aura la force identique dans chacun des deux cas :

$$4 \iint \left[\frac{\overline{u'v'}}{U^2} \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial r/R} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial x/R} \right) + \frac{1}{2} \frac{\overline{u'^2}}{U^2} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x/R} \right] \frac{r}{R} \frac{dr}{R} \frac{dx}{R} + 2 \int \frac{\overline{u}}{U} \frac{\overline{V'^2}}{U^2} \frac{r}{R} \frac{dr}{R} \\ + 2 \int \frac{\overline{u'V'^2}}{U^3} \frac{r}{R} \frac{dr}{R} + 4 \int \frac{\overline{u'p'}}{\rho U^3} \frac{r}{R} \frac{dr}{R} + \frac{60}{\mathcal{R}_R} \iint \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial x/R} \right)^2 \frac{r}{R} \frac{dr}{R} \frac{dx}{R} = 0 \quad (52)$$

En plus du nombre de Reynolds, $\mathcal{R}_R = RU/\nu$, trois termes nouveaux apparaissent ici. L'un est une corrélation triple de variation de vitesse qui ne fut pas mesurée et peut seulement être supposée négligeable (avec peu de chances d'erreur appréciable). Un autre consiste en une corrélation double de variation de vitesse et de pression, qu'il faut supposer négligeable de la même manière. Le troisième est le gradient axial de la variation de vitesse axiale; les courbes ajustées sont reproduites dans les figures 39 et 40. Par

Fig. 39 - 40

Courbes rectifiées
du gradient des fluctuations axiales
Adjusted curves for longitudinal fluctuation gradients

l'élimination des deux termes non mesurés, l'équation de l'énergie turbulente se réduit à l'hypothèse que la somme algébrique des termes : production de la turbulence, convection et dissipation, doit être égale à zéro — autrement dit, la turbulence produite dans un endroit donné est en partie dissipée localement et en partie emportée par l'écoulement pour être dissipée autre part. L'évaluation des valeurs de la convection et de la dissipation pour les comparer avec celles de la production déjà calculées aboutit aux courbes des figures 41 et 42. Bien que l'accord entre les points calculés et les courbes satisfaisant aux conditions physiques de l'équation soit évidemment excellent, il faut remarquer que les valeurs du gradient (en particulier celles de l'entrée, de même que pour les valeurs du produit) furent arbitrairement ajustées pour atteindre ce but. Les figures montrent, alors, des tendances probables des fonctions énergétiques plutôt que des variations précisément mesurées. Il est quand même significatif de noter que la dissipation cumulative reste en arrière de la production cumulative, d'un montant égal à la convection locale; de plus, toutes deux ne s'approchent de leur limite commune que si la turbulence même — toujours

FIG. 41

Analyse de l'énergie turbulente pour l'entrée
Turbulent energy analysis for inlet

FIG. 42

Analyse de l'énergie turbulente pour le cylindre
Turbulent energy analysis for cylinder

une petite quantité — tend graduellement vers zéro.

Parce que les équations précédentes d'énergie s'exprimaient réellement en fonction de la puissance — c'est-à-dire de l'énergie multipliée par le débit — il y a intérêt à examiner leur forme en fonction de l'énergie par unité de volume, mieux connue et appelée équation de Bernoulli. Celle-ci s'obtient, en effet, en intégrant l'équation de base, divisée par le débit différentiel dQ , le long d'un tube de courant. Dans le cas d'un

écoulement stationnaire irrotationnel, la somme de Bernoulli qui en résulte, $B = \rho V^2/2 + p$, est nécessairement constante le long du tube. Cependant, pour un écoulement rotationnel dont seulement le champ de vitesse moyenne est stationnaire, trois termes additionnels seront inclus :

$$B = \frac{1}{2} \rho \bar{V}^2 + \bar{p} + \frac{1}{2} \rho \bar{V}^2 + \overline{v^2} + \Delta \quad (53)$$

Le terme pour l'énergie cinétique de l'écou-

FIG. 43-44

Répartition des termes de Bernoulli pour l'entrée (en bas) et pour le cylindre (en haut)
Distribution of Bernoulli terms for inlet (below) and cylinder (above)

ment moyen trouve ainsi sa contrepartie dans le terme pour l'énergie cinétique de la turbulence, de même que la pression moyenne a sa contrepartie dans une pression de Reynolds. On incline à regarder Δ comme un terme de dissipation, parce que $B-\Delta$ représente l'énergie nette par unité de volume en un point quelconque. Pourtant, Δ n'a pas seulement sa source dans le travail dissipateur fait par les tensions visqueuses internes, mais aussi dans le travail conservateur fait par les tensions externes de Reynolds. En d'autres termes, Δ peut même décroître le long d'une ligne de courant pendant qu'il croît le long d'une autre, par suite d'un transfert latéral d'énergie au moyen du mélange

turbulent. L'intégrale $D=\int \Delta dQ$ sur la section d'écoulement, bien entendu, est équivalente à la dissipation déjà calculée, parce que les éléments individuels du processus de transfert s'équilibrent à l'intérieur.

Les figures 43 et 44 montrent les variations des cinq termes successifs de l'équation étendue de Bernoulli après division par la pression dynamique, $\rho U^2/2$; la somme des termes devient alors égale à l'unité. En utilisant la longueur L du tourbillon comme référence linéaire pour l'entrée et pour le cylindre, on voit que la répartition de l'énergie offre une ressemblance surprenante dans les deux phénomènes.

CONCLUSION

Par une combinaison de moyens analytiques, expérimentaux et graphiques quelque peu arbitraires, on a obtenu des représentations approximatives de l'écoulement primaire et secondaire dans une entrée brusque de conduite et autour d'un cylindre à face tronquée. Celles-ci ne peuvent pas être considérées comme fournissant une connaissance quantitative sur les détails internes du mécanisme de la turbulence, parce que les mesures n'étaient pas assez complètes ou précises, et que les ajustements visaient trop catégoriquement à équilibrer les relations générales. Par contre, la méthode employée devrait servir le double but de révéler les caractéristiques fondamentales des deux écoulements et d'illustrer les relations qui existent entre les termes principaux des équations de la quantité de mouvement et de l'énergie. Puisqu'il faut comprendre celles-ci avant que les détails puissent être proprement étudiés, cette étude peut être regardée comme le prologue indispensable d'un travail plus complet et plus précis.

