The limits of applicability of the Hazen-Williams formula

BY M. H. DISKIN

B.E. M.SC.

ACTING HEAD OF HYDRAULIC LABORATORY, TECHNION—ISRAEL INSTITUTE OF TECHNOLOGY, HAIFA

Texte français, p. 724

Having been struck by the frequent error of going beyond the limits of application of the Hazen-Williams formula, the author set himself the task of determining these limits under a form corresponding with the Darcy-Weisbach equation and then superimposing the thus transformed equation on Moody's chart.

He thus finds the maximum and minimum values of the coefficient of frictional resistance suitable for use with the Hazen-Williams formula and indicates the Reynolds number ranges outside which the formula cannot be expected to supply any reliable results.

LIST OF SYMBOLS

C : Hazen-Williams coefficient of pipe roughness.
D : Diameter of pipe.
f : Darcy-Weisbach coefficient of friction.
g : Acceleration due to gravity.
J : Hydraulic gradient y/L.
K : Numberical factor $0.2004\ (100/C)^{1,852}\ D^{-0,019}$.
L : Length of pipe.
$\mathcal{R}$: Reynolds number VD/ν.
V : Mean velocity in pipe.
y : Loss of head over length L.
ε : Equivalent roughness of pipe.
ν : Kinematic viscosity.

The wide use made of the Hazen-Williams formula in pipe flow computations, and the availability of tables, nomograms and slide rules based on this formula, lead quite often to its use in cases which are outside its limits of application. It is considered, therefore, important to examine the formula in the light of the general theory of pipe flow and establish the limits of the range in which it is applicable.

The general theory of pipe flow recognizes two regimes of flow; laminar flow at Reynolds numbers below the critical Reynolds number of approximately 2 000 and turbulent flow at Reynolds numbers above the critival value. The turbulent flow region is further subdivided into three zones : smooth turbulent flow, rough turbulent flow, and a transition zone between the smooth and rough turbulent flow zones. This subdivision is made according to the effect of the wall roughness on the flow. In smooth flow the roughness has no effect, the flow being characterized only by the Reynolds number, in the rough flow zone the flow is characterized only by the relative wall roughness and the Reynolds number has no effect, while in the transition zone both factors exert their influence.

The quantitative description of the general theory of pipe flow is usually made with reference to the friction coefficient f in the Darcy-Weisbach formula for loss of head in pipes :

$$y = f\,(L/D)\,(V^2/2\,g) \qquad (1)$$

The friction coefficient (f) in this formula is a function of the Reynolds number ($\mathcal{R}$), the relative equivalent roughness (ε/D), or both according to the zone flow. The functional relationship :

$$f = \varphi\,(\mathcal{R};\ \varepsilon/D) \qquad (2)$$

is expressed by a number of equations for the various zones of flow but the most comprehensive way to express it is by the so called Nikuradse or Moody diagram (Fig. 1) which shows clearly the zones of flow and the dependance of the friction coefficient on the two factors of equation (2) above.

The limits of applicability of the Hazen-Williams equation may be determined by expressing it in a form corresponding to Darcy-Weisbach's equation (1) and comparing the resultant expression for the friction coefficient (f) with the Moody diagram.

Expressed in metric units the Hazen-Williams formula may be written as :

$$V = 0.354\,C\,J^{0.54}\,D^{0.63} \qquad (3)$$

Solving for the loss of head, the equation becomes :

$$y = \frac{6.818\,LV^{1.852}}{C^{1.852}\,D^{1.167}} \qquad (4)$$

which may also be written as :

$$y = \frac{6.818}{C^{1.852}\,D^{0.167}\,V^{0.148}}\,\frac{LV^2}{D} \qquad (5)$$

introducing the acceleration due to gravity to bring the last equation into a form corresponding to equation (1) and taking its value as $g = 9.81$ m/sec^2 the last equation becomes :

$$y = \frac{133.77}{C^{1.852}\,D^{0.167}\,V^{0.148}}\,\frac{LV^2}{D\,2\,g} \qquad (6)$$

