Direct solution for diameter of pipe in rough turbulent flow

Une solution directe pour déterminer le diamètre d'un tuyau rugueux en régime d'écoulement turbulent

PAR N. RAJARATNAM

B.E. (HONS.), M.SC. (ENGG.), MEM. I.A.H.R.
RESEARCH FELLOW, CIVIL AND HYDRAULIC ENGINEERING SECTION,
INDIAN INSTITUTE OF SCIENCE, BENGALORE-12 (INDIA)

A direct analytical solution is presented in this paper for the diameter of the pipe in fully developed rough turbulent flow.

Le présent article expose une solution analytique pour la détermination du diamètre d'un tuyau rugueux en régime d'écoulement turbulent établi.

INTRODUCTION

Three types of problems are encountered in the analysis of simple pipe flow [1]. They are given below :

	Given	Required
(*a*)	D, L, ρ, μ, K and Q or V	h_f
(*b*)	h_f, D, L, ρ, μ, and K	Q or V
(*c*)	h_f, Q, L, ρ, μ, and K	D

Where :

D = is the diameter of the pipe,
L = is the length of the pipe,
ρ = is the mass density of the fluid,
μ = is the coefficient of dynamic viscosity of the fluid,
K = is the absolute roughness of the pipe,
Q = is the discharge,
V = is the velocity of flow,
h_f = is the head lost by friction.

Trois types de problèmes différents se présentent dans l'analyse de l'écoulement simple dans un tuyau [1]. Ils sont :

	Données connues	Données recherchées
(*a*)	D, L, ρ, μ, K et Q ou V	h_f
(*b*)	h_f, D, L, ρ, μ, et K	Q ou V
(*c*)	h_f, Q, L, ρ, μ, et K	D

où :

D = Diamètre du tuyau;
L = Longueur du tuyau;
ρ = Densité de masse du fluide;
μ = Coefficient de viscosité du fluide;
K = Rugosité absolue du tuyau;
Q = Débit;
V = Vitesse d'écoulement;
h_f = Perte de charge due au frottement.

For the first type, where the head lost by friction is required, the Reynolds Number ($\mathcal{R}$) can be calculated. With the calculated value of $\mathcal{R}$ and given value of (D/K), the Darcy's friction factor in the Darcy-Weisbach's formula :

Pour le problème du premier type, où il s'agit de déterminer la perte de charge due au frottement, on peut calculer le nombre de Reynolds $\mathcal{R}$. Ensuite, avec cette valeur calculée de $\mathcal{R}$, et une valeur donnée de (D/K), on tire directement de l'abaque de Moody [2] le coefficient de frottement de Darcy intervenant dans la formule de Darcy-Weisbach :

$$h_f = \frac{f.\mathrm{L}.\mathrm{V}^2}{2\,g\mathrm{D}} \tag{1}$$

can be obtained directly from Moody's Chart [2].

In the second type, where the rate of flow is required, $\mathcal{R}\sqrt{f}$ can be calculated by the formula :

Dans le problème du deuxième type, où il s'agit de déterminer le débit, $\mathcal{R}\sqrt{f}$ peut être calculé au moyen de la formule :

$$\mathcal{R}\sqrt{f} = (\mathrm{D}^{3/2})/\nu\,.(2\,gh_f/\mathrm{L})^{1/2} \tag{2}$$

Knowing $\mathcal{R}\sqrt{f}$ and D/K, f can be obtained from the chart given by Rouse [3]. Knowing f, the velocity of flow and hence the rate of flow can be obtained from equation (1).

Connaissant $\mathcal{R}\sqrt{f}$ et D/K, on obtient f directement de l'abaque donnée par Rouse[3]. Avec la valeur de f ainsi obtenue, on déduit la vitesse d'écoulement, et de là le débit, de l'équation (1).

In the third type of problem, where the diameter is required, a direct solution is available only for smooth pipes, for which Kalinske has plotted $\mathcal{R}f^{1/5}$ against f (4). From the given data $\mathcal{R}f^{1/5}$ can be calculated using the formula :

Dans le problème du troisième type, où il s'agit de déterminer le diamètre du tuyau, une solution directe n'est possible que pour les tuyaux lisses, pour lesquels Kalinske a établi une loi $\mathcal{R}f^{1/5}$ en fonction de f [4]. On peut tirer $\mathcal{R}f^{1/5}$ des valeurs données, au moyen de la formule :

$$\mathcal{R}f^{1/5} = [4\,\mathrm{Q}^{3/5}/\pi\nu]\,[(h_f/\mathrm{L})\,(2\,g\,\pi^2/16)]^{1/5} \tag{3}$$

and f can be obtained from the chart and substituting the known and calculated quantities in the equation

et on obtient f de l'abaque. En introduisant les quantités connues et calculées dans l'équation :

$$h_f = (f\mathrm{L}.16\,\mathrm{Q}^2)/(2\,g\,\pi^2\,\mathrm{D}^5) \tag{4}$$

D can be solved for.

on peut alors calculer D.