Aux observations générales qui sont d'une grande importance, il faut ajouter les suivantes.

Le décollement qui est provoqué par les caractéristiques dues à l'inertie de l'écoulement moyen est arrêté par les caractéristiques dues à l'inertie de la turbulence, chacune des deux sans qu'il soit besoin d'une action visqueuse. La zone de décollement dépend donc en forme et en grandeur de la géométrie des parois, et elle est plus limitée en étendue dans les écoulements en conduites que dans les écoulements à l'air libre. Le domaine des vitesses autour d'une zone de décollement est semblable à celui d'un écoulement irrotationnel autour d'un corps solide de même forme, et la répartition de la pression à l'intérieur ainsi qu'alentour varie pareillement. De l'énergie est perdue, à l'écoulement moyen, presque uniquement par la production de la turbulence. La quantité de turbulence qui existe à un point quelconque dans une zone de décollement est relativement petite. Pourtant, elle a le double effet de ramener le domaine des vitesses vers son état uniforme originaire, par l'effet de mélange de tourbillons plus grands, et de causer sa propre disparition, par les tensions visqueuses dans les tourbillons les plus petits.

REMERCIEMENTS

Les mesures utilisées dans cette étude furent obtenues par Hau-Wong Ho, pour l'écoulement moyen à l'entrée, et par T.R. Krishna Rao, pour l'écoulement turbulent à l'entrée et pour l'écoulement moyen et turbulent autour du cylindre, avec l'aide de K. P. Singh pour certaines éva-

luations numériques; les expériences eurent le soutien financier du Bureau de Recherche Navale (U.S.A.), sous Contrat N8onr-500(03) avec l'Institut de Recherches Hydrauliques d'Iowa. Les résultats furent analysés et le travail fut écrit pendant l'année 1958-1959, durant laquelle

l'auteur était boursier supérieur de la Fondation Nationale des Sciences (U.S.A.) à l'Institut Max Plank de Mécanique des Fluides, Université de Göttingen; à l'Institut de Constructions Hydrauliques, Université de Rome; et à l'Ecole d'Ingé-

nieurs, Université de Cambridge. L'étude fut présentée comme thèse de doctorat ès sciences, à la Sorbonne, Université de Paris, sous la direction du professeur André Fortier.

REFERENCES

- [1] Hsu (H. C.), "Characteristics of Mean Flow and Turbulence at an Abrupt Two-Dimensional Expansion," Ph. D. Dissertation, State University of Iowa, 1950.
- [2] ARIE (M.), "Flow Past a Normal Plate in Contact with a Boundary," M. S. Thesis, State University of Iowa, 1955.
- [3] ARIE (M.), and ROUSE (H.), "Experiments on Two-Dimensional Flow over a Normal Wall," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 1, Part 2, 1956.
- [4] ARIE (M.), "Characteristics of Two-Dimensional Flow behind a Normal Plate in Contact with a Boundary on Half Plane," *Memoirs, Faculty of Engineering*, Hokkaido University, Vol. 10, No. 2, 1956.
- [5] ROUSE (H.), "Diffusion in the Lee of a Two-Dimensional Jet," *Proceedings, Ninth International Congress of Applied Mechanics*, Brussels, 1957.
- [6] SIAO (T.-T.), "Characteristics of Turbulence in an Air-Flow Model of the Hydraulic Jump," Ph. D. Dissertation, State University of Iowa, 1954.
- [7] NAGARATNAM (S.), "The Mechanism of Energy Dissipation in the Hydraulic Jump," M. S. Thesis, State University of Iowa, 1957.
- [8] ROUSE (H.), SIAO (T.-T.), and NAGARATNAM (S.), "Turbulence Characteristics of the Hydraulic Jump," *Proceedings, American Society of Civil Engineers*, February, 1958.
- [9] RAO (T. R. K.), "Investigation of the Penetration of a Jet into a Counterflow," M. S. Thesis, State University of Iowa, 1958.
- [10] MISES (R. von), "Berechnung von Ausfluss- und Ueberfallzahlen," *Zeitschrift VDI*, 1917.
- [11] BIRKHOFF (G.), "Hydrodynamics," Princeton, 1950.
- [12] SCHLICHTING (H.), "Grenzschichttheorie," Karlsruhe, 1951.
- [13] ROUSE (H.), and ABUL-FETOUH (A.-H.), "Characteristics of Irrotational Flow Through Axially Symmetric Orifices," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 17, No. 4, 1950.
- [14] ROUSE (H.), "Seven Exploratory Studies in Hydraulics," *Proceedings, American Society of Civil Engineers*, August, 1956.
- [15] ANGUS (R. W.), "Hydraulics for Engineers," London, 1937.
- [16] NIKURADSE (J.), "Gesetzmässigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren," *VDI Forschungsheft 356*, 1932; "Strömungsgesetze in rauhen Rohren," *VDI Forschungsheft 361*, 1933.
- [17] ROUSE (H.), "Elementary Mechanics of Fluids," New York, 1945.
- [18] ROUSE (H.), and McNOWN (J. S.), "Cavitation and Pressure Distribution," *State University of Iowa, Studies in Engineering*, Bulletin 32, 1948.
- [19] ROUSE (H.), "Advanced Mechanics of Fluids," New York, 1959.
- [20] YU (Y.-S.), "Effect of Transverse Curvature on Turbulent-Boundary-Layer Characteristics," *Journal of Ship Research*, December, 1958.
- [21] PAI (S. I.), "Viscous Flow Theory, Vol. 1, Laminar Flow," New York, 1956.
- [22] STOKES (G. G.), "On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion, and of the Equilibrium and Motion of Elastic Solids," *Transactions, Cambridge Philosophical Society*, Vol. 8, 1845.
- [23] LAMB (H.), "Hydrodynamics," 6th edition, New York, 1946.
- [24] REYNOLDS (O.), "On the Dynamical Theory of Incompressible Fluids and the Determination of the Criterion," *Philosophical Transactions, Royal Society*, Vol. 186, 1894.
- [25] TOWNSEND (A. A.), "The Structure of Turbulent Shear Flow," Cambridge, 1956.
- [26] TAYLOR (G. I.), "The Spectrum of Turbulence," *Proc. Royal Society A*, Vol. 164, 1938.
- [27] BATCHELOR (G. K.), "The Theory of Homogeneous Turbulence," Cambridge, 1953.
- [28] TAYLOR (G. I.), "Statistical Theory of Turbulence," *Proc. Royal Society A*, Vol. 151, 1935.
- [29] KARMAN (T. von), and HOWARTH (L.), "On the Statistical Theory of Isotropic Turbulence," *Proc. Royal Society A*, Vol. 164, 1938.
- [30] BATCHELOR (G. K.), "Kolmogoroff's Theory of Locally Isotropic Turbulence," *Proc. Cambridge Philosophical Society*, Vol. 43, 1947.
- [31] CORRSIN (S.), "An Experimental Verification of Local Isotropy," *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 16, 1949.
- [32] KLEBANOFF (P. S.), "Characteristics of Turbulence in a Boundary Layer with Zero Pressure Gradient," *Technical Note No. 3178, National Advisory Committee for Aeronautics*, 1954.
- [33] LAUFER (J.), "The Structure of Turbulence in Fully Developed Pipe Flow," *Report 1174, National Advisory Committee for Aeronautics*, 1954.
- [34] ROUSE (H.), "Use of the Low-Velocity Air Tunnel in Hydraulic Research," *Proceedings of the Third Hydraulics Conference*, State University of Iowa Studies in Engineering, Bulletin 31, 1947.
- [35] HUBBARD (P. G.), "Operating Manual for the IIHR Hot-Wire and Hot-Film Anemometers," State University of Iowa, Studies in Engineering, Bulletin 37, 1957.
- [36] HOWE (J. W.), "Flow Measurement," Chapter III, *Engineering Hydraulics*, New York, 1950.
- [37] PETERS (H.), "Druckmessung," Vol. IV, *Handbook der Experimentalphysik*, Leipzig, 1932.

