Théorie de la génération de la houle cylindrique par un batteur plan

(2^e ORDRE D'APPROXIMATION)

Theory of the generation of a cylindrical wave by a straight-fronted wave generator

(Second order of approximation)

PAR PIERRE FONTANET

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

La théorie du mouvement engendré par un batteur plan dans un canal indéfini, de profondeur et de largeur constantes, rempli d'un fluide parfait, pesant et incompressible, a été faite au premier ordre d'approximation par MM. Havelock, Biesel et Kravtchenko. Le présent travail est consacré à l'étude de la deuxième approximation, ainsi qu'au calcul de l'harmonique non linéaire émis par le volet. Les abaques relatifs au batteur piston ont été tracés et reproduits dans le texte.

La solution se présente sous la forme d'une somme de séries uniformément convergentes dans toute la masse du fluide, ainsi que sur les frontières, sauf aux extrémités du volet, où la solution possède des singularités logarithmiques.

The theory of the movement produced by a straight-fronted wave generator in an indefinite canal of constant depth and breadth and containing a perfect ponderable and incompressible fluid, has been established to a first order of approximation by Messrs. Havelock, Biesel and Kravtchenko. The present work is concerned with the study of a second order of approximation and the calculation of the non-linear harmonic emitted by the flap. Graphs for a plunger-type wave generator have been plotted and are reproduced in the text.

The solution takes the form of a sum of uniformly converging series throughout the fluid mass and at its boundaries, except at the flap ends, where logarithmic singularities occur.

AVANT-PROPOS

La théorie de la génération de la houle par un batteur a été faite au premier ordre d'approximation par M. Havelock, en 1929, et par M. Biesel, en 1951.

Ce dernier auteur a notamment établi la validité de la solution formelle de M. Havelock. Ces démonstrations ont été complétées et achevées par M. Kravtchenko dans une publication ultérieure.

Lorsque le mouvement du batteur est sinusoïdal, la solution de MM. Havelock et Biesel se compose d'une houle cylindrique et d'une oscillation sinusoïdale ayant toutes deux même période que le batteur. L'oscillation est donnée sous la forme d'une série infinie dont les termes contiennent les facteurs exponentiels :

$$e^{-\lambda_p x_0}$$

En pratique ils deviennent négligeables dès que l'on s'éloigne du batteur d'une distance égale à deux ou trois fois la profondeur du canal.

La série représente ainsi une oscillation locale qui sert à l'ajustement de la condition à la limite le long du batteur. En effet, sauf construction spéciale — jamais réalisée, en fait — le déplacement du volet diffère du déplacement d'un fluide agité par une houle pure. L'écart est précisément compensé par l'oscillation locale, qui permet au fluide d'épouser exactement le mouvement du batteur (*).

Si le mouvement du générateur de houle n'est pas sinusoïdal, tout en restant périodique, on peut le décomposer en série de Fourier. A chacun de ses harmoniques correspond une houle et une oscillation locale de même période. Dans l'approximation du 1^{er} ordre, qui utilise des équations et conditions aux limites linéaires, le mouvement du fluide est obtenu simplement en additionnant les divers mouvements harmoniques. Cette théorie a été développée par M. Apté dans une thèse soutenue devant la Faculté des Sciences de Grenoble.

Mais ces diverses études ne permettent pas d'expliquer l'émission de houles harmoniques par un batteur dont le mouvement est rigoureusement sinusoïdal. Ces dernières, en effet, appartiennent à la catégorie des phénomènes non linéaires.

Le présent travail a donc pour but de compléter les théories précédentes, par la prise en compte des termes du 2^e ordre. Il permet notamment de calculer l'amplitude et la phase du deuxième harmonique émis par un batteur sinusoïdal.

La méthode qui a été suivie est une méthode d'approximations successives. Elle prend comme point de départ la solution du problème au 1^{er} ordre d'approximation. On calcule les termes du 2^e ordre (**) qui doivent être ajoutés à la précédente solution pour satisfaire aux équations et conditions aux limites du canal indéfini jusqu'au 2^e ordre d'approximation. L'expression ainsi obtenue satisfait d'autre part à la condition frontière le long du batteur au 1^{er} ordre d'approximation.

Elle contient, en effet, deux composantes :

- La première, de période T , est constituée par les termes du 1^{er} ordre qui continuent à épouser exactement le mouvement du batteur;
- La deuxième, de période $T/2$, est formée des termes du 2^e ordre rajoutés.

Comme le mouvement du volet ne contient pas d'harmonique de période $T/2$, il faudra, pour satisfaire à la condition limite au 2^e ordre d'approximation, compenser cette seconde composante, tout le long du batteur, par l'addition de termes complémentaires. On y parvient en ajoutant une houle harmonique et des oscillations sinusoïdales de période $T/2$, dont les amplitudes et les phases sont convenablement choisies.

Ces derniers termes représentent, du reste, des solutions élémentaires du mouvement du fluide dans un canal indéfini. De plus, leur amplitude étant du 2^e ordre par rapport à l'amplitude du fondamental, leurs interactions mutuelles et leurs interactions avec les termes précédents sont du 4^e et du 3^e ordre et peuvent être négligées. Les équations et conditions aux limites du canal indéfini ne cessent donc pas d'être satisfaites au 2^e ordre d'approximation après l'addition de ces dernières expressions.

En résumé, la solution formée, comme il vient d'être dit, comprend :

- La houle fondamentale et l'oscillation locale, du 1^{er} ordre et de période T ;
- Les termes du 2^e ordre accompagnant la houle et l'oscillation du 1^{er} ordre;
- La houle harmonique et l'oscillation locale de période $T/2$.

Elle satisfait à toutes les équations et conditions aux limites du problème. Elle décrit au 2^e ordre d'approximation le mouvement cylindrique engendré par un batteur dans un canal de largeur et de profondeur constantes, rempli d'un fluide pesant supposé parfait et incompressible.

Les calculs étant assez lourds, je me suis contenté, en fait, de déterminer l'amplitude et la phase de l'harmonique émis par le batteur. Pour décrire complètement le mouvement, il faudrait, en outre, calculer l'amplitude et la phase de l'oscillation locale de période $T/2$. Les calculs seraient tout à fait analogues à ceux qui ont été développés dans ce texte. Leur inté-

(*) Par « exactement », il faut entendre, en réalité, au premier ordre d'approximation.

(**) Ce sont d'une part les termes du 2^e ordre associés à la houle et à l'oscillation locale (termes calculés par M. Miche) et d'autre part les « termes d'interaction », entre houle et oscillation locale (termes calculés par MM. Biesel et Daubert).

rêt pratique serait cependant limité, car, à une courte distance du générateur, il ne subsiste, au 2° ordre d'approximation, plus que trois termes, tous les autres se trouvant en fait amortis. Ces trois termes sont :

- La houle fondamentale (période T , amplitude du 1^{er} ordre, célérité de l'onde libre de période T);
- Le terme de 2° ordre qui l'accompagne (période $T/2$, amplitude du 2° ordre. Célérité de l'onde libre de période T);
- L'harmonique émis par le batteur (période $T/2$, amplitude du 2° ordre. Célérité de l'onde libre de période $T/2$).

Pour décrire le mouvement à quelque distance du batteur, il suffit donc de connaître l'amplitude et la phase de ces trois termes.

Les calculs numériques ont été exécutés par le service de calcul scientifique de la Société Grenobloise d'Etudes et d'Applications Hydrauliques (SOGREAH) à l'aide d'une calculatrice électronique IBM 650.

Les résultats sont rassemblés dans deux abaques donnant l'amplitude et la phase de l'harmonique émis par le batteur piston. Les abaques du batteur volet n'ont pas été calculés.

Le présent travail comprend, en outre, un chapitre consacré à l'examen de la validité des opérations formelles effectuées. La convergence des séries utilisées pour la représentation du mouvement du fluide et pour le calcul numérique des abaques, résulte du fait que les singularités des fonctions qui décrivent la solution sont relativement faibles. J'ai utilisé pour cette étude des méthodes déjà employées par M. Kravtchenko et M. Biesel pour la recherche des singularités au 1^{er} ordre.

Au terme de cette étude, il me reste à exprimer ma profonde gratitude envers M. le professeur Kravtchenko, pour l'aide affectueuse et dévouée qu'il m'a apportée, durant ces trois dernières années. Par ses cours de spécialités d'Hydrodynamique (3^e cycle), il m'a initié aux théories mathématiques de la houle, dont la connaissance m'était indispensable pour entreprendre ce travail. Ses suggestions, les très nombreux conseils qu'il m'a prodigués et son concours effectif en maintes circonstances, m'ont permis en outre de résoudre les difficultés rencontrées, et d'atteindre le but que je m'étais fixé.

Je remercie également M. le professeur Santon qui, par ses cours de spécialités, a complété mes connaissances sur la physique de la houle. Avec la collaboration de M. Marcou, chef des Travaux Pratiques au Laboratoire de Mécanique des Fluides, il m'a de plus initié aux techniques expérimentales du laboratoire à houle, techniques très délicates mais si précieuses pour le chercheur aussi bien que pour l'ingénieur.

Je tiens à souligner l'importance de la contribution apportée à cette thèse par M. Biesel, chargé de cours à la Faculté et directeur technique de la SOGREAH. Je lui dois la méthode que j'ai employée pour construire la solution. Le calcul des termes du 2° ordre constitue d'ailleurs une application de sa « théorie de la houle irrégulière », laquelle, rappelons-le, est une généralisation de la théorie de M. Miche (*).

J'exprime d'autre part ma reconnaissance envers la Direction de la SOGREAH qui m'a accordé les loisirs nécessaires à l'exécution de cette thèse et qui a assumé la charge financière du calcul numérique des abaques.

Je remercie aussi Mlle Clément, ingénieur à la SOGREAH, pour avoir amorcé les calculs qui, par leur volume, constituent une part importante de ce travail.

Je remercie enfin MM. Chabert d'Hyères, Daubert, Jolas, mes camarades de cours du 3^e cycle d'Hydrodynamique, le personnel du Laboratoire de Mécanique des Fluides, et le Service de Calcul Scientifique de la SOGREAH, pour les emprunts que j'ai effectués à leurs diverses recherches, et pour la collaboration amicale qu'ils m'ont apportée.

INTRODUCTION

La présente étude constituant une application de la méthode d'approximations successives de M. Miche, nous emploierons des variables de Lagrange, sous la forme utilisée par cet

(*) La théorie de la houle irrégulière a été reprise récemment par M. Daubert dans des conditions générales (houle rotationnelle au 1^{er} ordre) et poussée jusqu'au 3^e ordre d'approximation.

auteur. Ce sont donc les coordonnées de repos de la particule qui remplaceront dans nos équations les coordonnées usuelles de Lagrange (*).

La solution du problème au 1^{er} ordre d'approximation, qui servira de point de départ à notre étude, a été écrite par MM. Havelock et Biesel dans le système de variables d'Euler. On pourrait transcrire cette solution dans le système de variables que nous avons choisies, par simple substitution des variables x_0, y_0 aux variables x, y . En effet, les premières ne diffèrent des secondes que par des quantités du 1^{er} ordre. Par suite, la solution écrite en variables de Lagrange (ou en variables de Miche) ne diffère de la solution écrite en variables d'Euler que par des quantités du 2^e ordre au moins. Elle vérifie elle aussi les équations et conditions aux limites du problème au 1^{er} ordre d'approximation.

On trouverait d'autre part dans les diverses références citées dans la bibliographie, la démonstration de la validité de la solution formelle, démonstration que l'on pourrait appliquer sans difficulté à notre système de variables, moyennant quelques adaptations.

Cependant, pour donner plus d'unité à notre exposé, et pour permettre au lecteur de suivre plus facilement certains développements de notre théorie, nous suivrons une voie un peu différente. Après avoir posé les équations du problème, nous reprendrons avec les variables x_0, y_0 les grandes lignes de la théorie au 1^{er} ordre, laissant le soin au lecteur de se reporter aux mémoires originaux de MM. Havelock, Biesel et Kravtchenko pour plus de détails.

CHAPITRE I

MISE EN ÉQUATION DU PROBLÈME SOLUTION AU PREMIER ORDRE D'APPROXIMATION

Les équations du mouvement s'écrivent en coordonnées de Lagrange :

— *Equation de continuité* :

$$\frac{D(x, y)}{D(a, b)} = 1$$

— *Equation dynamique (**)* :

$$\frac{D[(\partial^2 x / \partial t^2), x]}{D(a, b)} + \frac{D[(\partial^2 y / \partial t^2), y]}{D(a, b)} = 0$$

On substitue aux variables de Lagrange a , et b , les variables de M. Miche. Cette transformation, que nous supposons possible, respecte les volumes et vérifie la relation :

$$\frac{D(x_0, y_0)}{D(a, b)} = 1$$

Elle laisse donc invariantes les équations du mouvement qui deviennent :

$$\frac{D(x, y)}{D(x_0, y_0)} = 1 \quad \frac{D[(\partial^2 x / \partial t^2), x]}{D(x_0, y_0)} + \frac{D[(\partial^2 y / \partial t^2), y]}{D(x_0, y_0)} = 0$$

(*) Les coordonnées de Lagrange (a, b) définissent un point particulier de la trajectoire d'une particule (position de la particule au temps $t = t_0$). Les coordonnées de repos x_0, y_0 telles que les a définies M. Miche représentent la position de la particule lorsque le fluide est au repos.