In the case of rough pipes, no such direct solution is available and it is normally solved as indicated below :

Aucune solution directe de ce genre n'est disponible pour les tuyaux rugueux. La solution se fait généralement de la manière suivante :

$$\mathrm{V} = 4\,\mathrm{Q}/\pi\mathrm{D}^2 \tag{5}$$

substituting equation (5) in equation (1)

et en introduisant l'équation (5) dans l'équation (1), on obtient :

$$\mathrm{D}^5/f = 8\,\mathrm{LQ}^2/h_f\,\pi^2 g \tag{6}$$

in which the terms on the right hand side are known.

dans laquelle les termes du deuxième membre sont connus.

$$\mathcal{R} = 4\,\mathrm{Q}/\pi\nu\,\mathrm{D} \tag{7}$$

If f is assumed, D can be calculated from equation (6), and $\mathcal{R}$ from equation (7). Knowing D/K and $\mathcal{R}$, f can be read off from Moody's Chart. If this value off f is equal to the assumed

En se donnant f, on peut obtenir D de l'équation (6), et $\mathcal{R}$ de l'équation (7). Connaissant D/K et $\mathcal{R}$, on tire f directement de l'abaque de Moody. Si la valeur de f ainsi obtenue se révèle égale à

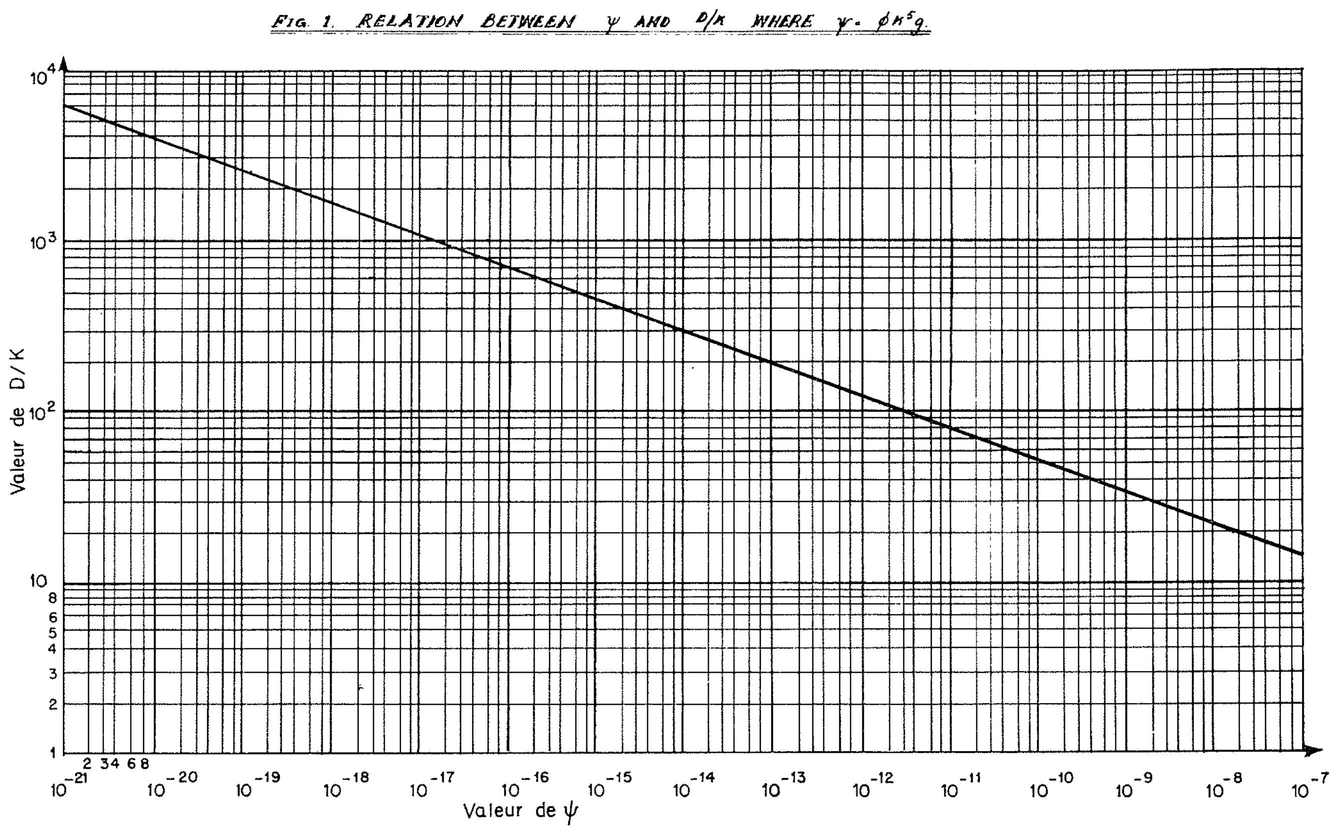

FIG. 1

TABLE I

D/K	ψ
20.0	181.0 $\times 10^{-10}$
25.0	53.62 $\times 10^{-10}$
33.4	11.13 $\times 10^{-10}$
50.0	1.26 $\times 10^{-10}$
66.7	0.271 $\times 10^{-10}$
100.0	3 023.0 $\times 10^{-15}$
125.0	933.3 $\times 10^{-15}$
167.0	158.9 $\times 10^{-15}$
250.0	23.56 $\times 10^{-15}$
500.0	0.61 $\times 10^{-15}$
1 000.0	1 590 $\times 10^{-20}$
1 250.0	493.5 $\times 10^{-20}$
1.670.0	108.4 $\times 10^{-20}$
2 500.0	13.18 $\times 10^{-20}$
5 000.0	0.36 $\times 10^{-20}$

TABLEAU I

D/K	ψ
20,0	181,0 $\times 10^{-10}$
25,0	53,62 $\times 10^{-10}$
33,4	11,13 $\times 10^{-10}$