Distribution of energy in regions of separation

(Continuation and end)*

by HUNTER ROUSE

IOWA INSTITUTE OF HYDRAULIC RESEARCH
STATE UNIVERSITY OF IOWA

For illustrations, see French text, p. 391

During the past decade the Iowa Institute of Hydraulic Research has undertaken a series of studies of flow in the vicinity of quasi-stable eddies produced by separation at boundary angularities.

Professor Rouse described in the present paper the determination of the mean and secondary patterns of axisymmetric flow for two comparable boundary forms: the abrupt inlet and the blunt shaft. Measurements available for analysis included the distributions of mean velocity, mean pressure, longitudinal and radial intensities of turbulence, turbulent shear, and longitudinal intensity gradient. Through use of the equations of momentum and of energy for the mean and the secondary motion, the measured distributions were adjusted

to yield the required balance of the essential terms in the equations, thus yielding results in general accord with physical requirements. There are presented in the form of the flow patterns themselves, supplemented by curves of variation of the individual momentum and energy terms throughout the regions of separation.

Of particular significance is the interrelationship of turbulence production, connection, and dissipation, and the fact that a relatively small amount of turbulence energy is required locally to produce a large overall change in flow pattern.

Two final diagrams indicate the variation of the terms of the Bernoulli equation extended to include the effects of turbulence and energy dissipation.

EXPERIMENTAL MEASUREMENTS

Air Tunnel, Cylinder, and Duct

In order to provide the basic experimental information necessary to an examination of the two states of motion under consideration, two graduate-student members of the Institute staff were requested to undertake appropriate laboratory tests, for subsequent analysis by the writer during an anticipated period of relative freedom from administrative duties. Since both phenomena are inherently independent of gravitational influence, it was considered desirable to take advantage of the use of air in place of water as the experimental fluid [34]. The blunt-body measurements were thus conducted in one of the Institute air tunnels, and for the abrupt-inlet measurements a simple duct of the desired form was assembled. In this regard the equipment was closely related to that already used for previous studies of this nature [1-9].

The tunnel was of the closed-circuit closed-jet type, ranging in cross section from 8×10 feet just beyond the centrifugal fan to 3×3 feet at the test section. The latter had an unobstructed length of 10 feet from entrance bell to turning vanes. It was provided with glass walls and with two lines of piezometers in brass strips set longitudinally into the hardwood ceiling and floor. The combination of louvers and a variable-speed motor permitted adjustment of the air speed in the test section from 10 to 50 feet per second. The tunnel was definitely not of the low-turbulence type, for the ambient intensity in the region of measurement was about 1 % of the mean air speed. While this would have been excessive in refined experiments, for such an exploratory study it was regarded as acceptable.

The test cylinder was smoothly turned from a plugged brass pipe to a diameter of 3 inches over a length of 4 feet. This was fitted to a brass tube of essentially the same diameter which extended to the turning vanes at the end of the test section. The entire unit was suspended by fine guy wires at the axis of the test section with its blunt upstream face approximately midway between bell and vanes. Piezometer holes were provided both across the face and along the turned portion of the cylinder at appropriate points.

The duct was formed of commercially available plastic tubing of nominal 6-inch diameter and 3/16-inch wall thickness. Its upstream end was trimmed on a lathe and cemented into a turned hole in a 1-foot section of 1/4-inch plastic sheet, which was then set into a 6×6 -foot plywood frame to simulate the reservoir wall. The duct was of uniform diameter over a length of 8 feet. Its downstream end was connected to the intake of a centrifugal blower, and a butterfly control permitted adjustment of the air speed from 10 to 100 feet per second. Side-wall piezometers were located at suitable intervals over the length of the test section. In addition, access openings were provided in pairs, top and bottom, with air-tight plugs so formed as to preserve the continuity of the inside surface when the openings were not in use.