(**) On obtient cette équation en éliminant la pression p par dérivations croisées entre les deux équations classiques :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial a} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial a} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + g \right) \frac{\partial y}{\partial a} &= 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial b} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial b} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + g \right) \frac{\partial y}{\partial b} &= 0 \end{aligned}$$

FIG. 1

On utilise un système d'axes rectangulaires défini comme suit :

- L'axe Ox ou Ox_0 est horizontal et confondu avec le fond du canal;
- L'axe Oy ou Oy_0 est vertical ascendant et confondu avec la position de repos du batteur.

On se limite à l'étude des mouvements cylindriques, de sorte que la 3^e coordonnée ne figure pas dans nos équations.

Dans le système des variables de repos, les conditions aux limites s'expriment simplement (*) :

Ce sont :

1. La condition au fond du canal, exprimant que le déplacement est horizontal :

$$y = 0 \text{ pour } y_0 = 0 \quad x_0 \geq 0$$

2. La condition à la surface libre, exprimant que la pression y est constante :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_0} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial x_0} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + g \right) \frac{\partial y}{\partial x_0} = 0$$

pour $y_0 = h \quad x_0 \geq 0$

3. La condition au batteur, exprimant que le mouvement du fluide épouse le mouvement du batteur. On suppose que ce dernier est défini par l'équation :

$$x = e f(y) \sin kt$$

(e représente l'infiniment petit principal).

4. Pour clore le domaine, il faut ajouter une condition à l'infini. On supposera que la solution est bornée pour $x_0 = +\infty$ et qu'elle représente une ou plusieurs houles se propageant dans la direction des x positifs.

L'équation dynamique peut s'écrire sous une forme un peu différente :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{D[(\partial x / \partial t), x]}{D(x_0, y_0)} + \frac{D[(\partial y / \partial t), y]}{D(x_0, y_0)} \right] = 0$$

l'expression figurant dans le crochet étant égale au double du rotationnel. L'équation dynamique exprime ainsi la propriété classique énoncée par le théorème de Lagrange : le rotationnel attaché à l'élément de volume qui entoure une molécule déterminée (caractérisée par sa position de repos x_0, y_0) ne dépend pas du temps. Il se conserve donc au cours du mouvement. On remarque d'autre part que le rotationnel est une fonction arbitraire introduite par l'intégration de l'équation dynamique. En le désignant par $\zeta(x_0, y_0)$, on a finalement :

$$\frac{D(x, y)}{D(x_0, y_0)} = 1 \text{ et } \frac{D[(\partial x / \partial t), x]}{D(x_0, y_0)} + \frac{D[(\partial y / \partial t), y]}{D(x_0, y_0)} = 2 \zeta(x_0, y_0)$$

Pour résoudre ces équations, on appliquera la méthode des petits paramètres de Poincaré et l'on supposera que $x(x_0, y_0, t)$ et $y(x_0, y_0, t)$, $\zeta(x_0, y_0)$ sont des fonctions analytiques de la

(*) L'intérêt principal de la transformation de M. Miche est, en effet, de substituer au domaine occupé par le fluide en mouvement, un domaine dont toutes les limites, y compris la surface libre, sont connues *a priori*.

variable e , régulières dans le voisinage de $e = 0$. Lorsque e tend vers zéro, on admettra que l'agitation du fluide devient nulle. Les fonctions x , y , et ζ se réduisent alors aux valeurs « de repos » :

$$x_0, y_0, \zeta_0 = 0$$

On peut ainsi effectuer les développements en série :

$$\begin{aligned} x &= x_0 + eX_1(x_0, y_0, t) + e^2X_2(x_0, y_0, t) + \dots \\ y &= y_0 + eY_1(x_0, y_0, t) + e^2Y_2(x_0, y_0, t) + \dots \\ \zeta &= e\zeta_1(x_0, y_0) + e^2\zeta_2(x_0, y_0) + \dots \end{aligned} \quad (\text{I})$$

A notre connaissance, la démonstration de la convergence de ce développement n'a jamais été faite. Nous admettrons simplement qu'elle a lieu pour des valeurs de e suffisamment petites. Nous reviendrons plus loin sur ce point.

Dans l'approximation du 1^{er} ordre, on admettra de plus qu'il est légitime de limiter les développements à la première puissance de e . En substituant dans les équations du mouvement, en écrivant qu'elles sont vérifiées pour toutes valeurs de e et en négligeant les termes du 2^e ordre, on obtient :

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_0} + \frac{\partial Y_1}{\partial y_0} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial Y_1}{\partial x_0} - \frac{\partial X_1}{\partial y_0} \right) = 2 \zeta_1(x_0, y_0) \quad (\text{II})$$

De même, les conditions aux limites s'écrivent :

- 1) $Y_1 = 0$ pour $y_0 = 0$ $x_0 \geq 0$
- 2) $\frac{\partial^2 X_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial Y_1}{\partial x_0} = 0$ pour $y_0 = h$ $x_0 \geq 0$
- 3) $X_1 = f(y_0) \sin kt$ pour $x_0 = 0$ $0 \leq y_0 \leq h$

On a supposé $f(y)$ analytique et régulière pour les valeurs $0 \leq y_0 \leq h$ sauf peut-être pour un nombre fini de valeurs de y_0 . Nous reviendrons sur ce point.

- 4) X_1, Y_1 bornés pour $x_0 = +\infty$. Pas d'onde venant de l'infini.

Le système définissant le vecteur déplacement de coordonnées X_1, Y_1 s'obtient par une nouvelle intégration de l'équation dynamique

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial x_0} + \frac{\partial Y_1}{\partial y_0} &= \text{div.}(X_1, Y_1) = 0 \\ \frac{\partial Y_1}{\partial x_0} - \frac{\partial X_1}{\partial y_0} &= \text{rot.}(X_1, Y_1) = 2 \zeta_1(x_0, y_0) \times t + C_1(x_0, y_0) \end{aligned}$$

où $C_1(x_0, y_0)$ représente une fonction arbitraire ne dépendant pas du temps.

La solution générale de ce système est la somme d'une solution particulière de l'équation complète et de la solution générale de l'équation sans second membre (gradient d'une fonction harmonique). On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{\partial \psi_1}{\partial y_0}(x_0, y_0) \times t - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0}(x_0, y_0) + \frac{\partial G_1}{\partial x_0}(x_0, y_0, t) \\ Y_1 &= \frac{\partial \psi_1}{\partial x_0}(x_0, y_0) \times t + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0}(x_0, y_0) + \frac{\partial G_1}{\partial y_0}(x_0, y_0, t) \end{aligned}$$

Les fonctions ψ_1, φ_1, G_1 satisfaisant elles-mêmes aux équations :

$$\Delta G_1 = 0 \quad \Delta \psi_1 = + 2 \zeta_1(x_0, y_0) \quad \Delta \varphi_1 = + C_1(x_0, y_0)$$

et vérifiant les conditions limites.

Le premier terme peut représenter soit un terme séculaire, soit le premier terme du développement en série d'une fonction périodique, comme l'a fait remarquer M. Kravtchenko en s'inspirant des résultats classiques de Poincaré et des travaux de M. Daubert.

Nous écarterons de notre étude le deuxième cas dont la discussion paraît difficile, quitte à réduire la généralité de la solution trouvée.

Dans ces conditions, si nous admettons que, dans le canal à houle, le niveau moyen ne peut s'élever ou s'abaisser indéfiniment, Y_1 ne peut contenir de termes séculaires, d'où :

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x_0} = 0 (*)$$

Dans l'expression de X_1 , le terme $(d\psi_1/dy_0) \times t$ représente un courant de masse parallèle au fond, dépendant de y_0 seul.

FIG. 2

Le courant qui traverse un élément de surface de hauteur dy_0 doit donc être débité à travers le batteur.

Si nous supposons celui-ci étanche, nous devons avoir :

$$\frac{d\psi_1}{dy_0} = 0, \text{ ce qui entraîne } \psi_1 = C^{\text{te}}$$

$$\text{et } 2\zeta_1 = \Delta\psi_1 = 0$$

En vertu de la première hypothèse faite sur le courant de masse, le rotationnel était indépendant de x_0 . En vertu de la deuxième hypothèse (étanchéité du batteur), le rotationnel doit être au moins du second ordre.

Les conditions de surface et de fond s'écrivent maintenant :

$$x_0 \geq 0 \quad y_0 = 0 \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} + \frac{\partial G_1}{\partial y_0} = 0$$

$$x_0 \geq 0 \quad y_0 = h \quad \frac{\partial^2 G_1}{\partial x_0^2} + g \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_0^2} + g \frac{\partial^2 G_1}{\partial x_0 \partial y_0} = 0$$

ou :

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} + g \frac{\partial G_1}{\partial y_0} = C^{\text{te}}$$

On peut égaler la constante à zéro, ce qui revient à changer l'origine de l'échelle des pressions.

Dans ces expressions, seul le terme $\partial \varphi_1 / \partial x_0$ ne dépend pas du temps.

On doit donc avoir séparément :

$$x_0 \geq 0 \quad y_0 = 0 \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} = 0 \quad \frac{\partial G_1}{\partial y_0} = 0$$

$$x_0 \geq 0 \quad y_0 = h \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} = 0 \quad \frac{\partial^2 G_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial G_1}{\partial y_0} = 0$$

(*) Ceci correspond à l'exploitation d'un canal à houle avec un volume d'eau constant.

De même, sur le batteur, on doit avoir :

$$x_0 = 0 \quad 0 \leq y_0 \leq h \quad - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} + \frac{\partial G_1}{\partial x_0} = f(y_0) \sin kt$$

d'où :

$$- \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} = 0 \quad \frac{\partial G_1}{\partial x_0} = f(y_0) \sin kt$$

Ainsi, le changement de variables $x_1 = x_0 - e (\partial \varphi_1 / \partial y_0)$, $y_1 = y_0 + e (\partial \varphi_1 / \partial x_0)$ représente un déplacement du 1^{er} ordre qui conserve les volumes puisqu'il satisfait, au 2^e ordre près, à l'équation :

$$\frac{D(x_1, y_1)}{D(x_0, y_0)} = 1$$

Il remplit également les conditions imposées aux limites du canal lorsque le fluide est au repos.

Il fait partie d'un groupe de transformations étudié par M. Chabert d'Hières. Ce groupe transforme le domaine étudié en lui-même et correspond donc à un simple changement des coordonnées de repos.

En effectuant ce changement de variables, les expressions :

$$x = x_0 - e \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} + e \frac{\partial G_1}{\partial x_0}$$

$$y = y_0 + e \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} + e \frac{\partial G_1}{\partial y_0}$$

prennent la forme plus simple :

$$x = x_1 + e \frac{\partial G_1}{\partial x_1}$$

$$y = y_1 + e \frac{\partial G_1}{\partial y_1}$$

G_1 étant une fonction harmonique de x_1 et y_1 au 2^e ordre près. D'autre part, comme on le reconnaît aisément, les conditions limites conservent la même forme au 2^e ordre près.

En résumé, pour résoudre au 1^{er} ordre d'approximation le mouvement du batteur, compte tenu des hypothèses faites ci-dessus, on doit chercher une fonction harmonique G_1 satisfaisant aux conditions limites (*) :

$$1^\circ \quad x_0 \geq 0 \quad y_0 = 0 \quad \frac{\partial G_1}{\partial y_0} = 0$$

$$2^\circ \quad x_0 \geq 0 \quad y_0 = h \quad \frac{\partial^2 G_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial G_1}{\partial y_0} = 0$$

$$3^\circ \quad x_0 = 0 \quad 0 \leq y_0 \leq h \quad \frac{\partial G_1}{\partial x_0} = f(y_0) \sin kt$$

$$4^\circ \quad x_0 = +\infty \quad G_1 \text{ borné, pas d'onde venant de l'infini.}$$

La formulation du problème à l'aide de la fonction résolvante G_1 (**) est donc tout à fait identique à celle qui a été faite par M. Biesel à l'aide du potentiel des vitesses.

(*) On remplace les indices 1 par les indices 0, ce qui est possible, puisque sur le fond et sur la surface libre $y_1 = y_0 = 0$ ou h , alors que sur le batteur $x_1 = x_0 = 0$.

(**) ou potentiel des déplacements G_1 .

On connaît des solutions élémentaires à variables séparées qui vérifient les conditions 1, 2 et 4. Elles sont obtenues en posant :

$$G(x_0, y_0, t) = g_1(x_0) g_2(y_0) \sin kt$$

ΔG devient :

$$\frac{g''_1(x_0)}{g_1(x_0)} = -\frac{g''_2(y_0)}{g_2(y_0)} = -m^2$$

d'où les solutions de la forme :

$$G = (C_1 e^{imx_0} + C_2 e^{-imx_0}) \cdot (D_1 e^{my_0} + D_2 e^{-my_0}) \sin kt$$

On détermine les constantes C_1 , C_2 , D_1 , D_2 pour satisfaire aux conditions limites 1, 2 et 4 et l'on obtient deux types de solutions :

1° m RÉEL :

$$G = \frac{a_0}{m_0 e} \frac{\operatorname{ch} m_0 y_0}{\operatorname{sh} m_0 h} \cos(kt - m_0 x_0)$$

m_0 est l'unique racine réelle et positive de $k^2 = mg \operatorname{th} mh$ (condition de surface).

$$X_1 = \frac{\partial G_1}{\partial x_0} = + \frac{a_0}{e} \frac{\operatorname{ch} m_0 y_0}{\operatorname{sh} m_0 h} \sin(kt - m_0 x_0)$$

$$Y_1 = \frac{\partial G_1}{\partial y_0} = + \frac{a_0}{e} \frac{\operatorname{ch} m_0 y_0}{\operatorname{sh} m_0 h} \cos(kt - m_0 x_0)$$

Cette solution représente une houle progressive de demi-amplitude a_0 , se propageant vers les x_0 positifs.