50,0	1,26 $\times 10^{-10}$
66,7	1,271 $\times 10^{-10}$
100,0	3 023,0 $\times 10^{-15}$
125,0	933,3 $\times 10^{-15}$
167,0	158,9 $\times 10^{-15}$
250,0	23,56 $\times 10^{-15}$
500,0	0,61 $\times 10^{-15}$
1 000,0	1 590 $\times 10^{-20}$
1 250,0	493,5 $\times 10^{-20}$
1 670,0	108,4 $\times 10^{-20}$
2 500,0	13,18 $\times 10^{-20}$
5 000,0	0,36 $\times 10^{-20}$

value, the solution is complete. If not, the trial and error method is carried through until two successive values agree closely.

In this paper, a simple and direct solution is proposed for the above problem in the case of fully developed rough turbulent flow.

la valeur supposée, la solution est complète. Dans le cas contraire, on continue à procéder par tâtonnements jusqu'à ce qu'on obtienne deux valeurs successives qui s'accordent très bien.

Une solution à la fois simple et directe est proposée pour ce problème dans le présent article, pour un régime d'écoulement rugueux et turbulent établi.

Theory of the Method

Darcy Weisbach's Equation is :

Théorie de la méthode

L'équation de Darcy-Weisbach est la suivante :

$$h_f = f\,(LV^2/2\,g\,D) \quad (8)$$

$$= f\,(16\,L/2\,g\,\pi^2)\,(Q^2/D^5) \quad (9)$$

For fully developed turbulent flow in rough circular pipes :

$$1/\sqrt{f} = 2\log_{10}(D/2\,K) + 1.74 \quad (10)$$

Substituting equation (10) into equation (9)

$$h_f = \frac{1}{[2\log_{10}(D/2\,K) + 1.74]^2}\,\frac{16\,L}{2\,g\,\pi^2}\,\frac{Q^2}{D^5} \quad (11)$$

i.e.

$$S_f = \frac{1}{[2\log_{10}(D/2\,K) + 1{,}74]^2}\,\frac{16}{2\,g\,\pi^2}\,\frac{Q^2}{D^5} \quad (12)$$

i.e.

$$S_f = \Phi\,Q^2 \quad (13)$$

Where :

$$\Phi = \frac{1}{[2\log_{10}(D/2\,K) + 1.74]^2}\,\frac{16}{2\,g\,\pi^2}\,\frac{1}{D^5} \quad (14)$$