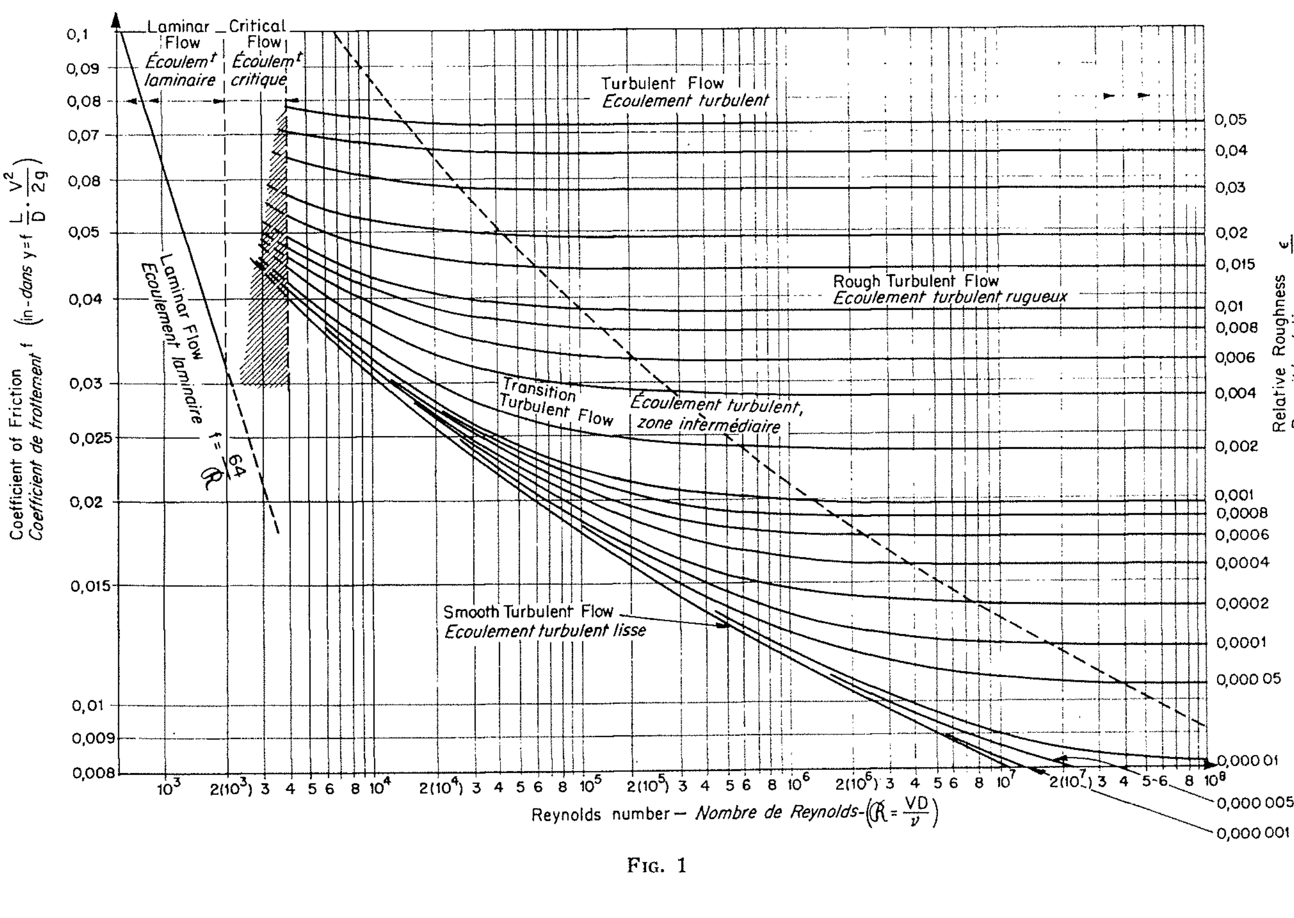

FIG. 1

showing that the expression for the coefficient of friction as given by Hazen-Williams' formula is :

$$f = \frac{133.77}{C^{1.852}\, D^{0.167}\, V^{0.148}} \qquad (7)$$

To make the last expression comparable with equation (2) above or with the Moody Diagram we must introduce into it a kinematic viscosity (ν) term, which, it is assumed, was contained in the numerical term (133.77) of the expression. Since the Hazen-Williams formula is restricted to water at ordinary temperature we may take a mean value of kinematic viscosity of $\nu = 1.14 \times 10^{-6}$ m²/sec. for water at 15 °C and introduce it into the last expression :

$$f = \frac{133.77}{(100/C)^{1.852}\,(1.14 . 10^{-6})^{0.148}} \; \frac{(100/C)^{1.852}}{D^{0.019}\,(VD/\nu)^{0.148}} \qquad (8)$$

giving :

$$f = 0.2004\, \frac{(100/C)^{1.852}}{D^{0.019}} \; \frac{1}{(VD/\nu)^{0.148}} \qquad (9)$$