2° m IMAGINAIRE PUR ($m = -i\lambda$) :

$$G = - \frac{2 a_p e^{-\lambda_p x_0}}{\lambda_p e} \frac{\cos \lambda_p y_0}{\sin \lambda_p h} \sin kt$$

λ_p est l'une des racines réelles de l'équation $k^2 = -\lambda g \operatorname{tg} \lambda h$:

$$X_1 = \frac{\partial G}{\partial x_0} = \frac{2 a_p e^{-\lambda_p x_0}}{e} \frac{\cos \lambda_p y_0}{\sin \lambda_p h} \sin kt$$

$$Y_1 = \frac{\partial G}{\partial y_0} = \frac{2 a_p e^{-\lambda_p x_0}}{e} \frac{\sin \lambda_p y_0}{\sin \lambda_p h} \sin kt$$

Ces solutions représentent des oscillations sinusoïdales qui s'amortissent à courte distance du batteur. Elles forment une suite infinie comme les racines λ_p elles-mêmes.

Les équations et conditions aux limites étant linéaires et homogènes, une combinaison linéaire de ces solutions élémentaires vérifie également les équations et les conditions 1, 2 et 4.

On choisira donc les coefficients a_0 , a_p de manière à satisfaire à la condition au batteur. Celle-ci s'écrit :

$$x_0 = 0$$

$$0 \leq y_0 \leq h$$

$$X_1(0, y_0) = \frac{a_0}{e} \frac{\operatorname{ch} m_0 y_0}{\operatorname{sh} m_0 h} + \sum_1^{\infty} \frac{2 a_p}{e} \frac{\cos \lambda_p y_0}{\sin \lambda_p h} = f(y_0)$$

Comme l'ont indiqué MM. Biesel et Kravtchenko, la possibilité de ce choix résulte du fait

que la suite formée par les fonctions $\text{ch } m_0 y_0$ et $\cos \lambda_p y_0$ est à la fois complète et orthogonale (*).

Dans ces conditions, la fonction arbitraire $f(y_0)$ peut être développée en série de fonctions orthogonales sous réserve que $f(y_0)$ vérifie certaines conditions de régularité et certaines conditions limites. Nous reviendrons plus loin sur ce point.

Les « coefficients de Fourier » a_0 et a_p se calculent par les formules classiques :

$$\frac{a_0}{e \text{ sh } m_0 h} = \frac{\int_0^h f(y_0) \text{ch } m_0 y_0 dy_0}{\int_0^h \text{ch}^2 m_0 y_0 dy_0}$$

$$\frac{2 a_p}{e \sin \lambda_p h} = \frac{\int_0^h f(y_0) \cos \lambda_p y_0 dy_0}{\int_0^h \cos^2 \lambda_p y_0 dy_0}$$

En particulier, pour le batteur piston... $f(y) = 1$;

pour le volet simple... $f(y) = y/h$;

pour le volet balançoire $f(y) = 1 + (\Delta e/he) y$.

FIG. 3

On a donc pour ces trois types de batteur plan les formules générales :

$$a_0 = \frac{2 e \text{ sh}^2 m_0 h}{m_0 h + \text{sh } m_0 h \text{ ch } m_0 h} + \frac{2 \Delta e \text{ sh } m_0 h (m_0 h \text{ sh } m_0 h - \text{ch } m_0 h + 1)}{m_0 h (m_0 h + \text{sh } m_0 h \text{ ch } m_0 h)}$$

$$2 a_p = \frac{2 e \sin^2 \lambda_p h}{\lambda_p h + \sin \lambda_p h \cos \lambda_p h} + \frac{2 \Delta e \sin \lambda_p h (\lambda_p h \sin \lambda_p h + \cos \lambda_p h - 1)}{\lambda_p h (\lambda_p h + \sin \lambda_p h \cos \lambda_p h)}$$

Pour le batteur piston, on fera $\Delta e = 0$;

Pour le volet simple, on fera $e = 0$.

FIG. 4

(*) Ce sont les fonctions propres de l'équation différentielle $U'' + \mu U = 0$, U étant une fonction définie dans l'intervalle $(0, h)$ et satisfaisant aux conditions limites :

$$U'(0) = 0 \quad gU'(h) - k^2 U(h) = 0$$

Le mouvement du fluide est représenté par les expressions :

$$x = x_0 + a_0 \frac{\operatorname{ch} m_0 y_0}{\operatorname{sh} m_0 h} \sin(kt - m_0 x_0) + \sum_1^{\infty} 2 a_p e^{-\lambda_p x_0} \frac{\cos \lambda_p y_0}{\sin \lambda_p h} \sin kt$$

$$y = y_0 + a_0 \frac{\operatorname{sh} m_0 y_0}{\operatorname{sh} m_0 h} \cos(kt - m_0 x_0) + \sum_1^{\infty} 2 a_p e^{-\lambda_p x_0} \frac{\sin \lambda_p y_0}{\sin \lambda_p h} \sin kt$$

où le deuxième terme représente la houle émise par le batteur et le troisième, l'oscillation locale.

On a figuré ci-contre les déplacements correspondant à la houle et aux premières composantes de l'oscillation locale pour les molécules qui restent en contact avec le batteur ($x_0=0$).

En additionnant tous ces déplacements on obtient le mouvement résultant qui est déjà assez voisin du mouvement du batteur.

On conçoit qu'en augmentant le nombre de termes des séries représentant l'oscillation locale, on puisse amener le fluide à épouser exactement le mouvement du volet (au premier ordre d'approximation). Cette remarque nous conduit à examiner de plus près la convergence de ces séries.

Convergence des séries dans la masse du fluide.

La solution formelle obtenue ci-dessus étant écrite sous la forme de séries infinies, il importe de montrer que celles-ci représentent bien des fonctions définies et continues vérifiant les équations dans toute la masse du fluide et satisfaisant aux conditions limites sur les bords du domaine. Or, les termes des séries contenant les facteurs exponentiels $e^{-\lambda_p x_0}$ (*) (on reconnaît qu'elles sont absolument convergentes ainsi que leurs dérivées d'ordre quelconque), quels que soient x_0 et y_0 ($x_0 \neq 0$). Elles sont donc uniformément convergentes dans tout le domaine intérieur, et représentent bien des fonctions continues et dérivables satisfaisant aux équations du mouvement. Il en sera de même sur les limites du domaine sauf au droit du batteur où l'on a $x_0 = 0$. Les exponentielles se réduisent alors à l'unité et la convergence doit être étudiée soigneusement.

Convergence des séries sur le batteur.

On doit vérifier que pour $x_0 = 0$, la série donnant le déplacement horizontal converge uniformément vers la fonction $f(y_0)$ (condition limite au batteur).

Dans ce but, M. Biesel a fait l'étude de la valeur principale des coefficients a_0 et a_p .

En remplaçant dans leurs expressions les quantités $\lambda_p h$, $\sin \lambda_p h$ et $\cos \lambda_p h$ par les développements limités :

$$\lambda_p h = p\pi - O\left(\frac{1}{p}\right) \quad \cos \lambda_p h = (-1)^p + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \quad \sin \lambda_p h = (-1)^{p+1} \frac{k^2 h}{g\pi} \frac{1}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

on obtient :

$$\frac{2 a_p}{e \sin \lambda_p h} = \frac{2}{h} \left[1 + \frac{k^2 h}{g\pi^2} \times \frac{1}{p^2} + O\left(\frac{1}{p^3}\right) \right] \int_0^h f(y_0) \cos \lambda_p y_0 dy_0$$

On admet que $f(y_0)$ est continue pour $(0 \leq y_0 \leq h)$ ainsi que ses dérivées premières et secondes.

On suppose que $\int_0^h f'''(y_0) \sin \lambda_p y_0 dy_0$ est borné. On obtient alors, au moyen de trois intégrations par parties successives :

$$\int_0^h f(y_0) \cos \lambda_p y_0 dy_0 = -\frac{1}{\lambda_p^2} \{ \cos \lambda_p h [(k^2/g) f(h) - f'(h)] + f'(0) \} - \frac{f''(h)}{\lambda_p^3} \sin \lambda_p h$$

$$+ \frac{1}{\lambda_p^3} \int_0^h f'''(y_0) \sin \lambda_p y_0 dy_0$$

(*) Pour p assez grand, $\lambda_p \sim (p\pi/h)$. En effet, $\lambda_p h$ est obtenu en coupant la tangentoïde $-\cotg \lambda h$ par la droite $\lambda h (g/k^2 h)$. On reconnaît que $\lambda_p h$ est ainsi voisin de $p\pi$, d'où $\lambda_p h = p\pi - \varepsilon_p$. On a d'ailleurs $k^2 h/g = \lambda h \operatorname{tg} \lambda h$ ($k^2 h/g = (p\pi - \varepsilon_p) \operatorname{tg} \varepsilon_p$, d'où $\varepsilon_p = (k^2 h/g\pi) \times (1/p) + O(1/p^2)$).

d'où :

$$\frac{2 a_p}{\sin \lambda_p h} = - \frac{2}{\pi^2 h} \left\{ (-1)^p \left[\frac{k^2}{g} f(h) - f'(h) \right] + f'(0) \right\} \frac{1}{p^2} + O\left(\frac{1}{p^3}\right)$$

Si $f(y_0)$ satisfait aux mêmes conditions aux limites que les fonctions propres qui servent à la représenter sur l'intervalle $(0, h)$, $(k^2/g) f(h) = f'(h)$ et $f'(0) = 0$ et si la fonction $f(y)$ est continue ainsi que ses deux premières dérivées, on voit que les séries donnant les déplacements $x(0, y_0)$ et $y(0, y_0)$ ainsi que les séries dérivées sont absolument convergentes. La convergence ne dépendant pas de la valeur de y_0 est d'ailleurs uniforme.

Si $f(y_0)$ ne satisfait pas aux mêmes conditions limites que les fonctions propres, la série représentant $f(y_0)$ est encore absolument et uniformément convergente. Par contre, le terme général de la série dérivée est :

$$u_p = - \frac{2}{\pi h^2} \left[\frac{k^2}{g} f(h) - f'(h) \right] \frac{\sin p [\pi - (\pi y_0/h)]}{p} + \frac{2}{\pi h^2} f'(0) \frac{\sin p (\pi y_0/h)}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

La convergence de la série u_p est de même nature que la convergence des deux premières séries, puisque le reste $O(1/p^2)$ est le terme général d'une série absolument convergente (*).

Or, en vertu du théorème d'Abel, les séries de la forme $(C/p) \sin p\beta$ sont uniformément convergentes dans l'intervalle ouvert :

$$0 < \beta < 2\pi (**)$$

soit pour la première série :

$$0 < \pi(1 - y_0/h) < 2\pi \quad \text{ou} \quad -h < y_0 < h$$

et pour la deuxième série :

$$0 < \pi y_0/h < 2\pi \quad \text{ou} \quad 0 < y_0 < 2h$$

On peut donc conclure : la série dérivée sera uniformément convergente sur tout l'intervalle $(0, h)$ sauf à celle des extrémités où la fonction $f(y)$ ne vérifie pas la condition limite (c'est-à-dire aux extrémités où il y a des discontinuités. Nous reviendrons plus loin sur ce point).

On aboutirait à des conclusions analogues si $f(y_0)$ ou ses deux premières dérivées n'étaient pas continues sur l'intervalle $(0, h)$. Les séries où leurs dérivées seraient uniformément convergentes dans tout intervalle où $f(y)$ (ou sa dérivée) sont continues, mais elle présenterait le phénomène de Gibbs aux points de discontinuité (**). Ces résultats sont classiques et nous n'insisterons pas.

Nous remarquerons simplement, en nous reportant à la figure 4, que toutes les fonctions propres ont une tangente verticale au fond du canal. Leur somme aura donc elle aussi une tangente verticale en ce point alors que la pente du volet y est inclinée. Cette

(*) En effet, $O(1/p^2)$ peut être majoré par M/p^2 , M étant une quantité finie (sinon le terme ne serait pas de l'ordre de $1/p^2$).

(**) On sait d'ailleurs que $\sum_1^\infty \frac{\sin p\beta}{p} = \frac{\pi - \beta}{2}$ pour $0 < \beta < 2\pi$.

Pour $\beta = 2k\pi$, la fonction représentée par la série trigonométrique est discontinue et la convergence ne peut être uniforme dans le voisinage (phénomène de Gibbs). On a de plus :

$$\sum_1^\infty \frac{\sin p\beta}{p} = \frac{f(2k\pi - 0) + f(2k\pi + 0)}{2} = 0 \quad \text{pour } \beta = 2k\pi$$

FIG. 5

(***) Dans le calcul des coefficients, l'intégration par parties donnerait en effet des termes de la forme :

$$\frac{2}{\pi h} \frac{[f(\eta + 0) - f(\eta - 0)]}{p} \sin p \frac{\pi y_0}{h}$$

si $f(y_0)$ avait au point $y_0 = \eta$ une discontinuité de première espèce.

dernière passe ainsi brusquement de la valeur 0 à la valeur $\Delta e/h_e$ et les dérivées du déplacement subissent en ce point une discontinuité de première espèce. Par suite, les séries qui les représentent ne peuvent être uniformément convergentes au pied du volet.

Les conclusions seraient contraires pour le batteur piston, puisque sa trace est elle-même verticale.

Au sommet du batteur, la pente des fonctions propres est liée à leur valeur $U(h)$, par l'équation $U'(h) = (k^2/g) U(h)$. La pente de $f(y_0)$ ayant en général une valeur différente en ce point $f'(h) \neq (k^2/g) f(h)$ les dérivées du déplacement y subissent une discontinuité, et les séries dérivées ne peuvent converger uniformément en ce point.