Instrumentation

In both instances three types of measurements were undertaken: a continued check on the constancy of the ambient flow, the distribution of mean velocity and pressures, and the characteristics of the turbulence—only the second of which differed in the two investigations. The first involved the pressure change accompanying the rapid reduction of flow section—across the

(*) *La Houille Blanche*, N° 3, 1960.

entrance bell of the tunnel and across the duct inlet itself—as related to Pitot-tube measurement of the ambient velocities during calibration runs. A simple differential water manometer reading to 0.001 foot provided the control in either case. The third type of measurement—the turbulence—was effected invariably by means of the hot-wire anemometer and its accompanying circuitry, a description of which would require a small book; fortunately, such a booklet has already been prepared for this purpose [35]. It will suffice to say herein that the probes were mounted on the same traversing mechanisms as the velocity-indicating devices still to be described, and the quantities measured were the longitudinal intensity, the radial intensity, their cross product, and the time derivative of the longitudinal fluctuation. The circuits were such as to yield directly (except for a proportionality factor) the root-mean-square or mean square of each value in its ratio to the local mean velocity or its square. Whereas errors of 5-10 % are to be expected in the present state of the art even for small relative intensities, it is evident that in separation regions of low mean velocity great inaccuracy of measurement must result.

Mean-velocity indications around the blunt shaft were obtained through use of a Pitot cylinder—a brass tube $1/8$ inch in diameter having piezometer holes 30° from one another in a plug at its midsection. Rotation of the tube about an axis at right angles to the plane of flow made it possible for the position of maximum differential pressure—and hence the direction of the velocity vector—to be observed, this manometer reading then permitting the velocity magnitude to be evaluated from a calibration curve. The tube had a length of 6 inches between pivot supports, one of which held a small protractor, and it was mounted symmetrically on a traversing mechanism located well downstream from the section under study. The position of the tube was read to 0.001 foot radially, and the differential pressure was observed on a modified Wahlen type of gage [36] reading to 0.001 inch of alcohol. The distribution of pressure within the flow was determined by means of a sharp-edged $1/8$ -inch plate 1×15 inches in size, along the centerline of which were a dozen piezometers at suitable intervals. This plate could be mounted like a fin aligned with the flow at any section of the cylinder so that the radial variation in pressure could be observed.

A piezometer plate similar to that for the cylinder was used in the duct (see Fig. 12 *a*). It, however, contained only two holes, the distribution of pressure being measured as the plate was moved in steps across the duct. It completely spanned the duct for all points of meas-

urement, and the two holes were used merely as mutual controls. Instead of the rotating cylinder, any form of which would have caused too great a constriction of the confined flow, a simple hypodermic-needle stagnation tube (Fig. 12 *b*) was used for the velocity determination. This was mounted interchangeably with the piezometer plate on the traversing mechanism so as to move with its tip in the line previously followed by the piezometer holes. The direction of the tube could be reversed without displacement of the tip for measurement in zones of backflow. Since such a stagnation tube correctly indicates the mean total head even for relatively large angles of inclination [37], subtraction of the measured pressure head therefrom yielded the mean velocity head at the corresponding point. Because of their comparatively large magnitudes, such heads were measured with a differential water manometer reading to 0.001 foot.

Though not a measurement of a comparable sort, mention should also be made of the means that was used to locate the end of the eddy in each instance. Since this was invariably a zone of intense fluctuation, and since the velocity indications became indeterminate in approaching the limit zero, a short piece of fine thread mounted on a wire in such a manner as to swivel freely was inserted into the flow at the boundary to indicate the local direction of movement. The section at which it was observed to flutter upstream as often as downstream was adjudged to mark the eddy boundary.

Presentation of Measured Data

In Figs. 13-18 are shown the essential data obtained in the experiments with the inlet, and in Figs. 19-24 the corresponding data for the cylinder. All values have been reduced to non-dimensional form through division by the appropriate reference magnitudes. In both cases measurements had been made at the identical series of sections—i.e., for r/R ratios of 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 3.0, 4.0, 6.0, and 8.0. However, since the independent determination of the eddy length revealed that it was almost exactly twice as great in the case of the cylinder ($x/R=3.1$) as in the case of the inlet ($x/R=1.5$), for reasons of consistency data for alternate sections along the cylinder are omitted. The same symbols are then used for comparable sections relative to the eddy size.

Velocities were measured at the initial section of the cylinder, and also at values of r/R greater than 2.0, but because of obvious anomalies these data are not reproduced. Again for reasons of consistency, both sets of velocity data represent the vector magnitudes, even

though the vector directions and hence the component magnitudes were obtained for the cylinder. Since continuity conditions make it possible to evaluate the components through a single reapproximation at all but the initial sections (for which no satisfactory measurements were made), the components are thus simply represented in the figures. Pressure data are referred to that of the approaching flow in both instances, as a result of which the inlet data are decidedly negative throughout; they could, of course, be referred to any other base magnitude without change of form. All inlet values have been corrected for the average (but not local) constriction effect of the piezometer plate, as indicated by wall measurements with and without the plate in place; all cylinder values have been corrected for the pressure gradient along the tunnel, as indicated by tunnel-wall measurements. Only two components of the turbulence were measured; the longitudinal component was determined separately by single-wire and, together with the radial component, by cross-wire measurements, only the latter being presented. Finally, all values of the time derivative of the longitudinal velocity fluctua-

tion have been converted to the corresponding space derivative through division by the local mean longitudinal component of velocity.

Even casual inspection of the data reveals considerable experimental scatter, and a more careful examination would disclose many inconsistencies, the partial elimination of which will be discussed in the following section. Before closing the section it is pertinent to note that the procedure necessarily adopted in the present instance—experimentation and analysis at different periods—is not the ideal way to investigate such flow phenomena, for the two phases of the investigation would have proceeded far more effectively hand in hand. However, few studies of so complex a state of motion are ever satisfactory in their initial form, and it is only when they are repeated in the light of the preliminary findings that information of permanent worth is realized. For more than one reason, therefore, the present study must be regarded as wholly exploratory, with the goal of providing approximate overall pictures of the energy patterns by any means available.