The expression obtained for the coefficient of friction f shows that the Hazen-Williams formula is applicable only in the transition zone of turbulent flow where f depends on the Reynolds number $\mathcal{R} = VD/\nu$ and on the relative roughness of the pipe which in this case is expressed by the term $(100/C)^{1.852}/D^{0.019}$. Furthermore, the expression shows that the Hazen-Williams formula is applicable in part of the transition zone only, since it gives a straight line variation between $\log f$ and $\log \mathcal{R}$ whereas the transition zone lines in the Moody diagram are curved.

The limits of Reynolds numbers range in which Hazen-Williams expression for the coefficient of friction, eq. (9) is a good approximation of the transition zone lines may be obtained by superimposing on the Moody diagrams lines representing equation (9) which may be writen as :

$$f = \frac{K}{\mathcal{R}^{0.148}} \qquad (10)$$

where K is a constant factor for a given pipe, depending on the pipe diameter and its roughness expressed by the coefficient C :

$$K = 0.2004\, \frac{(100/C)^{1.852}}{D^{0.019}} \qquad (11)$$

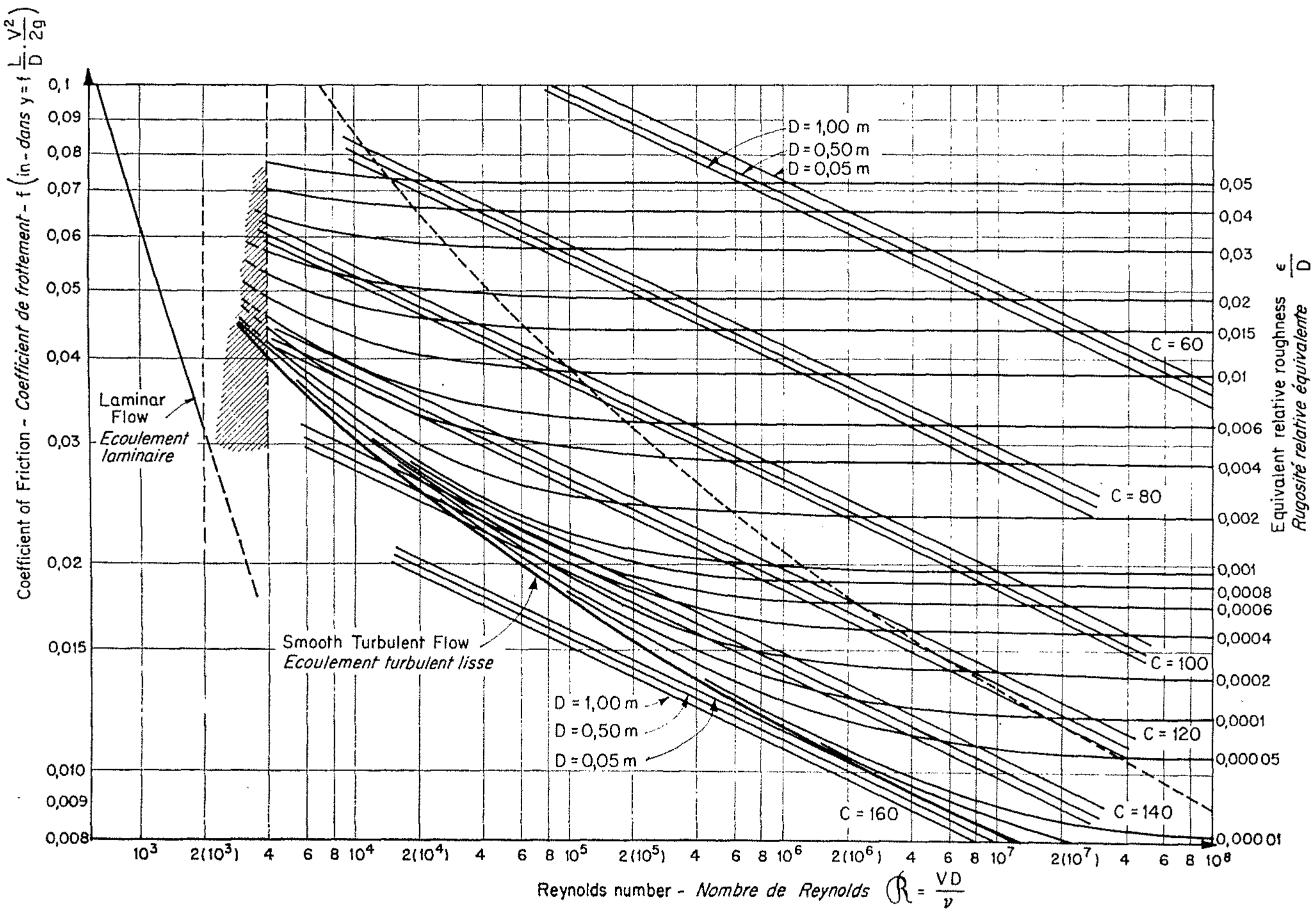

FIG. 2

Numerical values of K are given in table I for various values of D and C. The Moody diagram with the Hazen-Williams formula lines superimposed upon it is given in Fig. 2. This diagram shows clearly that the Hazen-Williams formula is applicable only for pipes having a Hazen-Williams coefficient C in the range 100 to 160 and further that for each pipe the formula is applicable to a restricted range of Reynolds numbers.

The range of Reynolds numbers over which the formula is applicable may roughly be fixed by determining, for each of the lines in the Moody diagram, the range in which its slope is approximately — 0.148. The results obtained are given in Table II which shows also the approximate values of C corresponding to the relative equivalent roughness value (ε/D).