Again :

$$\Phi g K^5 = \frac{1}{[2\log_{10}(D/2\,K) + 1.74]^2}\,\frac{16}{2\,\pi^2}\,\frac{1}{(D/K)^5} \quad (15)$$

$$= \psi \quad (16)$$

where :

$$\psi = \Phi g K^5 \quad (16\,a)$$

It can be seen that ψ is a dimensionless quantity. ψ has been evaluated for different values of (D/K) and is given in Table I and shown plotted in Fig. 1. It is found that :

$$\psi = 0.1178\,(K/D)^{5.297} \quad (17)$$

The method of solving for the diameter is given below :

Given : h_f, Q, L, ρ, μ and K.

Nous avons, pour un régime d'écoulement turbulent établi dans les tuyaux rugueux de section circulaire :

$$1/\sqrt{f} = 2\log_{10}(D/2\,K) + 1{,}74 \quad (10)$$

En introduisant l'équation (10) dans l'équation (9) :

$$h_f = \frac{1}{[2\log_{10}(D/2\,K) + 1{,}74]^2}\,\frac{16\,L}{2\,g\,\pi^2}\,\frac{Q^2}{D^5} \quad (11)$$

soit :

$$S_f = \frac{1}{[2\log_{10}(D/2\,K) + 1{,}74]^2}\,\frac{16}{2\,g\,\pi^2}\,\frac{Q^2}{D^5} \quad (12)$$

avec :

$$S_f = \Phi\,Q^2 \quad (13)$$

où :

$$\Phi = \frac{1}{[2\log_{10}(D/2\,K) + 1{,}74]^2}\,\frac{16}{2\,g\,\pi^2}\,\frac{1}{D^5} \quad (14)$$

et :

$$\Phi g K^5 = \frac{1}{[2\log_{10}(D/2\,K) + 1{,}74]^2}\,\frac{16}{2\,\pi^2}\,\frac{1}{(D/K)^5} \quad (15)$$

$$= \psi \quad (16)$$

avec :

$$\psi = \Phi g K^5 \quad (16\,a)$$

On voit que ψ est une quantité sans dimensions. Les valeurs de ψ ont été évaluées pour différentes valeurs de (D/K); elles sont données à la fois dans le tableau I, et, sous forme graphique, dans la figure 1. Il apparaît que :

$$\psi = 0{,}1178\,(K/D)^{5{,}297} \quad (17)$$

Le diamètre du tuyau se détermine de la manière suivante :

Etant donnés : h_f, Q, L, ρ, μ, et K.

Find out D so that the flow is in the fully developed rough turbulent stage.

From the equation : $S_f = \Phi Q^2$.

Φ can be calculated. ψ can be calculated from the equation $\psi = \Phi g K^5$. From the known value of ψ, K/D can be calculated from the equation (17), or from the figure. The product of K and 1/(K/D) gives the diameter of the pipe.

Example

Find out the diameter of the pipe to have fully developed rough turbulent flow with the given data :

Head loss in a length of 1 000 ft = 7 ft

Discharge . . . . = 1.77 cfs

K . . . . = 0.00015 ft

Kinematic viscosity ν of the fluid = 3×10^{-5} ft²/sec

Solution

$$S_f = \Phi Q^2$$

$$\Phi = S_f/Q^2 = 0.007/1.77^2 = 0.00223$$

$$\psi = \Phi g K^5 = 0.00223 \times 32.2 \times (0.00015)^5$$

$$\psi = 0.546 \times 10^{-20}$$

Substituting in the equation :

$$\psi = 0.1178\,(K/D)^{5.297}$$

Or reading from the chart :

$$K/D = 0.222 \times 10^{-3}$$

$$D = D/K \times K$$

$$= \frac{1}{0.222 \times 10^{-3}} \times 0.00015 = 0.675 \text{ ft}$$

On déterminera D, tel que le régime d'écoulement soit rugueux, turbulent et établi.

Nous pouvons calculer Φ de l'équation :

$$S_f = \Phi Q^2$$

ψ se calcule de l'équation $\psi = \Phi g K^5$.

Si la valeur de ψ est connue, K/D se calcule à partir de l'équation (17), ou bien au moyen du graphique.

Le produit de K par 1/(K/D) fournit le diamètre du tuyau.