EVALUATION AND DISCUSSION OF RESULTS

Determination of the Mean Flow Patterns

Although the data presented in the foregoing section embody on the whole the experimental information that is required for this purpose, discrepancies of three different kinds must first be eliminated. These are: scatter of the individual points in any one traverse, as well as inconsistencies between successive traverses in the same series; systematic displacements of points due to known instrumental bias; and disagreement between the experimental indications and the requirements of the equations of motion. Each of these has had to be reduced to a permissible magnitude by one means or another, as described in the following pages.

The scatter of points in any one traverse is customarily offset by drawing a smooth curve through them either by eye or by the method of least squares. A similar procedure can be used for correlating a sequence of traverses, for which smooth curves must still exist if another of the variables is used as parameter. That is, a series of curves showing u/U as a function of r/R for successive values of the parameter x/R can be replotted to show u/U as a function of x/R with

r/R as parameter. Adjustment of the two sets of curves so that they will both display continuous and reasonable trends thus accomplishes for data involving three variables what ordinary curve fitting does in the case of only two. All data at hand have been subjected to this process, the values used in subsequent computations being those of the justified families rather than of the measurements themselves.

Certain corrections due to instrumental bias—in particular of the pressure distribution—have already been mentioned as contained within the data as presented. One such correction remains: that for the effect of the turbulence upon the velocity indication. It is generally understood that, because of the velocity fluctuation, an instrument capable of registering the instantaneous magnitude of the velocity vector would yield a mean indication equal to the quantity:

$$\Delta p = \frac{\rho}{2} (\bar{V}^2 + \overline{V'^2}) \quad (43)$$

Different instruments [37] respond to such fluctuations to different degrees, and the completeness of the response also depends to a considerable extent upon the ratio of the fluctua-

tuation to the local mean. For example, a hypodermic-needle type of stagnation tube is practically insensitive to angularity of the flow up to about 15° , so that cross components of the velocity up to 25 % of the mean should register without error. On the other hand, the Prandtl type of Pitot tube is designed to indicate accurately the longitudinal component itself over about the same range, and should hence be insensitive to lateral fluctuations unless they are large or the mean velocity is locally small. The Pitot cylinder is evidently sensitive to different degrees in the two cross directions. After reduction to the longitudinal component of the mean vector, the present data were corrected according to the longitudinal component of the fluctuation only. In view of other adjustments, the actual extent of the correction was probably of little moment—particularly since the turbulence was almost invariably a maximum in zones of minimum velocity where the greatest error in both measurement and correction is to be expected.

For the case of flow around the cylinder, longitudinal components of the measured vector magnitudes were at once obtainable through use of the measured angularities. In the case of flow into the duct, on the other hand, the components had to be evaluated by successive approximation. The measured vector magnitudes were first assumed to represent the components; these were integrated section by section to yield the non-dimensional stream function

$$\frac{\psi}{R^2U} = \int \frac{\bar{u}}{U} \frac{r}{R} \frac{dr}{R} \quad (44)$$

as a function of r/R , and selection of r/R -values for constant increments of ψ/R^2U from the plotted function thus yielded as a first approximation the locations of the corresponding streamlines at the successive sections. From a plot of the streamlines the vector inclinations, and therefrom a second approximation of the components and of the stream function, could be obtained. The distribution for the inlet section itself, of course, was not at hand from the experimental data and had to be otherwise determined. It was taken as a first approximation from theoretical values for the distribution in the plane of a circular orifice [13], corrected according to the difference between the theoretical and measured pressures at the edges of the orifice and the inlet, respectively. All velocity-distribution curves for the duct were then subjected to minor adjustments in the wall vicinity to yield the constant magnitude of 0.5 required of the integral $\int (\bar{u}/R) (r/R) dr/R$ by conditions of continuity (i.e., in terms of the discharge, $Q=2\pi\psi$, whence $\psi/R^2U=1/2 Q/\pi R^2U=1/2$). The resulting

family of velocity profiles is shown in Fig. 25, and the corresponding pattern of streamlines in Fig. 26.

For the cylinder, the comparable adjustments were somewhat more involved. The distribution of the vector magnitude in the initial section was first approximated from that for potential flow at the midsection of a sphere, corrected according to the difference between the corresponding minimum pressure and that measured at the end of the cylinder. The pattern of streamlines in the immediate vicinity of the cylinder was then obtained by the same process of stream-function integration at successive sections as for the duct. Now, however, no condition of continuity similar to that for the uniform duct was available for control purposes, yet it was apparent that the measured increase in velocity just outside the eddy was lower than it should have been. What corresponds to the displacement thickness of the boundary layer [19],

$$\frac{\delta}{R} = \int \left(1 - \frac{\bar{u}}{U}\right) \frac{r}{R} \frac{dr}{R} \quad (45)$$

which represents the distance the flow is moved radially outward by the disturbance, was hence calculated from the velocity profiles. As the integral was evaluated, it should be noted, its limit was necessarily taken as the point at which the velocity first attained the value U . A plot of δ/R as a function of x/R is superposed as a dashed line upon the pattern of streamlines in Fig. 28. It evidently represents the form of an imaginary body which would displace a surrounding irrotational flow to the same extent as the combination of cylinder, eddy, and turbulent wake.

In the vicinity of the eddy itself, the displacement profile was found to agree quite closely with that of a Rankine ovoid (shown as a dotted line) having a semi-diameter of 1.5 and a semi-length of 2.2, indicated by a dotted line in the figure. The stream function for such a body,

$$\frac{\psi}{R^2U} = \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^2 + 0.87 \left[\frac{(x/R) + 1.3}{\sqrt{[r/R]^2 + [(x/R) - 1.3]^2}} - \frac{(x/R) + 1.3}{\sqrt{[r/R]^2 + [(x/R) + 1.3]^2}} \right] \quad (46)$$

should therefore yield with good approximation the streamline pattern around the fore part of the cylinder—of course, neither so close as to be affected by the actually blunt rather than round nose, nor so far radially as to be affected by the actually elongated rather than symmetrical profile. The first effect cannot easily be eliminated analytically. The second, however, is readily reduced by applying the Munk

approximation $\Delta(t) \approx \delta/4$ for very slender bodies to the stream function given in Eq. (8), with the result that :

$$\frac{\psi}{R^2 U} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{1}{2} \left\{ - \int_0^t \frac{\left(\frac{\delta}{R}\right)^2}{\left[\left(\frac{t}{R} - \frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^{3/2}} \frac{dt}{R} \right\} \quad (47)$$

By adjusting the irrotational positions of the velocity profiles between these two limiting requirements, the family shown in Fig. 27 was obtained, and therewith the final form of the streamlines plotted in Fig. 28.