TABLE I :

Valeurs de K / *Values of* K $= 0.2004\,(100/C)^{1.852}\,D^{-0.019}$

C	D (m) 0.05	0.10	0.25	0.50	1.00
160	0.0888	0.0877	0.0862	0.0850	0.0839
140	0.1138	0.1123	0.1103	0.1089	0.1075
120	0.1513	0.1494	0.1468	0.1449	0.1430
100	0.2121	0.2094	0.2058	0.2031	0.2004
80	0.3208	0.3165	0.3111	0.3070	0.3030
60	0.5465	0.5393	0.5300	0.5231	0.5162

CONCLUSION

The Hazen-Williams formula is applicable only to pipes having a coefficient C in the range 100-160. For each of these pipes the formula should be used only in the range of Reynolds numbers given in table II.

TABLE II :

Limits of applicability of the Hazen-Williams formula.

Limites d'application de la formule d'Hazen-Williams.

ε/D	$\mathcal{R}_{min}$	$\mathcal{R}_{max}$	Approx. C
2×10^{-2}	2×10^3	5×10^3	100
1.5×10^{-2}	2×10^3	$7{,}5 \times 10^3$	110
10^{-2}	2×10^3	1×10^4	110
6×10^{-3}	4×10^3	2×10^4	120
4×10^{-3}	8×10^3	2.5×10^4	120
2×10^{-3}	1×10^4	4×10^4	130
10^{-3}	2×10^4	1×10^5	130
6×10^{-4}	3×10^4	1.5×10^5	140
4×10^{-4}	4×10^4	2×10^5	140
2×10^{-4}	6×10^4	4×10^5	140
10^{-4}	8×10^4	8×10^5	150
5×10^{-5}	1×10^5	1×10^6	150
10^{-5}	4×10^5	4×10^6	160
5×10^{-6}	6×10^6	2×10^7	160

Limites d'application de la formule d'Hazen-Williams*

PAR M. H. DISKIN

B.E. M.SC.

ACTING HEAD OF HYDRAULIC LABORATORY, TECHNION—ISRAEL INSTITUTE OF TECHNOLOGY, HAIFA

English text, p. 720

L'auteur, frappé par le fait qu'on est souvent conduit à outrepasser les limites d'application de la formule d'Hazen-Williams, s'est proposé de déterminer ces limites en mettant l'équation d'Hazen-Williams sous une forme correspondant à l'équation de Darcy-Weisbach et en superposant au diagramme de Moody l'équation ainsi transformée.

Il obtient ainsi pour le coefficient de rugosité les valeurs maximale et minimale utilisables avec la formule d'Hazen-Williams et indique les tranches de nombres de Reynolds en dehors desquelles la formule ne peut plus être employée avec sécurité.