Exemple

Soit à déterminer le diamètre du tuyau, pour un écoulement en régime établi, rugueux et turbulent, pour les caractéristiques suivantes :

Perte de charge pour une longueur de 1 000 pieds (305 m) . . . . = 7 pieds (2.13 m)

Débit . . . . = 1,77 pied cube/sec (50 l/s)

K . . . . = 0,00015 pied (0,046 mm)

Viscosité cinématique ν du fluide = 3×10^{-5} pieds carrés/sec (2,79 mm²/s)

Solution

$$S_f = \Phi Q^2$$

$$\Phi = S_f/Q^2 = 0{,}007/1{,}77^2 = 0{,}00223$$

$$\psi = \Phi g K^5 = 0{,}00223 \times 32{,}2 \times (0{,}00015)^5$$

$$\psi = 0{,}546 \times 10^{-20}$$

En introduisant dans l'équation :

$$\psi = 0{,}1178\,(K/D)^{5{,}297}$$

ou, d'après le graphique :

$$K/D = 0{,}222 \times 10^{-3}$$

$$D = D/K \times K$$

$$= \frac{1}{0{,}222 . 10^{-3}} . 0{,}00015 = 0{,}675 \text{ ft } (205{,}7 \text{ mm})$$

CONCLUSIONS

The limitation of this method is that it can be used only for fully developed turbulent flow in rough pipes. Another solution for the entire range of turbulent flow in circular pipes is being attempted based on the Colebrook-White Transition Function This method can as well be used for solving the other two types of problems also in the region considered.

La limitation de cette méthode réside en ce qu'elle ne convient que pour des régimes établis d'écoulement turbulent dans des tuyaux rugueux. Une solution pour toute la gamme des écoulements turbulents dans les tuyaux circulaires, basée sur la fonction de transition de Colebrook-White, est actuellement à l'étude. Cette méthode conviendrait également pour la solution

After doing this work, the author came to know of the existence of another approximate solution [5] for the above problem where D is given by the equation.

des deux autres problèmes, dans la même zone considérée.

Après avoir terminé la présente étude, l'auteur a eu connaissance d'une autre solution approchée [5] pour le problème traité, dans laquelle D est donné par l'équation :

$$D^{16/3} = Q^2LK^{1/3}/217\ h_f \tag{18}$$

derived from the equation :

$$1/f = c\,(\overline{R}/K)^{1/3}$$

where c is a constant having a mean value of 34.5 and $\overline{R}$ is the hydraulic radius, this equation being an approximation to the Prandtl-Karman rough pipe resistance equation. Another universal chart solution for pipe flow has recently been proposed by Ackers [6] based on the Colebrook-White Equation for commercial pipes.

laquelle est déduite de l'équation :

$$1/f = c\,(\overline{R}/K)^{1/3}$$

dans laquelle c est une constante dont la valeur moyenne est 34,5, et $\overline{R}$ est le rayon hydraulique. Cette équation est une approximation de l'équation de Prandtl-Karman pour la résistance des tuyaux rugueux

Une autre solution graphique universelle, basée sur l'équation de Colebrook-White, a récemment été proposée par Ackers [6], pour les tuyaux du commerce.

Acknowledgement

The author is indebted to Professor N.S. Govinda Rao and Assistant Professor K. Seetharamiah, for their guidance. Appreciation for criticism is extended to Sri A. Thiruvengadam of the same Institute.

Remerciements

L'auteur remercie MM. le Professeur N.S. Govinda Rao et l'Assistant Professeur K. Seetharamiah pour leurs conseils, ainsi que Sri. A. Thiruvengadam, du même Institut, pour sa critique de l'étude.

RÉFÉRENCES — REFERENCES

[1] ROUSE (Hunter) : « Engineering Hydraulics », p. 408.

[2] MOODY (L. F.) : « Friction factors for pipe flow. » *Trans. A.S.M.E.*, nov. 1944.

[3] ROUSE (Hunter) : « Evaluation of boundary roughness. » *Proc. of the Second Hydraulics Conference*, University of Iowa, Studies in Engg., Bulletin 27, 1942.

[4] ROUSE (Hunter) : Discussion on Ref. 3.

[5] ADVANI (R. M.) : « Recent developments in fluid flow through pipes and channels. » *Irrigation and Power*, oct. 1957.

[6] ACKERS (P.) : « Resistance of fluids flowing in pipes and channels. » Hydraulic Research, papers 1 et 2, *HMSO*, London.