Comparison of the two flow patterns is quite instructive, for one sees at a glance the basic similarities of the two separation phenomena and at the same time the essential difference in extent of separation in confined and unconfined flow. The two eddy zones do not differ markedly in their general proportions, in their relationship to the longitudinal pressure variation, and in their effect upon the surrounding flow. However, because of the essential dissimilarity in the reciprocal effect of the surrounding flow, the eddy of the confined case is only half as long as the one that is unconfined, and also perceptibly flatter, despite the identity of the radial boundary dimension. Other similarities and distinctions will become apparent in the energy relationships of the following section.

Before the energy analysis was begun, a further check was made upon the accuracy of the adjusted curves through use of the momentum equation for the axial direction. Upon the assumption that wall shear was not yet appreciable in either case and that the integration was carried beyond the region of appreciable shear in the case of the cylinder, and upon division by the reference momentum flux $\pi \rho R^2 U^2$, the equation reduces to the following non-dimensional forms for the duct and cylinder, respectively :

$$2 \int \left(\frac{\bar{u}}{U}\right)^2 \frac{r}{R} \frac{dr}{R} + 2 \int \frac{\bar{u}^2}{U^2} \frac{r}{R} \frac{dr}{R} + \int \left(\frac{\bar{p}}{\rho U^2/2} - 1\right) \frac{r}{R} \frac{dr}{R} = 0 \quad (48)$$

$$2 \int \left[\left(\frac{\bar{u}}{U}\right)^2 - 1\right] \frac{r}{R} \frac{dr}{R} + 2 \int \frac{\bar{u}^2}{U^2} \frac{r}{R} \frac{dr}{R} + 2 \left(\frac{\bar{u}}{U}\right)_m \int \left(1 - \frac{\bar{u}}{U}\right) \frac{r}{R} \frac{dr}{R} + \int \frac{\bar{p}}{\rho U^2/2} \frac{r}{R} \frac{dr}{R} = 0 \quad (49)$$

In each equation the first term represents the difference in mean momentum flux (equal to the Boussinesq factor β , for the inlet), and the second term the difference in turbulent momentum flux, between the section under consideration and one very far upstream. The last term embodies the effect of the difference in pressure between the two sections. The equations differ in form for three reasons. The first is simply that the relative upstream velocity is zero in the case of the inlet and unity in the case of the shaft. The second lies in the fact that the pressure has been referred to that where the relative velocity is unity in both cases—i.e., far away from the shaft, and what would be far downstream from the inlet were subsequent wall shear non-existent. The third results from the distinction between confined and unconfined flow, in that an additional term is necessary in the shaft equation to account for the flux of momentum through the periphery of the region under consideration, over which the longitudinal velocity has the mean value $(\bar{u}/U)_m$; this value differed little from unity at the adopted limit of integration, $r/R=3$.

These equations evidently involve two flow characteristics not yet discussed in detail : the mean pressure and the longitudinal intensity of turbulence, the smoothed distributions of which are shown in Figs. 29-32. Whereas the specific curves often differ considerably in detail from the original measurements, they are consistent with each other, with the overall trend of the data, and with findings for related boundary conditions [3, 8]. Moreover, when the various terms of the momentum relationship are evaluated section by section, the results (see Figs. 33 and 34) do not deviate from the requirements of the relationship by more than 7 % of the change in momentum flux. With reference to the two systems of curves, it should be noted that for the inlet the relative drop in pressure over the reservoir (0.32) appears in the total for every section, but never explicitly, whereas the final pressure magnitude for the cylinder (0.37) represents exactly the rise in pressure on the blunt face. Also noteworthy is the fact that the effect of the turbulence components upon the relationship is small.

With the foregoing checks upon the adjusted data, one is inclined to accept the corresponding plots as embodying a satisfactory degree of approximation to the mean flow pattern. One might also assume that with further adjustment still further accuracy could readily be obtained. This was not attempted, however, because satisfaction of the conditions imposed is necessary to but not sufficient for their ultimate accuracy (i.e., an infinite number of velocity and pressure profiles will satisfy continuity and momentum

requirements), and too much confidence should hence not be placed upon the finality of these indications. Some further confirmation is obtained, however, in the energy analysis of the mean motion as described in the following section.

Turbulence Production, Transport, and Dissipation

Under the simplified conditions for which the

$$2 \int \frac{\bar{u}}{U} \left(\frac{\bar{V}}{U} \right)^2 \frac{r}{R} \frac{dr}{R} + 2 \int \frac{\bar{u}}{U} \left(\frac{\bar{p}}{\rho U^2/2} - 1 \right) \frac{r}{R} \frac{dr}{R} + 4 \int \left(\frac{\bar{u}}{U} \frac{\bar{u}'^2}{U^2} + \frac{\bar{v}}{U} \frac{\bar{u}'v'}{U^2} \right) \frac{r}{R} \frac{dr}{R} - 4 \iint \left[\frac{\bar{u}'v'}{U^2} \left(\frac{\partial \bar{u}/U}{\partial r/R} + \frac{\partial \bar{v}/U}{\partial x/R} \right) + \frac{\bar{u}'^2}{U^2} \frac{\partial \bar{u}/U}{\partial x/R} + \frac{\bar{v}'^2}{U^2} \frac{\partial \bar{v}/U}{\partial r/R} + \frac{\bar{w}'^2}{U^2} \frac{\bar{v}/U}{r/R} \right] \frac{r}{R} \frac{dr}{R} \frac{dx}{R} = 0 \quad (50)$$