LISTE DES SYMBOLES

C : Coefficient de rugosité de la conduite selon Hazen-Williams.
D : Diamètre de la conduite.
f : Coefficient de frottement selon Darcy-Weisbach.
g : Accélération due à la pesanteur.
J : Gradient hydraulique y/L.
K : Paramètre $= 0{,}2004\ (100/C)^{1{,}852}\ D^{-0{,}019}$.
L : Longueur de la conduite.
$\mathcal{R}$: Nombre de Reynolds $= VD/\nu$.
V : Vitesse moyenne dans la conduite.
y : Perte de charge sur la longueur L.
ε : Rugosité équivalente de la conduite.
ν : Viscosité cinématique.

Le fréquent usage de la formule d'Hazen-Williams dans les calculs du débit d'une conduite, et le fait qu'on dispose de tables, de nomogrammes et de règles à calculs basés sur cette formule, conduisent bien souvent à l'employer dans des cas qui outrepassent ses limites d'application. Aussi importe-t il d'examiner cette formule à la lumière de la théorie générale de l'écoulement en conduite et de fixer les limites de son champ d'application.

La théorie générale de l'écoulement en conduite admet deux régimes d'écoulement : l'écoulement laminaire, à des nombres de Reynolds inférieurs à la valeur critique d'environ 2 000, et l'écoulement turbulent, pour des nombres de Reynolds supérieurs à cette valeur critique. La région de l'écoulement turbulent est divisée en-

(*) Voir figures et tableaux au texte anglais, p. 720 à 723.

suite en trois zones : écoulement turbulent lisse, écoulement turbulent rugueux, et une zone intermédiaire, formant transition entre la zone à écoulement lisse et celle à écoulement rugueux. Cette division est établie d'après les effets de la rugosité de la paroi sur l'écoulement. Dans l'écoulement lisse, la rugosité n'exerce aucun effet, et l'écoulement est caractérisé uniquement par le nombre de Reynolds; dans la zone d'écoulement rugueux, l'écoulement est caractérisé uniquement par la rugosité relative de la paroi, et le nombre de Reynolds n'a pas d'influence; enfin, dans la zone intermédiaire, ces facteurs exercent tous deux leur influence.

L'analyse quantitative de la théorie générale de l'écoulement en conduite est faite d'ordinaire en prenant en compte le coefficient de frottement f de la formule de Darcy-Weisbach pour la perte de charge en conduite :

$$y = f\,(\mathrm{L/D})\,(\mathrm{V}^2/2\,g) \qquad (1)$$

Dans cette formule, le coefficient de frottement f est fonction du nombre de Reynolds $\mathcal{R}$, de la rugosité relative équivalente ε/D, ou des deux, suivant la zone d'écoulement considérée.

La fonction :

$$f = \varphi\,(\mathcal{R};\,\varepsilon/\mathrm{D}) \qquad (2)$$

est traduite pour de nombreuses équations pour les différentes zones d'écoulement, mais sa forme d'expression la plus complète est celle dite diagramme de Nikuradse ou de Moody (fig. 1), qui montre clairement les zones d'écoulement et la dépendance du coefficient de frottement à l'égard des deux facteurs de l'équation (2) ci-dessus.

Les limites d'application de l'équation d'Hazen-Williams peuvent être déterminées en la mettant sous une forme correspondant à l'équation (1) de Darcy-Weisbach, et en comparant au diagramme de Moody l'expression du coefficient de frottement f qui en résulte.

En unités métriques, la formule d'Hazen-Williams peut s'écrire :

$$\mathrm{V} = 0{,}354\ \mathrm{C}\,\mathrm{J}^{0{,}54}\,\mathrm{D}^{0{,}63} \qquad (3)$$

pour la perte de charge, cette équation devient :

$$y = \frac{6{,}818\ \mathrm{LV}^{1{,}852}}{\mathrm{C}^{1{,}852}\,\mathrm{D}^{1{,}167}} \qquad (4)$$

et peut aussi être écrite:

$$y = \frac{6{,}818}{\mathrm{C}^{1{,}852}\,\mathrm{D}^{0{,}167}\,\mathrm{V}^{0{,}148}}\,\frac{\mathrm{LV}^2}{\mathrm{D}} \qquad (5)$$