Les difficultés de convergence sont dues au fait que les fonctions propres sont mal adaptées à la représentation de la fonction $X_1(0, y_0) = f(y_0)$ vers les extrémités du batteur lorsque $f(y_0)$ ne vérifie pas les mêmes conditions limites.

Etude *a priori* des singularités.

En rappelant ci-dessus les grandes lignes de l'étude faite par M. Biesel, nous avons remarqué que la convergence des séries sur le volet est essentiellement liée à l'existence des singularités de la fonction que l'on cherche à représenter par une série.

M. Kravtchenko a fait une étude des singularités de $X_1(x_0, y_0)$ et $Y_1(x_0, y_0)$. Cette étude permet de connaître le comportement des fonctions au voisinage du pied et du sommet du batteur. Elle permet également de déterminer les singularités de $X_1(0, y_0)$ et de prévoir la nature de la convergence des séries sur le batteur. Nous allons maintenant en rappeler les résultats en l'adaptant à notre système de variables.

Les coordonnées du vecteur déplacement X_1, Y_1 sont solutions du système :

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_0} = \frac{\partial (-Y_1)}{\partial y_0} \quad \frac{\partial X_1}{\partial y_0} = -\frac{\partial (-Y_1)}{\partial x_0} (*)$$

Les fonctions X_1 et $-Y_1$ sont donc harmoniques conjuguées. Par suite, $F(z_0) = X_1 - iY_1$ est analytique dans le domaine étudié. Elle est d'ailleurs régulière en tout point intérieur, puisque X_1 et Y_1 sont solutions d'équations à coefficients réguliers.

Les fonctions X_1 et Y_1 vérifient de plus les conditions de fond et de surface et la condition à l'infini qui s'expriment par des équations à coefficients réguliers. La condition limite sur le batteur est également régulière si $f(y_0)$ et ses dérivées ne possèdent pas de discontinuités sur l'intervalle $0, h$ (**).

La fonction $F(z)$ ne peut donc posséder de singularités à l'intérieur ou sur les limites du domaine sauf peut-être aux points d'angles (extrémités du batteur). En effet, en ces points, X_1 et Y_1 doivent vérifier simultanément deux conditions limites qui sont en général différentes. Par exemple, si l'on approche du sommet du batteur en suivant la surface libre, la fonction $U(x_0, y_0) = k^2 X_1 - g(\partial Y_1 / \partial x_0) = k^2 X_1 - g(\partial X_1 / \partial y_0)$ reste constamment nulle et l'on a :

$$U(0, h) = 0.$$

Mais si l'on approche du sommet du batteur en suivant l'axe oy_0 ,

$$U(0, y_0) = k^2 f(y_0) - g[df(y_0)/dy_0],$$

et l'on a : $U(0, h) = k^2 f(h) - g f'(h)$,

(*) En effet, on a montré que le rotationnel $\zeta(x_0, y_0)$ était nul. D'autre part, on peut prendre $C_1(x_0, y_0) = 0$, ce qui revient à effectuer la transformation du groupe Chabert d'Hières. Le second membre de l'équation dynamique (voir système d'équations II) est donc nul.

(**) Dans le cas contraire, les fonctions X_1 et Y_1 présenteraient une singularité en tout point de l'intervalle $x_0 = 0 \quad 0 \leq y_0 \leq h$ où $f(y_0)$ ne serait pas régulière. Nous reviendrons sur ce point.

qui n'est pas nul en général. Ainsi, la fonction U prend deux valeurs différentes au point (o, h) . Il en est de même pour $F(z_0)$ et l'on peut conclure en disant que le sommet du batteur est un point critique (à moins que $f(y_0)$ ne satisfasse à la condition limite en surface $k^2 f(h) - g f'(h) = 0$).

On aboutirait à des conclusions analogues pour le pied du batteur. On va maintenant chercher à préciser la nature de ces singularités.

A) Etude du point situé au pied du batteur.

FIG. 6

La fonction $F(z_0)$ est définie dans le voisinage de ce point par une condition mixte (valeur de la partie réelle sur Oy_0 , valeur de la partie imaginaire sur Ox_0). Il est commode de se ramener à des conditions limites plus simples fixant les valeurs de la partie réelle sur tout le contour. On considère dans ce but le mouvement image du mouvement réel, le miroir étant constitué par le fond du canal.

En deux points symétriques M et M' on a :

$$X_1(x_0 - y_0, t) = X_1(x_0, y_0, t) \quad Y_1(x_0, y_0, t) = -Y_1(x_0, y_0, t)$$

Sur le fond du canal, on a de plus $Y_1(x_0, 0, t) = 0$.

On peut donc enlever la paroi constituant le fond du canal sans perturber le mouvement. Celui-ci se trouve maintenant défini dans la bande :

$$x_0 \geq 0 \quad -h \leq y_0 \leq +h$$

Dans le nouveau domaine, la fonction $F(z_0) = X_1 - iY_1$ est déterminée par les conditions limites ($y_0 = \pm h$ $k^2 X_1 - g(\partial X_1 / \partial x_0) = 0$ et $x_0 = 0$ $X_1 = f(y_0) \sin kt$).

On peut séparer le facteur temps en ajoutant une houle venant de l'infini (ce qui revient à modifier la condition à l'infini et ne change pas la nature de la singularité à l'origine).

On a alors :

$$X_1(x_0, y_0, t) = X_1(x_0, y_0) \sin kt \quad Y_1(x_0, y_0, t) = Y_1(x_0, y_0) \sin kt$$

Lorsqu'on parcourt l'axe Oy_0 en traversant l'origine, $X_1(0, y_0) = f(y_0)$ est continu, mais il est clair que $\partial X_1 / \partial y_0 = f'(y_0)$ subit une discontinuité égale à :

$$\left(\frac{\partial X_1}{\partial y_0} \right)_{+0} - \left(\frac{\partial X_1}{\partial y_0} \right)_{-0} = 2f'_0 \text{ avec } f'_0 = f'(0).$$

Or, $\partial X_1 / \partial y_0$ est la partie réelle de la fonction $i[dF(z_0)/dz_0]$ qui est également analytique dans le domaine étudié.

En posant :

$$i \frac{dF(z_0)}{dz_0} = \varphi(x_0, y_0) + i\psi(x_0, y_0)$$

on reconnaît que dans le voisinage de l'origine, l'écoulement représenté par le potentiel complexe $\varphi + i\psi$ est du type tourbillon :

$$(\varphi + i\psi) = -\frac{2if'_0}{\pi} \log z_0 \quad (*)$$

En retranchant la singularité, on obtient une nouvelle fonction analytique :

$$\frac{i dF(z_0)}{dz_0} + \frac{2if'_0}{\pi} \log z_0$$

dont la partie réelle est nulle et continue à l'origine.

FIG. 7

Sa dérivée est encore une fonction analytique puisque dans le domaine intérieur $F(z_0)$ et $\log z_0$ sont régulières. On a d'ailleurs :

$$\Re \left[i \frac{d}{dz_0} \left(i \frac{dF(z_0)}{dz_0} + \frac{2if'_0}{\pi} \log z_0 \right) \right] = \frac{\partial^2 X_1}{\partial y_0^2} - \frac{2f'_0 \cos \theta}{\pi \rho}$$

Sur l'axe Oy_0 ($\theta = \pi/2$), cette expression se réduit à $f''(y_0)$ qui est continue à l'origine (**).

On a encore :

$$\Re \left[-\frac{d^2}{dz_0^2} \left(i \frac{dF(z_0)}{dz_0} + \frac{2if'_0}{\pi} \log z_0 \right) \right] = \frac{\partial^3 X_1}{\partial y_0^3} + \frac{2f'_0 \sin 2\theta}{\pi \rho^2}$$

qui se réduit à $f'''(y_0)$ sur l'axe Oy_0 .

La partie réelle de cette fonction subit la discontinuité $2f'''_0$.

Elle se comporte donc comme la partie réelle de :

$$\frac{2if'''_0}{\pi} \log z_0$$

On peut écrire ainsi en développant $f'''(y_0)$ autour de l'origine (***) :

$$\Re \left[-\frac{d^2}{dz_0^2} \left(i \frac{dF(z_0)}{dz_0} + \frac{2if'_0}{\pi} \log z_0 \right) + \frac{2if'''_0}{\pi} \log z_0 \right] = y_0 f^{IV}(\alpha y_0) \quad 0 < \alpha < 1$$

(*) En effet, dans ce type d'écoulement, le potentiel subit une discontinuité quand on traverse l'origine : $\varphi = (2f'_0/\pi)$ ($\varphi_{+0} - \varphi_{-0}$) = $2f'_0/\pi$ [$(\pi/2) - (-\pi/2)$] = $2f'_0$. Les lignes de courant sont des cercles centrés sur l'origine allant du potentiel $+f'_0$ au potentiel $-f'_0$.

(**) En effet, la courbure du batteur image est égale à la courbure du batteur réel. D'ailleurs, la fonction $f(y_0)$ est paire dans l'intervalle $-h \leq y_0 \leq h$. Ses dérivées d'ordre pair sont donc égales de part et d'autre de l'origine, mais ses dérivées d'ordre impair y sont opposées.

(***) On suppose que $f'''(y_0)$ et $f^{IV}(y_0)$ existent dans l'intervalle $0, h$, d'où :

$$\frac{\partial^3 X_1}{\partial y_0^3} = f'''(y_0) = f'''_0 + y_0 f^{IV}(\alpha y_0) \quad 0 < \alpha < 1$$

Cette égalité montre que la partie réelle de la fonction écrite ci-dessus est nulle et continue au sens de Lipschitz pour $y_0 = 0$.

D'après le théorème de Fatou, la partie imaginaire (définie à une constante additive près) sera au moins de l'ordre de $y_0 \log |y_0|$ et la fonction, elle-même, de l'ordre de $z_0 \log z_0$.

On peut donc écrire le développement limité :

$$-\frac{d^2}{dz_0^2} \left(i \frac{dF(z_0)}{dz_0} + \frac{2if'_0}{\pi} \log z_0 \right) = -\frac{2if'''_0}{\pi} \log z_0 + O(z_0 \log z_0) + iC_0$$

En intégrant, il vient successivement :

$$-\frac{d}{dz_0} \left(i \frac{dF(z_0)}{dz_0} + \frac{2if'_0}{\pi} \log z_0 \right) = -\frac{2if'''_0}{\pi} (z_0 \log z_0 - z_0) + O(z_0^2 \log z_0) + iA z_0 + B$$

$$-i \frac{dF(z_0)}{dz_0} = \frac{2if'_0}{\pi} \log z_0 - \frac{2if'''_0}{\pi} \left(\frac{z_0^2 \log z_0}{2} - \frac{z_0^2}{4} \right) + \frac{iA z_0^2}{2} + B z_0 + C + O(z_0^3 \log z_0)$$

$$F(z_0) = iD - \frac{2f'_0}{\pi} z_0 \log z_0 + \left(\frac{2f'_0}{\pi} + iC \right) z_0 + \frac{iB}{2} z_0^2 + \frac{f'''_0}{3\pi} z_0^3 \log z_0$$

$$- \left(\frac{5f'''_0}{36\pi} + \frac{A}{2} \right) z_0^3 + O(z_0^5 \log z_0)$$

Si l'on avait poursuivi le processus d'extraction des singularités, on aurait eu dans le développement limité des termes de la forme :

$$f_0^V z_0^5 \log z_0 \quad f_0^{VII} z_0^7 \log z_0 \dots$$

Dans le cas du batteur plan $f''_0 = f'''_0 = f_0^V = f_0^{VII} = \dots = 0$, le développement se réduit à (*) :

$$F(z_0) = iD - \frac{2f'_0}{\pi} z_0 \log z_0 + \left(\frac{2f'_0}{\pi} + iC \right) z_0 + \frac{iB}{2} z_0^2 + O(z_0^3)$$

$$\text{où } D = D_1 + iD_2 \quad C = C_1 + iC_2$$

On pose :

$$\frac{iB}{2} z_0^2 = (a_2 + ib_2) (P_2 + iQ_2) \quad (a_3 + ib_3) z_0^3 = (a_3 + ib_3) (P_3 + iQ_3)$$

où $P_2, Q_2 \quad P_3, Q_3$ sont des polynômes harmoniques conjugués.

On peut séparer les parties réelles et imaginaires :

$$X_1 = -D_2 - \frac{2f'_0}{\pi} (x_0 \log \varphi - y_0) + \left(\frac{2f'_0}{\pi} - C_2 \right) x_0 - C_1 y_0 + a_2 P_2 - b_2 Q_2 + a_3 P_3 - b_3 Q_3 + \dots$$

$$-Y_1 = D_1 - \frac{2f'_0}{\pi} (y_0 \log \varphi + x_0) + C_1 x_0 + \left(\frac{2f'_0}{\pi} - C_2 \right) y_0 + b_2 P_2 + a_2 Q_2 + b_3 P_3 + a_3 Q_3 \dots$$

Ces fonctions doivent satisfaire aux conditions limites :

$$Y_1 = 0 \text{ pour } y_0 = 0 \quad \text{et} \quad \varphi = 0 \quad \text{d'où} \quad D_1 + C_1 x_0 + b_2 x_0^2 + \dots = 0$$

(*) Remarquons que la partie réelle de la fonction $F(z_0)$, soit X_1 , est continue à l'origine au sens de Lipschitz. Mais la dérivée $\partial X_1 / \partial y_0$ étant discontinue, $F(z_0)$ est de l'ordre de $z_0 \log z_0$. Comme on l'a vu plus haut, ce terme provient de l'intégration de la singularité de la dérivée : $(2if'_0/\pi) \log z_0$. Plus généralement, si la première dérivée discontinue était d'ordre n , la partie principale de $f(z_0)$ serait de la forme $z_0^n \log z_0$. On retrouve le résultat de Fatou en le précisant.