$$2 \int \left[\frac{\bar{u}}{U} \left(\frac{\bar{V}}{U} \right)^2 - 1 \right] \frac{r}{R} \frac{dr}{R} + 2 \int \frac{\bar{u}}{U} \frac{\bar{p}}{\rho U^2/2} \frac{r}{R} \frac{dr}{R} + 2 \int \left(1 - \frac{\bar{u}}{U} \right) \frac{r}{R} \frac{dr}{R} + 4 \int \left(\frac{\bar{u}}{U} \frac{\bar{u}'^2}{U^2} + \frac{\bar{v}}{U} \frac{\bar{u}'v'}{U^2} \right) \frac{r}{R} \frac{dr}{R} - 2 \iint \left[\frac{\bar{u}'v'}{U^2} \left(\frac{\partial \bar{u}/U}{\partial r/R} + \frac{\partial \bar{v}/U}{\partial x/R} \right) + \frac{\bar{u}'^2}{U^2} \frac{\partial \bar{u}/U}{\partial x/R} + \frac{\bar{v}'^2}{U^2} \frac{\partial \bar{v}/U}{\partial r/R} + \frac{\bar{w}'^2}{U^2} \frac{\bar{v}/U}{r/R} \right] \frac{r}{R} \frac{dr}{R} \frac{dx}{R} = 0 \quad (51)$$

The significance of the terms involving the characteristics of the mean motion will be recognized from the comments on those of the momentum relationship (the first term for the inlet now representing the Coriolis factor α), and evaluation of their magnitudes section by section will result in the trends shown in Figs. 35 and 36 (the conservative work done by the Reynolds stresses, like the turbulent momentum transport, is seen to be almost negligible). Their net sum is invariably negative, representing a loss of energy to the mean flow. For the case of the inlet the ultimate rate of loss (0.36) is necessarily in accord with the pressure drop and velocity rise already satisfying the momentum equation. For the cylinder the limiting value (0.74) is the product of the ambient velocity and the pressure on the face of the cylinder.

In either instance, such loss is equivalent to the gain in the energy of the secondary motion as embodied in the final term for turbulence production. This term is identical in the two cases, and involves three quantities not yet introduced: the radial and tangential intensities of turbulence; and the mean cross product of the longitudinal and radial fluctuations,

momentum relationship was evaluated, and under the equally reasonable assumption of a sufficiently high Reynolds number for the mean viscous stresses to be negligible at all points, the equation of energy for the mean motion can be reduced to the following pertinent forms for the inlet and the shaft, now rendered dimensionless through division by the reference energy flux $\frac{1}{2} \rho \pi R^2 U^3$:

which is proportional to the intensity of turbulent shear. The former were assumed to be related to the longitudinal component in the manner $\bar{u}'^2 \approx 2 \bar{v}'^2 \approx 2 \bar{w}'^2$, already found to apply to a sufficient degree of approximation for such purposes [8]; as a matter of fact, only the product of the shear and the radial velocity gradient was found to contribute appreciably to the production term. The adjusted plots of the cross products are shown in Figs. 37 and 38, and the resulting double integrals in Figs. 35 and 36. The sum of the terms plotted in the latter figures will be found to satisfy the respective mean energy equations within about 5 % of the differential energy flux. (It should be remarked that in order to attain such accord appreciable augmentation of the cross products for the inlet was necessary; this despite the fact that the individual components had seemed, if anything, too large.)

When the energy equation (including the Kolmogoroff approximation) for the turbulent motion is written for the same restricted conditions as that for the mean motion, it is found to have the identical form in each of the two cases:

$$4 \iint \left[\frac{\bar{u}'v'}{U^2} \left(\frac{\partial \bar{u}/U}{\partial r/R} + \frac{\partial \bar{v}/U}{\partial x/R} \right) + \frac{1}{2} \frac{\bar{u}'^2}{U^2} \frac{\partial \bar{u}/U}{\partial x/R} \right] \frac{r}{R} \frac{dr}{R} \frac{dx}{R} + 2 \int \frac{\bar{u}}{U} \frac{\bar{V}'^2}{U^2} \frac{r}{R} \frac{dr}{R} + 2 \int \frac{\bar{u}'\bar{V}'^2}{U^3} \frac{r}{R} \frac{dr}{R} + 4 \int \frac{\bar{u}'p'}{\rho U^3} \frac{r}{R} \frac{dr}{R} + \frac{60}{\mathcal{R}_R} \iint \left(\frac{\partial \bar{u}'/U}{\partial x/R} \right)^2 \frac{r}{R} \frac{dr}{R} \frac{dx}{R} = 0 \quad (52)$$

Aside from the Reynolds number $\mathcal{R}_R = RU/\nu$, three new terms appear herein. One involves

a triple velocity-fluctuation correlation which was not measured and can only be assumed (with

little likelihood of appreciable error) to be negligible. Another involves a pressure-velocity-fluctuation correlation, which must be assumed negligible in the same manner. The third is the longitudinal gradient of the longitudinal velocity fluctuation, the smoothed curves for which are reproduced in Figs. 39 and 40. With the two unmeasured terms eliminated, the turbulent energy equation is reduced to the statement that the algebraic sum of the turbulence production, convection, and dissipation terms must be equal to zero—in other words, the turbulence produced in a given locality is in part dissipated locally and in part carried away by the flow for dissipation elsewhere. Evaluation of the convection and dissipation rates for comparison with that of production already at hand leads to the composite plots of Figs. 41 and 42. Although the agreement of the calculated points with the curves satisfying the physical conditions of the equation is evidently excellent, it must be remarked that the gradient data (as in the case of the cross product, particularly those for the inlet) were arbitrarily adjusted to this end. They thus display probable rather than precisely measured trends of the energy functions. It is, however, significant to observe that the cumulative dissipation lags behind the cumulative production by the amount of the local convection, and that the two approach their common limit only as the turbulence of the flow—invariably a small quantity—gradually approaches zero.