En introduisant l'accélération due à la pesanteur pour mettre cette dernière équation sous une forme correspondant à l'équation (1), et en prenant pour g la valeur 9,81 m/s², on obtient :

$$y = \frac{133{,}77}{\mathrm{C}^{1{,}852}\,\mathrm{D}^{0{,}167}\,\mathrm{V}^{0{,}148}}\,\frac{\mathrm{D}}{2\,g} \qquad (6)$$

ce qui montre que l'expression du coefficient de frottement découlant de la formule d'Hazen-Williams est :

$$f = \frac{133{,}77}{\mathrm{C}^{1{,}852}\,\mathrm{D}^{0{,}167}\,\mathrm{V}^{0{,}148}} \qquad (7)$$

Pour rendre cette dernière expression comparable à l'équation (2) ou au diagramme de Moody, nous devons y introduire la viscosité cinématique ν, qui est supposée contenue dans le terme numérique 133,77.

Puisque la formule d'Hazen-Williams se limite à l'eau prise à la température ordinaire, nous pouvons adopter une valeur moyenne pour la viscosité cinématique :

$$\nu = 1{,}14 . 10^{-6}\ \mathrm{m^2/s} \text{ pour l'eau à 15 °C}$$

et introduire cette valeur dans la dernière expression :

$$f = \frac{133{,}77}{(100/\mathrm{C})^{1{,}852}\,(1{,}14 . 10^{-6})^{0{,}148}}\,\frac{(100/\mathrm{C})^{1{,}852}}{\mathrm{D}^{0{,}019}\,(\mathrm{VD}/\nu)^{0{,}148}} \qquad (8)$$

soit :

$$f = 0{,}2004\,\frac{(100/\mathrm{C})^{1{,}852}}{\mathrm{D}^{0{,}019}}\,\frac{1}{(\mathrm{VD}/\nu)^{0{,}148}} \qquad (9)$$

L'expression obtenue pour le coefficient de frottement f montre que la formule d'Hazen-Williams est applicable seulement dans la zone intermédiaire de l'écoulement turbulent où f dépend à la fois du nombre de Reynolds $\mathcal{R} = \mathrm{VD}/\nu$ et de la rugosité relative de la conduite, rugosité qui est ici exprimée par le terme :

$$(100/\mathrm{C})^{1{,}852}/\mathrm{D}^{0{,}019}.$$

En outre, elle montre que ladite formule est applicable à une partie seulement de la zone intermédiaire, puisqu'elle conduit à une relation linéaire rectiligne entre $\log f$ et $\log \mathcal{R}$, alors que les tracés de la zone intermédiaire dans le diagramme de Moody sont des courbes.

Les limites des nombres de Reynolds dans lesquelles le coefficient de frottement selon Hazen-Williams (équation 9) fournit, avec une bonne approximation, les tracés de la zone intermédiaire, peuvent être obtenues en superposant au diagramme de Moody les tracés représentant l'équation (9) qui peut s'écrire :

$$f = \frac{\mathrm{K}}{\mathcal{R}^{0{,}148}} \qquad (10)$$

expression où K est un facteur constant pour une conduite donnée, dépendant du diamètre de la conduite et de sa rugosité représentée par le coefficient C :

$$K = 0{,}2004 \frac{(100/C)^{1.852}}{D^{0{,}019}} \qquad (11)$$

Les valeurs numériques de K sont données dans le tableau I pour diverses valeurs de D et de C. La figure 2 montre la superposition des tracés de la formule d'Hazen-Williams au diagramme de Moody. On voit clairement sur ce graphique que la formule est applicable seulement aux conduites ayant un coefficient C d'Hazen-Williams compris entre 100 et 160 et, de plus, que pour chacune de ces conditions, la formule n'est applicable qu'à une tranche restreinte de nombres de Reynolds.

La tranche des nombres de Reynolds à l'intérieur de laquelle la formule est applicable peut être délimitée approximativement en déterminant, pour chaque ligne du diagramme de Moody, le champ dans lequel la pente est d'environ 0,148.

Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau II, qui donne aussi les valeurs approchées de C correspondant à la valeur de la rugosité relative équivalente ε/D.

CONCLUSION

La formule d'Hazen-Williams est applicable exclusivement aux conduites dont le coefficient C est compris entre 100 et 160. Pour chacune de ces conduites, la formule ne doit être employée que pour les tranches de nombres de Reynolds indiquées dans le tableau II.