On en déduit : $D_1 = C_1 = b_2 = \dots = 0$.

De même, pour $x_0 = 0$ et $\theta = (\pi/2)$ $X_1 = f(y_0) = f_0 + y_0 f'_0$

$$-D_2 + f'_0 y_0 - C_1 y_0 - a_2 y_0^2 + b_3 y_0^3 + \dots = f_0 + y_0 f'_0$$

d'où : $D_2 = -f_0$ $C_1 = a_2 = b_3 = 0$

On posera dans la suite $C_2 = -a_0$.

En définitive, on a les développements limités valables au pied d'un batteur plan :

$$X_1 = f_0 - \frac{2f'_0}{\pi} (x_0 \log \varphi - \theta y_0) + \left(\frac{2f'_0}{\pi} + a_0 \right) x_0 + a_3 (x_0^2 - 3 y_0^2) - b_5 y_0 (y_0^4 - 10 x_0^2 y_0^2 + 5 x_0^2) +$$

$$Y_1 = \frac{2f'_0}{\pi} (y_0 \log \varphi + \theta x_0) - \left(\frac{2f'_0}{\pi} + a_0 \right) y_0 - a_3 y_0 (3 x_0^2 - y_0^2) + b_5 x_0 (x_0^4 - 10 x_0^2 y_0^2 + 5 y_0^4) +$$

Ainsi, les déplacements X_1 et Y_1 sont finis et continus au voisinage du pied du batteur. Sur le batteur ($x_0 = 0$), X_1 et Y_1 sont des fonctions de y_0 seul. Leurs dérivées :

$$\frac{\partial X_1}{\partial y_0} = \frac{2f'_0}{\pi} \theta + a_3 \frac{\partial P_3}{\partial y_0} - b_5 \frac{\partial Q_5}{\partial y_0} + \dots$$

$$\frac{\partial Y_1}{\partial y_0} = \frac{2f'_0}{\pi} \log \varphi - a_0 - a_3 \frac{\partial Q_3}{\partial y_0} + b_5 \frac{\partial P_5}{\partial y_0}$$

présentent des discontinuités de première et deuxième espèce, si $f'_0 \neq 0$, c'est-à-dire si $f(y_0)$ ne vérifie pas la condition limite au fond.

Elles sont cependant de carré intégrable. En vertu d'un théorème connu, les développements en séries de fonctions orthogonales convergent « presque partout » vers la valeur des fonctions $\partial X_1 / \partial y_0$, $\partial Y_1 / \partial y_0$. En particulier, si $f'(y_0)$ est continu dans l'intervalle $(0, \epsilon)$, ce développement est uniformément convergent dans l'intervalle $(0, \epsilon)$ extrémités comprises.

Si $f'_0 = 0$, les dérivées $\partial X_1 / \partial y_0$ et $\partial Y_1 / \partial y_0$ sont continues au pied du batteur, et le développement est uniformément convergent dans l'intervalle $(0, \epsilon)$ extrémités comprises. Il est d'ailleurs absolument convergent, car les dérivées $\partial^2 X_1 / \partial y_0^2$, $\partial^2 Y_1 / \partial y_0^2$ sont de carré intégrable et continues et leur développement en série est lui-même uniformément convergent.

Si $f(y_0)$ présente des points de discontinuité dans l'intervalle $(0, \epsilon)$ tout en étant de carré intégrable, il en sera de même de X_1 . Le développement sera alors uniformément convergent dans tout intervalle ne contenant pas le point de discontinuité. Connaissant la nature de la discontinuité de $f(y_0)$, on pourrait, par des raisonnements semblables à ceux qui ont été faits ci-dessus, déterminer les singularités de X_1 et Y_1 . Par exemple, si $f(y_0)$ a une discontinuité de première espèce (pour $y_0 = \eta$) X_1 se comportera comme la partie réelle de :

$$- \frac{2i}{\pi} [f(\eta + 0) - f(\eta - 0)] \log z_0$$

Y_1 se comportera donc comme :

$$- \frac{2}{\pi} [f(\eta + 0) - f(\eta - 0)] \log \varphi$$

qui est de carré intégrable. Le développement de Y_1 sera lui aussi uniformément continu dans tout intervalle ne contenant pas le point de discontinuité. On étudierait de manière analogue l'influence des discontinuités de $f'(y_0)$.

On retrouve ainsi les résultats obtenus par l'étude des coefficients de la série. Mais l'on connaît en outre le comportement des fonctions X_1 et Y_1 dans le voisinage des points singuliers.

Rappelons, pour terminer, que M. Biesel avait déterminé les singularités aux extrémités du batteur en cherchant une fonction irrégulière dont le développement en série soit précisément la partie principale de la série étudiée.

La lenteur de la convergence étant imposée par la nature des singularités, on conçoit en

effet que la série représentant la fonction se comporte comme la série représentant les singularités.

B) Etude du point situé au sommet du batteur.

Il est commode de transporter l'origine des axes au point étudié :

FIG. 8

On considère la fonction harmonique $U = k^2 X_1 - g (\partial X_1 / \partial y_0)$ partie réelle de la fonction analytique (*) :

$$G(z_0) = k^2 X_1 - g \frac{\partial X_1}{\partial y_0} - i \left(k^2 Y_1 + g \frac{\partial X_1}{\partial x_0} \right) = k^2 F(z_0) - gi \frac{dF(z_0)}{dz_0}$$

On effectuera le prolongement analytique de cette fonction (par réflexion à travers la surface libre, cette fois-ci), de façon à transformer le point d'angle en un point ordinaire du contour limitant le domaine. Ceci est possible puisque U est nulle sur la surface libre.

Dans le canal image on définira U par l'équation :

$$U(x_0, y_0) = -U(x_0, -y_0)$$

La fonction harmonique U est déterminée par les valeurs prises sur la limite du canal réel ou de son image (**).

En particulier, on a sur le batteur :

$$U = k^2 f(y_0) - gf'(y_0) \quad \text{côté canal réel}$$

$$U = -k^2 f(y_0) + gf'(y_0) \quad \text{côté canal image}$$

La fonction U subit donc à la traversée de l'origine une discontinuité :

$$U(+0) - U(-0) = -2 [k^2 f(0) - gf'(0)]$$

On posera :

$$f(0) = f_h \quad f'(0) = f'_h \quad R = 2/\pi (k^2 f_h - gf'_h)$$

On en conclut comme précédemment que la fonction $G(z_0)$ se comporte au voisinage de l'origine comme :

$$(2i/\pi) (k^2 f_h - gf'_h) \log z_0 = iR \log z_0$$

$iR \log z_0$ constitue ainsi le premier terme du développement de $G(z_0)$.

(*) $F(z_0)$ étant analytique dans le domaine et les fonctions X_1 et Y_1 y possédant des dérivées continues, $i [dF(z_0)/dz_0]$ est aussi analytique.

(**) On peut calculer ces valeurs à partir des valeurs de X_1 et Y_1 ainsi que de leurs dérivées.

Pour déterminer les termes suivants, il faut étudier le comportement des dérivées au voisinage de l'origine.

Or il est clair, d'après la figure, que de part et d'autre de $y_0 = 0$, les valeurs de la pente $\partial U / \partial y_0$ sont égales, alors que les valeurs de la courbure (et donc les valeurs de $\partial^2 U / \partial y_0^2$) sont opposées. On a ainsi une discontinuité pour la partie réelle de :

$$\frac{d^2}{dz_0^2} [G(z_0) - iR \log z_0] = \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} \left[k^2 X_1 - g \frac{\partial X_1}{\partial y_0} \right] + i \frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial y} \left[k^2 X_1 - g \frac{\partial X_1}{\partial y_0} \right] \frac{iR}{\varphi^2} e^{-2i\theta}$$

qui se réduit sur l'axe Oy_0 [$\theta = \pm (\pi/2)$] à $\partial^2 U / \partial y_0^2$.

Cette fonction se comporte comme $2i/\pi (k^2 f''_h - g f'''_h) \log z_0$

En utilisant le théorème de Fatou pour déterminer le reste et en intégrant, on trouve :

$$G(z_0) = iR \log z_0 + C_0 + C_1 z_0 - \frac{2i}{\pi} (k^2 f''_h - g f'''_h) \left(\frac{z_0^2}{2} \log z_0 - \frac{z_0^2}{4} \right) + O(z_0^3 \log z_0)$$

Pour le batteur plan, la dérivée seconde et les dérivées d'ordre supérieur sont identiquement nulles. Le développement se réduit à :

$$k^2 F(z_0) - g i \frac{dF(z_0)}{dz_0} = iR \log z_0 + C_0 + C_1 z_0 + C_2 z_0^2 + O(z_0^3)$$

L'équation sans second membre a pour intégrale $F(z_0) = A e^{-\alpha z_0}$ où l'on a posé :

$$\alpha = \frac{ik^2}{g}$$

En considérant A comme fonction de z_0 , on trouve facilement :

$$F(z_0) = \frac{R}{g\alpha} \log z_0 + \frac{R}{g\alpha} e^{-\alpha z_0} \int \frac{e^{-\alpha z_0} - 1}{z_0} dz_0 + \frac{Re^{-\alpha z_0}}{g\alpha} \log z_0 + \frac{iC_0}{g\alpha} + \frac{iC_1}{g\alpha} \left(z_0 - \frac{1}{\alpha} \right) + \frac{iC_2}{g\alpha} \left(z_0^2 - \frac{2z_0}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^2} \right)$$

En développant $e^{-\alpha z_0}$, on obtient finalement une expression de la forme :

$$F(z_0) = a_0 + ib_0 - \frac{R}{g} z_0 \log z_0 + (a_1 + ib_1) z_0 + \frac{ik^2 R}{2g^2} z_0^2 \log z_0 + (a_2 + ib_2) z_0^2 - \frac{\alpha^2 R}{6g} z_0^3 \log z_0 + \dots$$

Enfin, en séparant les parties réelles et imaginaires et en appliquant les conditions aux limites, on a successivement :

$$\begin{aligned} X_1 &= a_0 - \frac{R}{g} (x_0 \log \varphi - \theta y_0) + a_1 x_0 - b_1 y_0 - \frac{k^2 R}{2g^2} \theta (x_0^2 - y_0^2) - \frac{k^2 R}{g^2} x_0 y_0 \log \varphi + a_2 (x_0^2 - y_0^2) \\ &\quad - 2b_2 x_0 y_0 + O(\varphi^3 \log \varphi) \\ -Y_1 &= b_0 - \frac{R}{g} (y_0 \log \varphi + \theta x_0) + b_1 x_0 + a_1 y_0 - \frac{k^2 R}{2g^2} (x_0^2 - y_0^2) \log \varphi - \frac{k^2 R}{g^2} \theta x_0 y_0 + b_2 (x_0^2 - y_0^2) \\ &\quad + 2a_2 x_0 y_0 + O(\varphi^3 \log \varphi) \\ x_0 = y_0 = 0 \quad X_1(0,0) &= a_0 = f_h \end{aligned}$$

Paroi du batteur :

$$x_0 = 0 \quad \theta = -\pi/2$$

$$\begin{aligned} k^2 X_1 - g \frac{\partial X_1}{\partial y_0} &= k^2 f(y_0) - g f'(y_0) = k^2 f_h - g f'_h + y_0 (k^2 f'_h) = k^2 a_0 + b_1 g + k^2 \left(\frac{2a_2 g}{k^2} - b_1 \right) y_0 \\ &\quad - (a_2 k^2 + 3gb_2) y_0^2 + \dots \end{aligned}$$

Surface libre :

$$y_0 = 0 \quad \theta = 0$$

$$k^2 X_1 - g \frac{\partial X_1}{\partial y_0} = k^2 a_0 + g b_1 + \left(k^2 a_1 + 2 b_2 g + \frac{k^2 R}{2 g} \right) x_0 + (k^2 a_2 + 3 g b_3) x_0^2 + \dots = 0$$

On en tire : $a_0 = f_h$ a_1 arbitraire $b_1 = -\frac{k^2 f_h}{g}$

$$a_2 = -\frac{k^2}{2 g^2} (k^2 f_h - g f_h') \quad b_2 = \frac{k^4}{6 g^3} (k^2 f_h - g f_h')$$

d'où le développement :

$$\begin{aligned} X_1 &= f_h - \frac{R}{g} (x_0 \log \varphi - \theta y_0) + a_1 x_0 + \frac{k^2 f_h}{g} y_0 - \frac{k^2 R}{2 g^2} [\theta (x_0^2 - y_0^2) + 2 x_0 y_0 \log \varphi] \\ &\quad - \frac{k^2 \pi R}{4 g^2} (x_0^2 - y_0^2) - \frac{k^4 \pi R}{6 g^3} x_0 y_0 + O(\varphi^3 \log \varphi) \\ Y_1 &= -b_0 + \frac{R}{g} (y_0 \log \varphi + \theta x_0) + \frac{k^2 f_h}{g} x_0 - a_1 y_0 - \frac{k^2 R}{2 g^2} [(x_0^2 - y_0^2) \log \varphi - 2 \theta x_0 y_0] + \frac{k^2 \pi R}{2 g^2} x_0 y_0 \\ &\quad - \frac{k^4 \pi R}{12 g^3} (x_0^2 - y_0^2) + O(\varphi^3 \log \varphi) \end{aligned}$$

Comme au pied du batteur, X_1 et Y_1 sont partout finis et continus.