Since the foregoing equations of energy are actually written in terms of power—that is, rates of energy flux and rates of doing work—it is of interest to examine their better-known form in terms of energy per unit volume as embodied in the equation of Bernoulli. This is

obtained, in effect, by integrating the power form of the basic equation, divided by the constant differential rate of flow dQ , along a streamtube. For steady irrotational flow the resulting Bernoulli sum $B = \rho V^2/2 + p$ is necessarily a constant along the streamtube, but for rotational flow in which only the mean field is steady, three additional terms will be included :

$$B = \frac{1}{2} \rho \bar{V}^2 + \bar{p} + \frac{1}{2} \rho \bar{V}^2 + \rho \bar{u}^2 + \Delta \quad (53)$$

The term for the kinetic energy of the mean motion thus has its counterpart in that for the kinetic energy of the turbulence, while the mean pressure has its counterpart in a Reynolds pressure. One is inclined to look upon Δ as a dissipation term, since $B - \Delta$ represents the net energy per unit volume at any point. However, Δ stems not only from the dissipative work done by internal viscous stresses, but also from the conservative work done by external Reynolds stresses. In other words, Δ can actually decrease along one streamline as it increases along another, due to a lateral transfer of energy by the mixing process. The integral $D = \int \Delta dQ$ over the flow section, of course, becomes equivalent to the dissipation already evaluated, for the individual elements of the transfer process are thereby balanced out.

Figures 43 and 44 embody plots of the five successive terms of the expanded Bernoulli equation after division by the dynamic pressure $\rho U^2/2$ —the sum of the terms now having the magnitude of unity. With the eddy length L utilized as the linear reference for both inlet and shaft, the energy distribution is seen to be surprisingly similar in the two phenomena.

CONCLUSION

By a combination of analytical, experimental, and somewhat arbitrary graphical means, approximate representations of the primary and secondary parts of the flow into an abrupt inlet and around a blunt shaft have been obtained. These cannot be considered to provide any quantitative information as to the internal details of the turbulence mechanism, because the measurements were not sufficiently complete or precise, and the adjustments were too definitely aimed at balancing the overall relationships. On the other hand, it is believed that the method employed will serve the double purpose of revealing the fundamental characteristics of the two patterns of motion and of illustrating the rela-

tions that prevail among the principal members of the momentum and energy equations. Since the motion as a whole must be understood before the details can properly be investigated, the study may be regarded as the indispensable beginning of a more refined investigation.

General observations that are of importance include the following. Separation that is started by the inertial characteristics of the mean flow is brought to an end by the inertial characteristics of the turbulence, each without the necessity of viscous action. The separation zone is therefore dependent in form and size upon the geometry of the boundaries, and is far more restricted in its extent in confined flow than in

unconfined. The velocity field around a separation zone is similar to that of irrotational flow around a solid body of similar form, and the pressure distribution within the zone as well as around it varies accordingly. Energy is lost to the mean flow almost solely by the formation of turbulence. The amount of turbulence pres-

ent at any point within a zone of separation is relatively small. However, it accomplishes the double effect of readjusting the velocity field toward its originally uniform state, through the mixing action of the larger eddies, and of producing its own decay through viscous shear within the smallest eddies.

ACKNOWLEDGMENTS

Experimental data utilized herein were obtained by Hau-Wong Ho, for the mean flow at the inlet, and T. R. Krishna Rao, for the mean and turbulent flow at the shaft and the turbulent flow at the inlet, with the assistance of K. P. Singh in performing certain of the numerical reductions, all through the support of the Office of Naval Research under Contract N8onr-500(03) with the Iowa Institute of Hydraulic Research. The data were analyzed and the paper was prepared by the writer dur-

ing the year 1958-9 as Senior Post-Doctoral Fellow of the National Science Foundation at the Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, University of Göttingen; the Istituto di Costruzioni Idrauliche, University of Rome; and the Department of Engineering, University of Cambridge. The paper was presented as a thesis for the Doctorat ès Sciences at the Sorbonne, University of Paris, under Professor André Fortier.

NOTRE FRONTISPICE

(Cf. p. 330)

FREEMAN (1855-1932)

Peu de carrières furent aussi diversement et extraordinairement remplies que celle de Freeman; il faudrait de nombreuses pages pour relater toutes les activités auxquelles il s'adonna.

John Ripley Freeman était né le 27 juillet 1855 dans une ferme de West Bridgton, dans le Maine (U.S.A.).

Tout à tour chargé d'organiser tous les moyens de lutte contre le feu, de mettre en valeur le fleuve Saint-Laurent et d'y exécuter de nouveaux ouvrages de contention, de développer l'énergie hydraulique au Canada, de construire de grands barrages au Mexique et dans l'Idaho, d'étudier divers problèmes spéciaux de caractère militaire pour le canal de Panama, d'améliorer, en Chine, le Grand Canal et d'y étudier les crues du Fleuve Jaune et de la rivière Hwai, il mit ses profondes et très diverses connaissances au service de multiples problèmes et de nombreux pays.

Par sa maîtrise, par son autorité incontestée, par son extraordinaire dynamisme, Freeman mérite sans doute d'être compté parmi les grands pionniers de l'Hydraulique contemporaine. On a pu, en tout cas, le considérer comme le principal promoteur de l'Hydraulique américaine. Pour ne parler que de l'Hydraulique expérimentale, — à laquelle son fameux ouvrage « Hydraulic Laboratory Practice » apporta une contribution fondamentale —, Freeman, frappé des succès obtenus en Europe, fut effectivement le fondateur de l'Ecole américaine et l'instigateur persévérant des moyens très remarquables dont elle dispose aujourd'hui.

FREEMAN (1855-1932)

Few men can have had such an extraordinary and diversified career as John Ripley Freeman whose activities would fill several pages if we were to list them fully.

He was born on a farm at West Bridgton, Maine, U.S.A., on July 27th 1855.

In putting his broad and deep knowledge at the disposal of many countries he was concerned with organizing all types of fire-fighting services, with harnessing the St. Lawrence River and constructing various reclamation works on it, with developing hydro-power in Canada, with building large dams in Mexico and Idaho, with studying various military problems relating to the Panama Canal, with improving the Grand Canal in China where he also studied the problem of the Yellow and Hwai River floods. Freeman's mastery of his subject, his unchallenged authority and his extraordinary vitality mark him out as one of the great pioneers of contemporary hydraulics. No one can deny that he was the main originator of American hydraulics. We have only to consider the field of experimental hydraulics, to which his book, "Hydraulic Laboratory Practice" was a fundamental contribution, to see that Freeman, whose success in Europe was outstanding, is the real founder of the American School, and the man to whose perseverance it owes the remarkable facilities it enjoys to-day.