Sur l'axe Oy_0 , X_1 et Y_1 sont des fonctions de y_0 seul et leurs dérivées ont pour expression :

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial y_0} &= \frac{R \theta}{g} + \frac{k^2 f_h}{g} + \frac{k^2 R}{g^2} y_0 \theta + \frac{k^2 \pi R}{2 g^2} y_0 + \dots \\ \frac{\partial Y_1}{\partial y_0} &= \frac{R}{g} \log \varphi + \frac{R}{g} - a_1 + \frac{k^2 R}{g^2} y_0 \log \varphi + \frac{k^2 R}{2 g^2} y_0 + \frac{k^4 \pi R}{6 g^3} y_0 + \dots \end{aligned}$$

La première dérivée possède une discontinuité de première espèce, la seconde, un infini logarithmique si $R \neq 0$, c'est-à-dire si la fonction $f(y_0)$ ne vérifie pas la condition limite de surface. Mais, même dans ce cas, les dérivées sont toutes deux de carré intégrable. Leurs développements en série sont donc uniformément convergents dans tout intervalle où les dérivées sont continues. Les développements de X_1 et Y_1 obtenus par intégration des précédentes sont absolument convergents.

Si $R = 0$, les dérivées sont continues au sommet du batteur, ainsi que les dérivées secondes. Les développements en série de $\partial X_1 / \partial y_0$, et $\partial Y_1 / \partial y_0$ seront absolument convergents.

CHAPITRE II

SOLUTION AU DEUXIÈME ORDRE D'APPROXIMATION

Pour calculer la deuxième approximation, nous limiterons les développements en série (voir système d'équations I) à la deuxième puissance de e .

En substituant, comme ci-dessus, dans les équations du mouvement ainsi que dans les équations exprimant les conditions aux limites, en négligeant les termes du 3^e ordre, et en

écrivant que les équations sont vérifiées pour toutes les valeurs de e , il vient, compte tenu de ce que X_1 et Y_1 vérifient les équations au 1^{er} ordre :

$$\frac{\partial X_2}{\partial x_0} + \frac{\partial Y_2}{\partial y_0} = - \frac{D(X_1, Y_1)}{D(x_0, y_0)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial Y_2}{\partial x_0} - \frac{\partial X_2}{\partial y_0} \right) = - \frac{D[(\partial X_1 / \partial t), X_1]}{D(x_0, y_0)} - \frac{D[(\partial Y_1 / \partial t), Y_1]}{D(x_0, y_0)} + 2 \zeta_2(x_0, y_0)$$

avec les conditions frontières :

- 1° $Y_2 = 0$. pour $y_0 = 0$, $x_0 \geq 0$, t quelconque
- 2° $\frac{\partial X_2}{\partial t^2} + g \frac{\partial Y_2}{\partial x_0} = - \frac{\partial^2 X_1}{\partial t^2} \frac{\partial Y_1}{\partial x_0} - \frac{\partial^2 Y_1}{\partial t^2} \frac{\partial X_1}{\partial x_0}$ pour $y_0 = h$, $x_0 \geq 0$, t quelconque
- 3° $X_2 = Y_1 f'(y_0) \sin kt$. $x_0 = 0$, $0 \leq y_0 \leq h$, t quelconque.
- 4° X_2, Y_2 bornés. Pas d'onde venant de l'infini.

Les deuxièmes membres des équations et conditions aux limites sont connus. On a trouvé dans le chapitre précédent :

$$X_1 = \frac{a_0}{e} \frac{\text{ch } m_0 y_0}{\text{sh } m_0 h} \sin(kt - m_0 x_0) + \sum_1^{\infty} \frac{2 a_p}{e} e^{-\lambda_p x_0} \frac{\cos \lambda_p y_0}{\sin \lambda_p h} \sin kt$$

$$Y_1 = \frac{a_0}{e} \frac{\text{sh } m_0 y_0}{\text{sh } m_0 h} \cos(kt - m_0 x_0) + \sum_1^{\infty} \frac{2 a_p}{e} e^{-\lambda_p x_0} \frac{\sin \lambda_p y_0}{\sin \lambda_p h} \sin kt$$

Chaque jacobien figurant dans le second membre des équations peut être décomposé en un double infinité de jacobiens, qui sont obtenus en combinant entre eux et de toutes les manières possibles les diverses composantes de X_1 et Y_1 .

On trouve ainsi trois catégories différentes de termes.

La première catégorie correspond à l'interaction de la houle avec elle-même. C'est le terme classique de 2^e ordre calculé par M. Miche, et qui accompagne la houle émise par le batteur.

La deuxième catégorie correspond à l'interaction, entre elles, de deux oscillations sinusoïdales (l'interaction d'une oscillation sinusoïdale avec elle-même en est un cas particulier). Enfin, la troisième catégorie correspond à l'interaction de la houle avec une oscillation sinusoïdale.

Les équations qui donnent le vecteur déplacement au 2^e ordre X_2, Y_2 étant linéaires, la solution s'obtient en ajoutant à une solution particulière de l'équation complète la solution générale de l'équation sans 2^e membre. La solution particulière est elle-même la somme des solutions particulières correspondant à chaque jacobien.

On pourrait ainsi déterminer les trois types de solutions particulières correspondant aux trois catégories de jacobiens. Il est cependant plus simple, comme l'a fait remarquer M. Biesel, de décomposer les oscillations sinusoïdales en houles à caractéristiques imaginaires.

En effet, lorsque, dans la théorie au 1^{er} ordre, on a effectué la recherche des solutions élémentaires à variables séparées, on a obtenu deux types différents de solution en donnant à la constante de séparation les valeurs $-m_0^2$ et $+\lambda_p^2$. Mais il revient au même de poser $\lambda_p = im_p$ et de prendre la constante de séparation sous la forme $-m_0^2$ ou $-m_p^2$. Les m_p sont alors les racines imaginaires pures de l'équation $k^2 = mg \text{th } mh$ (m_0 étant l'unique racine réelle).

Du point de vue formel, il n'y aura plus qu'un seul type de solution qui sera la houle progressive, mais ses caractéristiques pourront être imaginaires pures.

On vérifie d'ailleurs que le terme :

$$X_1 = \frac{2 a_p}{e} e^{-\lambda_p x_0} \frac{\cos \lambda_p y_0}{\sin \lambda_p h} \sin kt = \frac{2 a_p}{e} e^{-im_p x_0} \frac{\text{ch } m_p y_0}{i \text{sh } m_p h} \sin kt$$

peut se décomposer en deux clapotis à caractéristiques imaginaires :

$$X_1 = - \frac{2 i a_p}{e} \frac{\operatorname{ch} m_p y_0}{\operatorname{sh} m_p h} \cos m_p x_0 \sin kt - \frac{2 a_p}{e} \frac{\operatorname{ch} m_p y_0}{\operatorname{sh} m_p h} \sin m_p x_0 \sin kt$$

qui peuvent à leur tour être décomposés chacun en deux houles à caractéristiques imaginaires :

$$\begin{aligned} X_1 = & - \frac{i a_p}{e} \frac{\operatorname{ch} m_p y_0}{\operatorname{sh} m_p h} \sin (kt - m_p x_0) + \frac{i a_p}{e} \frac{\operatorname{ch} (-m_p) y_0}{\operatorname{sh} (-m_p) h} \sin [kt - (-m_p) x_0] \\ & - \frac{a_p}{e} \frac{\operatorname{ch} m_p y_0}{\operatorname{sh} m_p h} \sin [kt - m_p x_0 + (\pi/2)] - \frac{a_p}{e} \frac{\operatorname{ch} (-m_p) y_0}{\operatorname{sh} (-m_p) h} \sin [kt - (-m_p) x_0 + (\pi/2)] \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} Y_1 = & \frac{2 a_p}{e} e^{-i m_p x_0} \frac{\operatorname{sh} m_p y_0}{\operatorname{sh} m_p h} \sin kt \\ & - \frac{i a_p}{e} \frac{\operatorname{sh} m_p y_0}{\operatorname{sh} m_p h} \cos [kt - m_p x_0] + \frac{i a_p}{e} \frac{\operatorname{sh} (-m_p) y_0}{\operatorname{sh} (-m_p) h} \cos [kt - (-m_p) x_0] \\ & - \frac{a_p}{e} \frac{\operatorname{sh} m_p y_0}{\operatorname{sh} m_p h} \cos [kt - m_p x_0 + (\pi/2)] - \frac{a_p}{e} \frac{\operatorname{sh} (-m_p) y_0}{\operatorname{sh} (-m_p) h} \cos [kt - (-m_p) x_0 + (\pi/2)] \end{aligned}$$

La solution au premier ordre se compose finalement de houles d'équations :

$$X_1 = \sum_0^{\infty} A_p \operatorname{ch} M_p y_0 \sin (\varphi_p - M_p x_0)$$

$$Y_1 = \sum_0^{\infty} A_q \operatorname{ch} M_q y_0 \cos (\varphi_q - M_q x_0)$$

où les paramètres A, M et φ peuvent prendre les valeurs indiquées dans le tableau ci-dessous :

	Amplitude A_p	Nombre d'ondes M_p	Phase φ_p
Houle H_0	$\frac{a_0}{e \operatorname{sh} m_0 h}$	m_0	kt
Houle C_p	$\frac{-i a_p}{e \operatorname{sh} m_p h}$	m_p	kt
Houle $\bar{C}_p$	$\frac{+ i a_p}{e \operatorname{sh} (-m_p) h}$	$-m_p$	kt
Houle D_p	$\frac{-a_p}{e \operatorname{sh} m_p h}$	m_p	$kt + (\pi/2)$
Houle $\bar{D}_p$	$\frac{-a_p}{e \operatorname{sh} (-m_p) h}$	$-m_p$	$kt + (\pi/2)$

Les houles C_p et $\bar{C}_p$, D_p et $\bar{D}_p$ sont deux à deux imaginaires conjuguées.

Dans les équations du second ordre, il n'y aura plus qu'une seule catégorie de jacobiens, correspondant à l'interaction d'une houle avec une autre houle (ou d'une houle avec elle-même).

Comme les houles imaginaires sont deux à deux conjuguées, il en sera de même des solutions particulières de l'équation complète, puisque toutes les opérations effectuées sont des opérations algébriques.

Leur somme sera donc réelle et possédera une signification physique. De plus, elle vérifiera les équations et conditions aux limites du canal indéfini. Cette remarque justifie l'artifice de calcul employé.

Les équations du mouvement prennent donc la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_2}{\partial x_0} + \frac{\partial Y_2}{\partial y_0} &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} M_p M_q \frac{A_p A_q}{2} \left(\text{ch} (M_p - M_q) y_0 \cos [(\varphi_p + \varphi_q) - (M_p + M_q) x_0] \right. \\ &\quad \left. + \text{ch} (M_p + M_q) y_0 \cos [(\varphi_p - \varphi_q) - (M_p - M_q) x_0] \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial Y_2}{\partial x_0} - \frac{\partial X_2}{\partial y_0} \right) &= - \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} k M_p M_q A_p A_q \left[\text{sh} (M_p + M_q) y_0 \cos [(\varphi_p - \varphi_q) - (M_p - M_q) x_0] + 2 \zeta_2 (x_0, y_0) \right] \end{aligned} \quad (III)$$

On remarque que le deuxième membre de l'équation dynamique ne dépend pas du temps, car $\varphi_p - \varphi_q = 0, +\pi/2$ ou $-\pi/2$ suivant les cas. On peut désigner ce second membre par $R_2(x_0, y_0)$. En intégrant, on introduit une fonction arbitraire $C_2(x_0, y_0)$.

$$\frac{\partial Y_2}{\partial x_0} - \frac{\partial X_2}{\partial y_0} = R_2(x_0, y_0) t + C_2(x_0, y_0)$$

On trouve aisément une solution particulière sous la forme :

$$\begin{aligned} X_2 &= - \frac{\partial \psi_2}{\partial y_0} (x_0, y_0) t - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0} (x_0, y_0) + \frac{\partial L_2}{\partial x_0} \\ Y_2 &= \frac{\partial \psi_2}{\partial x_0} (x_0, y_0) t + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0} (x_0, y_0) + \frac{\partial L_2}{\partial y_0} \end{aligned}$$

avec :

$$\Delta \psi_2 = R_2(x_0, y_0) \quad \Delta \varphi_2 = C_2(x_0, y_0)$$

$$\text{et } L_2(x_0, y_0, t) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{A_p A_q}{8} \left\{ - \text{ch} (M_p - M_q) y_0 \cos [(\varphi_p + \varphi_q) - (M_p + M_q) x_0] \right. \\ \left. + \text{ch} (M_p + M_q) y_0 \cos [(\varphi_p - \varphi_q) - (M_p - M_q) x_0] \right\}$$

Pour avoir la solution générale, on ajoutera le gradient d'une fonction harmonique $\partial H_2 / \partial x_0, \partial H_2 / \partial y_0$ avec $\Delta H_2 = 0$. En faisant sur les termes séculaires les mêmes hypothèses que précédemment, on conclura que :

$$\psi_2 = C^{\text{te}}, \text{ d'où } R_2(x_0, y_0) = 0.$$

La solution sera donc *rotationnelle au 2° ordre* et l'on aura :

$$2 \zeta_2(x_0, y_0) = \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} k M_p M_q A_p A_q \text{sh} (M_p + M_q) y_0 \cos [(\varphi_p - \varphi_q) - (M_p - M_q) x_0]$$

En procédant comme ci-dessus, on montrerait également que le changement de variable :

$$x_1 = x_0 - e^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0} \quad y_1 = y_0 + e^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0}$$

appartient au groupe de transformation étudié par M. Chabert d'Hières et qu'il permet de simplifier les expressions de X_2 et Y_2 . Remarquons en passant que ce nouveau changement de varia-

ble est du 2° ordre. Il modifiera donc la solution au 1^{er} ordre d'une quantité au moins égale au 3° ordre, quantité que nous négligeons au degré d'approximation que nous avons choisi.

En effectuant la substitution et en remplaçant les indices 1 par les indices 0, il vient finalement :

$$X_2 = \frac{\partial L_2}{\partial x_0} + \frac{\partial H_2}{\partial x_0} \quad Y_2 = \frac{\partial L_2}{\partial y_0} + \frac{\partial H_2}{\partial y_0}$$

Le problème se ramène à la recherche d'une fonction $H_2(x_0, y_0, t)$ harmonique en x_0, y_0 et satisfaisant aux conditions limites ci-dessous :

$$1^\circ \quad \frac{\partial H_2}{\partial y_0} = 0 \quad \text{pour } y_0 = 0 \quad x_0 \geq 0, \text{ car } \frac{\partial L_2}{\partial y_0}(x_0, 0) = 0$$

$$2^\circ \quad \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial^2 H_2}{\partial t^2} + g \frac{\partial H_2}{\partial y_0} \right) = - \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial^2 L_2}{\partial t^2} + g \frac{\partial L_2}{\partial y_0} \right) - \frac{\partial^2 X_1}{\partial t^2} \frac{\partial X_1}{\partial x_0} - \frac{\partial^2 Y_1}{\partial t^2} \frac{\partial Y_1}{\partial x_0}$$

pour $y_0 = h \quad x_0 \geq 0$

$$3^\circ \quad \frac{\partial H_2}{\partial x_0} = - \frac{\partial L_2}{\partial x_0} + Y_1 f'(y_0) \sin kt \quad \text{pour } x_0 = 0 \quad 0 < y_0 < h$$

4° H_2 borné — pas d'onde venant de l'infini.

En substituant dans la condition n° 2 les valeurs de L_2, X_1, Y_1 , il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial^2 H_2}{\partial t^2} + g \frac{\partial H_2}{\partial y_0} \right)_{y_0=h} &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{A_p A_q}{8} \left\{ \begin{aligned} & (M_p + M_q) [-4 k^2 \operatorname{ch}(M_p - M_q) h + g (M_p - M_q) \operatorname{sh}(M_p - M_q) h] \\ & \times \sin [\varphi_p + \varphi_q - (M_p + M_q) x_0] \\ & + (M_p - M_q) [k^2 \operatorname{ch}(M_p + M_q) h - g (M_p + M_q) \operatorname{sh}(M_p + M_q) h] \\ & \times \sin [\varphi_p - \varphi_q - (M_p - M_q) x_0] \end{aligned} \right. \\ &+ \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{A_p A_q}{8} \left\{ \begin{aligned} & -4 k^2 M_q \operatorname{ch}(M_p - M_q) h \sin [\varphi_p + \varphi_q - (M_p + M_q) x_0] \\ & -4 k^2 M_q \operatorname{ch}(M_p + M_q) h \sin [\varphi_p - \varphi_q - (M_p - M_q) x_0] \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

On doit calculer ces sommes dans tout le premier quadrant du plan p, q . On peut simplifier ces expressions en associant à chaque terme U_{pq} le terme U_{qp} symétrique par rapport à la diagonale principale, et en remplaçant chacun d'eux par la somme $(U_{pq} + U_{qp})/2$. On pourra ainsi continuer à sommer sur les deux indices p et q de 0 à l'infini sans modifier le résultat.

FIG. 9

La condition n° 2 devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial^2 H_2}{\partial t^2} + g \frac{\partial H_2}{\partial y_0} \right)_{y_0=h} &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{A_p A_q}{8} \left\{ \begin{aligned} & (M_p + M_q) [-6 k^2 \operatorname{ch}(M_p - M_q) h + g (M_p - M_q) \operatorname{sh}(M_p - M_q) h] \\ & \times \sin [\varphi_p + \varphi_q - (M_p + M_q) x_0] \\ & + (M_p - M_q) [2 k^2 \operatorname{ch}(M_p + M_q) h - g (M_p + M_q) \operatorname{sh}(M_p + M_q) h] \\ & \times \sin [\varphi_p - \varphi_q - (M_p - M_q) x_0] \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

On peut simplifier le problème en changeant de fonction inconnue. On pose :

$$H_2(x_0, y_0, t) = K_2(x_0, y_0, t) + J_2(x_0, y_0, t)$$

$$\text{avec } K_2(x_0, y_0, t) = \sum_0^\infty \sum_0^\infty \lambda_{pq} \frac{A_p A_q}{8} \operatorname{ch}(M_p + M_q) y_0 \cos[(\varphi_p + \varphi_q) - (M_p + M_q) x_0] \\ + \sum_0^\infty \sum_0^\infty \mu_{pq} \frac{A_p A_q}{8} \operatorname{ch}(M_p - M_q) y_0 \cos[(\varphi_p - \varphi_q) - (M_p - M_q) x_0]$$

Comme on peut le vérifier aisément, la condition limite en surface devient :

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial^2 J_2}{\partial t^2} + g \frac{\partial J_2}{\partial y_0} \right) = 0 \quad y_0 = h \quad x_0 \geq 0$$

si l'on prend :

$$\lambda_{pq} = \frac{6 k^2 \operatorname{ch}(M_p - M_q) h - g (M_p - M_q) \operatorname{sh}(M_p - M_q) h}{4 k^2 \operatorname{ch}(M_p + M_q) h - g (M_p + M_q) \operatorname{sh}(M_p + M_q) h} \\ \mu_{pq} = \frac{2 k^2 \operatorname{ch}(M_p + M_q) h - g (M_p + M_q) \operatorname{sh}(M_p + M_q) h}{g (M_p - M_q) \operatorname{sh}(M_p - M_q) h}$$

On a, d'autre part :

$$\Delta J_2 = \Delta H_2 = 0$$

La fonction J_2 doit être harmonique comme la fonction H_2 . Elle doit de plus satisfaire aux conditions aux limites :

$$1^\circ \quad \frac{\partial J_2}{\partial y_0} = 0 \quad y_0 = 0 \quad x_0 \geq 0$$

$$2^\circ \quad \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial^2 J_2}{\partial t^2} + g \frac{\partial J_2}{\partial y_0} \right) = 0 \quad y_0 = h \quad x_0 \geq 0$$

$$3^\circ \quad \frac{\partial J_2}{\partial x_0} = Y_1 f'(y_0) \sin kt - \xi(0, y_0, t) \quad x_0 = 0 \quad 0 \leq y_0 \leq h$$

où l'on a posé :

$$\xi(x_0, y_0, t) = \frac{\partial L_2}{\partial x_0} + \sum_0^\infty \sum_0^\infty \frac{A_p A_q}{8} \lambda_{pq} (M_p + M_q) \operatorname{ch}(M_p + M_q) y_0 \sin[\varphi_p + \varphi_q - (M_p + M_q) x_0] \\ + \sum_0^\infty \sum_0^\infty \frac{A_p A_q}{8} \mu_{pq} (M_p - M_q) \operatorname{ch}(M_p - M_q) y_0 \sin[\varphi_p - \varphi_q - (M_p - M_q) x_0]$$

4° J_2 borné — pas d'onde venant de l'infini (*).

Ce problème est tout à fait analogue au problème déjà résolu au premier ordre. On sait que la solution $J_2(x_0, y_0, t)$ est une combinaison linéaire et homogène de solutions élémentaires à variables séparées vérifiant les conditions 1, 2 et 4.

On choisira les coefficients de manière à vérifier également la condition 3.

On aura ainsi obtenu une solution satisfaisant à toutes les équations et conditions aux limites du problème.

On remarquera, en terminant, que $\xi(x_0, y_0, t)$ représente l'abscisse de tous les termes du 2° ordre qui doivent être ajoutés à la solution du 1^{er} ordre, pour satisfaire aux équations et conditions limites du *canal indéfini* jusqu'au 2° ordre d'approximation.

Ces termes constituent une composante du mouvement du fluide ayant pour période $T/2$. Si le mouvement du batteur ne contient pas d'harmonique de période $T/2$, cette composante

(*) On vérifiera ci-dessous que la solution comprenant les termes de L_2 , H_2 , J_2 , satisfait aux conditions (4).

doit être compensée au niveau du batteur par l'addition des termes $\partial J_2 / \partial x_0$ afin que le mouvement du fluide puisse épouser le mouvement du batteur jusqu'au 2° ordre d'approximation.

Si le mouvement du batteur n'est pas rigoureusement sinusoïdal, on peut le décomposer en série de Fourier, soit, en limitant le développement aux termes du second ordre (*) :

$$x = ef_1(y) \sin kt + e^2 f_2(y) \sin 2kt + e^2 f_3(y) \cos 2kt$$

La condition à la limite devient :

$$\partial J_2 / \partial x_0 = Y_1 f_1(y_0) \sin kt - \xi(0, y_0, t) + f_2(y_0) \sin 2kt + f_3(y_0) \cos 2kt$$

On ajoutera à la solution obtenue pour le batteur sinusoïdal les solutions correspondant aux conditions $\partial J_2 / \partial x_0 = f_2(y_0) \sin 2kt$ et $\partial J_2 / \partial x_0 = f_3(y_0) \cos 2kt$. Celles-ci ne sont autres que l'harmonique calculé par M. Apté.

CHAPITRE III

CALCUL DES TERMES DU DEUXIÈME ORDRE

Pour expliciter la condition (3), nous allons d'abord calculer l'expression ξ dans laquelle nous développons $\partial L_2 / \partial x_0$:

$$\xi = \sum_0^\infty \sum_0^\infty \frac{A_p A_q}{8} \left\{ \begin{aligned} &-(M_p + M_q) [\operatorname{ch}(M_p - M_q) y_0 - \lambda_{pq} \operatorname{ch}(M_p + M_q) y_0] \sin [(\varphi_p + \varphi_q) - (M_p + M_q) x_0] \\ &+ (M_p - M_q) [\operatorname{ch}(M_p + M_q) y_0 + \mu_{pq} \operatorname{ch}(M_p - M_q) y_0] \sin [(\varphi_p - \varphi_q) - (M_p - M_q) x_0] \end{aligned} \right\}$$

Pour un choix quelconque des indices p et q , les paramètres A , M et φ prennent les valeurs relatives aux divers types de houle (C , $\bar{C}$, D , $\bar{D}$). Si p ou $q = 0$, les paramètres prennent la valeur relative à la houle H_0 .

On peut obtenir les termes de la somme double ci-dessus en considérant le produit symbolique :

$$[H_0 + \sum_1^\infty (C_p + \bar{C}_p + D_p + \bar{D}_p)] [H_0 + \sum_1^\infty (C_q + \bar{C}_q + D_q + \bar{D}_q)]$$

En développant, on trouve les produits partiels $\sum_1^\infty H_0 C_q$ (ou $\sum_1^\infty \sum_1^\infty C_p D_q$) dont l'expression complète est obtenue en remplaçant dans ξ les paramètres d'indices p par ceux de la houle H_0 , et les paramètres d'indice q par ceux de la houle C_q (ou les paramètres d'indice p par ceux de la houle C_p et les paramètres d'indice q par ceux de la houle D_q). Ces produits partiels peuvent être groupés dans le tableau :

$H_0 H_0$	$H_0 \sum C_q$	$H_0 \sum \bar{C}_q$	$H_0 \sum D_q$	$H_0 \sum \bar{D}_q$
$H_0 \sum C_p$	$\sum \sum C_p C_q$	$\sum \sum C_p \bar{C}_q$	$\sum \sum C_p D_q$	$\sum \sum C_p \bar{D}_q$
$H_0 \sum \bar{C}_p$	$\sum \sum \bar{C}_p C_q$	$\sum \sum \bar{C}_p \bar{C}_q$	$\sum \sum \bar{C}_p D_q$	$\sum \sum \bar{C}_p \bar{D}_q$
$H_0 \sum D_p$	$\sum \sum D_p C_q$	$\sum \sum D_p \bar{C}_q$	$\sum \sum D_p D_q$	$\sum \sum D_p \bar{D}_q$
$H_0 \sum \bar{D}_p$	$\sum \sum \bar{D}_p C_q$	$\sum \sum \bar{D}_p \bar{C}_q$	$\sum \sum \bar{D}_p D_q$	$\sum \sum \bar{D}_p \bar{D}_q$

(*) Voir théorie de M. Apté.

On peut simplifier le calcul en remarquant que certains termes sont imaginaires conjugués. On calculera donc l'un d'eux et l'on obtiendra l'autre en changeant i en $-i$.

De même, il existe des symétries par rapport à la diagonale principale. C'est ainsi que $H_0 \sum C_p$ et $H_0 \sum C_q$, $H_0 \sum D_p$ et $H_0 \sum D_q$ sont égaux deux à deux. Quant aux termes de la forme $\sum \sum \bar{D}_p C_q$, ils contiennent une partie symétrique et une partie antisymétrique.

On calculera donc :

I. — TERME DU 2° ORDRE ASSOCIÉ A LA HOULE RÉELLE ($H_0 H_0$) :

C'est le terme calculé par M. Miche (interaction d'une houle réelle avec elle-même).

En substituant dans ξ la valeur des paramètres correspondant à la houle H_0 , il vient :

$$\lambda_{00} = \frac{6 k^2}{4 k^2 \operatorname{ch} 2 m_0 h - 2 m_0 g \operatorname{sh} 2 m_0 h} = \frac{3}{2 \operatorname{sh}^2 m_0 h}$$

car $k^2 = m_0 g \operatorname{th} m_0 h$.

d'où :

$$H_0 H_0 = \frac{-m_0 a_0^2}{4 e^2 \operatorname{sh}^2 m_0 h} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\operatorname{ch} 2 m_0 y_0}{\operatorname{sh}^2 m_0 h} \right] \sin [2 k t - 2 m_0 x_0]$$

II. — INTERACTION DE LA HOULE AVEC L'OSCILLATION LOCALE :

1° $\sum H_0 C_p + \sum C_q H_0 + \sum H_0 \bar{C}_p + \sum \bar{C}_q H_0$. Il vient immédiatement :

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{i a_0 a_p}{4 e^2 \operatorname{sh} m_0 h \operatorname{sh} m_p h} \left\{ \begin{array}{l} (m_0 + m_p) [\operatorname{ch} (m_0 - m_p) y_0 - \lambda_{0p} \operatorname{ch} (m_0 + m_p) y_0] \sin [2 k t - (m_0 + m_p) x_0] \\ + (m_0 - m_p) [\operatorname{ch} (m_0 + m_p) y_0 - \lambda_{\bar{0}p} \operatorname{ch} (m_0 - m_p) y_0] \sin [2 k t - (m_0 - m_p) x_0] \\ + (m_0 - m_p) [\operatorname{ch} (m_0 + m_p) y_0 + \mu_{0p} \operatorname{ch} (m_0 - m_p) y_0] \sin (m_0 - m_p) x_0 \\ + (m_0 + m_p) [\operatorname{ch} (m_0 - m_p) y_0 + \mu_{\bar{0}p} \operatorname{ch} (m_0 + m_p) y_0] \sin (m_0 + m_p) x_0 \end{array} \right.$$

$\lambda_{\bar{0}p}$ et $\mu_{\bar{0}p}$ représentent les quantités complexes conjuguées de μ_{0p} et λ_{0p} . Ce terme et le suivant représentent l'interaction de la houle réelle avec l'oscillation locale.

$$2^\circ \sum H_0 D_p + \sum D_q H_0 + \sum H_0 \bar{D}_p + \sum \bar{D}_q H_0$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_0 a_p}{4 e^2 \operatorname{sh} m_0 h \operatorname{sh} m_p h} \left\{ \begin{array}{l} (m_0 + m_p) [\operatorname{ch} (m_0 - m_p) y_0 - \lambda_{0p} \operatorname{ch} (m_0 + m_p) y_0] \cos [2 k t - (m_0 + m_p) x_0] \\ - (m_0 - m_p) [\operatorname{ch} (m_0 + m_p) y_0 - \lambda_{\bar{0}p} \operatorname{ch} (m_0 - m_p) y_0] \cos [2 k t - (m_0 - m_p) x_0] \\ + (m_0 - m_p) [\operatorname{ch} (m_0 + m_p) y_0 + \mu_{0p} \operatorname{ch} (m_0 - m_p) y_0] \cos (m_0 - m_p) x_0 \\ - (m_0 + m_p) [\operatorname{ch} (m_0 - m_p) y_0 + \mu_{\bar{0}p} \operatorname{ch} (m_0 + m_p) y_0] \cos (m_0 + m_p) x_0 \end{array} \right.$$

III. — TERMES DU 2° ORDRE ASSOCIÉS A L'OSCILLATION LOCALE :

1° $\sum \sum C_p C_q + \sum \sum \bar{C}_p \bar{C}_q + \sum \sum D_p D_q + \sum \sum \bar{D}_p \bar{D}_q$

$$- \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{a_p a_q (m_p + m_q)}{2 e^2 \operatorname{sh} m_p h \operatorname{sh} m_q h} [\operatorname{ch} (m_p - m_q) y_0 - \lambda_{pq} \operatorname{ch} (m_p + m_q) y_0] \sin (m_p + m_q) x_0 \cos 2 k t$$

Les autres termes s'annulent deux à deux.

2° $\sum \sum C_p \bar{C}_q + \sum \sum \bar{C}_p C_q + \sum \sum D_p \bar{D}_q + \sum \sum \bar{D}_p D_q$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{a_p a_q (m_p + m_q)}{2 e^2 \operatorname{sh} m_p h \operatorname{sh} m_q h} [\operatorname{ch} (m_p - m_q) y_0 + \bar{\mu}'_{pq} \operatorname{ch} (m_p + m_q) y_0] \sin (m_p + m_q) x_0$$

où :

$$\bar{\mu}'_{pq} = \frac{2 k^2 \operatorname{ch} (m_p + m_q) h - g (m_p - m_q) \operatorname{sh} (m_p - m_q) h}{g (m_p + m_q) \operatorname{sh} (m_p + m_q) h}$$

Les autres termes s'annulent deux à deux.

$$\begin{aligned}
 3^\circ \quad & \sum \sum D_p C_q + \sum \sum \bar{D}_p \bar{C}_q + \sum \sum C_p D_q + \sum \sum \bar{C}_p \bar{D}_q \\
 & - \sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{ia_p a_q (m_p + m_q)}{2 e^2 \operatorname{sh} m_p h \operatorname{sh} m_q h} [\operatorname{ch} (m_p - m_q) y_0 - \lambda_{pq} \operatorname{ch} (m_p + m_q) y_0] \cos 2 kt \cos (m_p + m_q) x_0 \\
 4^\circ \quad & \sum \sum D_p \bar{C}_q + \sum \sum \bar{D}_p C_q + \sum \sum C_p \bar{D}_q + \sum \sum \bar{C}_p D_q \\
 & + \sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{ia_p a_q (m_p + m_q)}{2 e^2 \operatorname{sh} m_p h \operatorname{sh} m_q h} [\operatorname{ch} (m_p - m_q) y_0 + \mu'_{pq} \operatorname{ch} (m_p + m_q) y_0] \cos (m_p + m_q) x_0
 \end{aligned}$$

En rassemblant tous ces termes, on trouve l'expression de $\xi(x_0, y_0, t)$:

$\xi(x_0, y_0, t) =$

$$\begin{aligned}
 & \sum_1^\infty \frac{a_0 a_p}{4 e^2 \operatorname{sh} m_0 h \operatorname{sh} m_p h} \left\{ \begin{aligned} & - (m_0 + m_p) [\operatorname{ch} (m_0 - m_p) y_0 + \mu_{0p} \operatorname{ch} (m_0 + m_p) y_0] e^{-i(m_0 + m_p)x_0} \\ & + (m_0 - m_p) [\operatorname{ch} (m_0 + m_p) y_0 + \mu_{0p} \operatorname{ch} (m_0 - m_p) y_0] e^{i(m_0 - m_p)x_0} \end{aligned} \right\} \\
 & + \sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{ia_p a_q (m_p + m_q)}{2 e^2 \operatorname{sh} m_p h \operatorname{sh} m_q h} [\operatorname{ch} (m_p - m_q) y_0 + \mu'_{pq} \operatorname{ch} (m_p + m_q) y_0] e^{-i(m_p + m_q)x_0} \\
 & - \frac{m_0 a_0^2}{4 e^2 \operatorname{sh} m_0 h} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\operatorname{ch} 2 m_0 y_0}{\operatorname{sh}^2 m_0 h} \right] \sin (2 kt - 2 m_0 x_0) \\
 & + \sum_1^\infty \frac{a_0 a_p}{4 e^2 \operatorname{sh} m_0 h \operatorname{sh} m_p h} \left\{ \begin{aligned} & (m_0 + m_p) [\operatorname{ch} (m_0 - m_p) y_0 - \lambda_{0p} \operatorname{ch} (m_0 + m_p) y_0] e^{2ikt} \times e^{-i(m_0 + m_p)x_0} \\ & - (m_0 - m_p) [\operatorname{ch} (m_0 + m_p) y_0 - \lambda_{0p} \operatorname{ch} (m_0 - m_p) y_0] e^{-2ikt} \times e^{i(m_0 - m_p)x_0} \end{aligned} \right\} \\
 & - \sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{ia_p a_q (m_p + m_q)}{2 e^2 \operatorname{sh} m_p h \operatorname{sh} m_q h} [\operatorname{ch} (m_p - m_q) y_0 - \lambda_{pq} \operatorname{ch} (m_p + m_q) y_0] e^{-i(m_p + m_q)x_0} \cos 2 kt
 \end{aligned}$$

Les deux premières sommes représentent un déplacement permanent de la masse d'eau, déplacement qui se traduit par une variation du niveau moyen (on trouverait, en effet, un terme analogue pour les ordonnées). Ces termes correspondent aux « ondes d'accompagnement » de M. Biesel, ondes dont la fréquence est égale à la différence des fréquences des composantes. Dans notre cas particulier où toutes les composantes ont la même fréquence, ces ondes sont « figées » et ne se propagent pas. Elles contiennent d'ailleurs en facteur le terme exponentiel $e^{-\lambda_p x_0}$ et s'amortissent à courte distance du batteur.

Les autres termes ont au contraire une fréquence égale à la somme des fréquences des composantes (double du fondamental) (*). À part le terme du 2° ordre, associé à la houle fondamentale, ils contiennent tous le facteur exponentiel $e^{-\lambda_p x_0}$ ou $e^{-(\lambda_0 + \lambda_q) x_0}$ et deviennent négligeables à faible distance du batteur.

On aurait pu trouver ces derniers par simple application des formules de la houle irrégulière de M. Biesel. Par contre, les déplacements indépendants du temps correspondent, dans ces formules, à des termes qui deviennent infinis lorsque $k_p = k_q$ avec $m_p \neq m_q$ (ceci n'est d'ailleurs possible que pour les houles à caractéristiques imaginaires). Cette anomalie provient du fait que le 2° membre de l'équation dynamique (voir les équations III) contient la fonction :

$$R(y_0) \cos [(k_p - k_q) t - (M_p - M_q) x_0]$$

Celle-ci devient après intégration, par rapport au temps :

$$\frac{R(y_0)}{k_p - k_q} \sin [(k_p - k_q) t - (M_p - M_q) x_0]$$

(*) Les termes du 2° ordre correspondent à la modulation des composantes d'indice p par les composantes d'indice q . Cette modulation fait apparaître les fréquences $k_p + k_q$ et $k_p - k_q$. Remarquons que ce résultat est très général dans la physique des phénomènes non linéaires.

Dans notre cas particulier, $k_p = k_q$ et le 2° membre de l'équation dynamique se réduit à :

$$R(y_0) \cos(M_p - M_q) x_0$$

qui ne dépend pas du temps et qui devient après intégration :

$$t R(y_0) \cos(M_p - M_q) x_0$$

Ces termes présentent donc une forme analytique différente de celle qui correspond au cas général étudié par M. Biesel.

La condition à la limite le long du batteur peut s'écrire désormais :

$$\frac{\partial J_2(0, y_0, t)}{\partial x_0} = F_1(y_0) + F_2(y_0) \sin 2kt + F_3(y_0) \cos 2kt$$

pour $x_0 = 0$:

$$0 \leq y_0 \leq h$$

$$\begin{aligned} F_1(y_0) = & \sum_1^{\infty} \frac{a_p}{e} f'(y_0) \frac{\operatorname{sh} m_p y_0}{\operatorname{sh} m_p h} \\ & - \sum_1^{\infty} \frac{a_0 a_p}{4 e^2 \operatorname{sh} m_0 h \operatorname{sh} m_p h} \left\{ \begin{aligned} & [(m_0 - m_p) - \mu_{0p} (m_0 + m_p)] \operatorname{ch} (m_0 + m_p) y_0 \\ & - [(m_0 + m_p) - \mu_{0p} (m_0 - m_p)] \operatorname{ch} (m_0 - m_p) y_0 \end{aligned} \right. \\ & - \sum_1^{\infty} \sum_1^{\infty} \frac{i a_p a_q (m_p + m_q)}{2 e^2 \operatorname{sh} m_p h \operatorname{sh} m_q h} [\operatorname{ch} (m_p - m_q) y_0 + \mu'_{pq} \operatorname{ch} (m_p + m_q) y_0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2(y_0) = & \frac{a_0}{2e} \frac{\operatorname{sh} m_0 y_0}{\operatorname{sh} m_0 h} f'(y_0) + \frac{m_0 a_0^2}{4 e^2 \operatorname{sh}^2 m_0 h} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\operatorname{ch} 2 m_0 y_0}{\operatorname{sh}^2 m_0 h} \right] \\ & - \sum_1^{\infty} \frac{i a_0 a_p}{4 e^2 \operatorname{sh} m_0 h \operatorname{sh} m_p h} \left\{ \begin{aligned} & [(m_0 - m_p) - \lambda_{0p} (m_0 + m_p)] \operatorname{ch} (m_0 + m_p) y_0 \\ & + [(m_0 + m_p) - \lambda_{0p} (m_0 - m_p)] \operatorname{ch} (m_0 - m_p) y_0 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_3(y_0) = & - \sum_1^{\infty} \frac{a_p}{e} f'(y_0) \frac{\operatorname{sh} m_p y_0}{\operatorname{sh} m_p h} \\ & + \sum_1^{\infty} \frac{a_0 a_p}{4 e^2 \operatorname{sh} m_0 h \operatorname{sh} m_p h} \left\{ \begin{aligned} & [(m_0 - m_p) + \lambda_{0p} (m_0 + m_p)] \operatorname{ch} (m_0 + m_p) y_0 \\ & - [(m_0 + m_p) + \lambda_{0p} (m_0 - m_p)] \operatorname{ch} (m_0 - m_p) y_0 \end{aligned} \right. \\ & + \sum_1^{\infty} \sum_1^{\infty} \frac{i a_p a_q (m_p + m_q)}{2 e^2 \operatorname{sh} m_p h \operatorname{sh} m_q h} [\operatorname{ch} (m_p - m_q) y_0 - \lambda_{pq} \operatorname{ch} (m_p + m_q) y_0] \end{aligned}$$

(A suivre)