Étude de la flexion des coques coniques d'épaisseur variable soumises à des efforts centrifuges

Bending study of conical shells of varying thickness under centrifugal stress

> PAR ET

G. PICOLLIER

INGÉNIEUR AUX ÉTABLISSEMENTS NEYRPIC

L'étude analylique de la flexion axisymétrique des coques de révolution d'épaisseur constante est possible, par exemple, pour les coques coniques et sphériques. Pour les coques de révolution d'épaisseur variable, certains cas particuliers se résolvent encore analytiquement, mais en général nécessitent l'introduction de fonctions complexes, pour lesquelles il existe peu ou pas de tables numériques.

S. CASACCI

INGÉNIEUB-DOCTEUB

CHEF DU DÉPARTEMENT TURBINES

AUX ÉTABLISSEMENTS NEVRPIC

L'étude de la flexion des coques coniques se traite, dans le cas d'une épaisseur linéairement variable, à l'aide de fonctions hypergéométriques [1 et 2]. Pour une variation quelconque d'épaisseur, la résolution analytique devient pratiquement impossible.

Cette étude expose une méthode numérique permettant de résoudre les problèmes de la flexion axisymétrique des coques de révolution d'épaisseur variable [3]. On applique cette méthode au calcul des contraintes et des déformations des coques coniques d'épaisseur variable soumises à des efforts centrifuges. On traite le cas d'une variation linéaire d'épaisseur et on compare les résultats avec ceux de A.D. Kovalenko. An analytical study of axisymmetrical flexion of shell structures of revolution is possible, for instance, in the case of conical or spherical shells. Though certain special cases of variablethickness shells can also be solved by analysis, this normally requires the introduction of complex functions for which few or no numerical tables are available.

The bending of conical shells is approached by means of hypergeometrical functions if the thickness varies linearly [1 & 2]. An analytical solution is practically impossible, however, if the variation is non-linear.

The numerical method in this paper enables problems of axisymmetrical bending of varyingthickness shell structures of rotation to be solved [3]. It is applied in calculating stresses and strains of variable-thickness conical shells subjected to centrifugal loads. The case of a linear thickness variation is considered, and the results are compared with those obtained by A. D. Kovalenko.

I. — INTRODUCTION

Dans la première partie de cette étude, nous établissons les équations générales de la flexion des coques coniques d'épaisseur variable soumises à des champs de forces axisymétriques. Ces équations générales peuvent, comme on le sait, se ramener à un système de deux équations différentielles du second ordre. La résolution analytique de ces équations est complexe, mais possible dans le cas des coques coniques d'épaisseur linéairement variable; elle est en général impossible pour une coque d'épaisseur quelconque. Dans la deuxième partie, nous transformons

le système de deux équations différentielles en un système de deux équations intégrales de Fredholm. La résolution numérique est alors possible pour les coques coniques d'épaisseur quelconque.

Dans la troisième partie, nous appliquons cette

méthode au calcul des contraintes et des déformations des coques coniques d'épaisseur linéairement variable soumises au champ des forces centrifuges provoqué par la rotation de la coque autour de son axe. Nous comparons nos résultats avec ceux de A. D. Kovalenko pour trois séries de coques coniques.



F16. 1

2. - NOTATIONS ET CONVENTIONS DE SIGNES (Voir fig. 1)

- r: Rayon d'un parallèle;
- s: Longueur dé méridien ayant pour origine le sommet du cône;
- θ: Angle que fait le plan méridien considéré avec le plan méridien origine;
- β : Demi-angle au sommet du cône;
- e: Epaisseur du cône fonction de s;
- $h = e/e_0$: Epaisseur relative;
- v: Coefficient de Poisson;
- E : Module d'élasticité;

 $\mathbf{D} = [\mathbf{E}e^3/12 (1 - v^2)]$ rigidité de flexion; $D_0 = [Ee_0^3/12 (1 - v^2)]$ rigidité de flexion de référence; N : Effort normal agissant sur un élément unité de parallèle; n: Effort normal agissant sur un élément unité de méridien; M : Moment de flexion agissant sur un élément unité de parallèle; m : Moment de flexion agissant sur un élément unité de méridien; Q : Effort de cisaillement agissant sur un élément unité de parallèle; σ_s : Contrainte normale agissant sur un élément de parallèle défini par s; σ_{θ} : Contrainte normale agissant sur un élément de méridien défini par θ ; \mathbf{F}_t : Effort unitaire tangentiel, positif dans le sens des *s* croissants; F_n : Effort unitaire normal, positif s'il a même sens que la normale extérieure au point considéré; ε_s : Allongement relatif en un point du méridien de la surface moyenne; ε_{θ} : Allongement relatif d'un parallèle de la surface moyenne; ρ_s: Variation de courbure du méridien de la surface moyenne; ρ_{θ} : Variation de courbure du parallèle de la surface moyenne; v : Déplacement tangentiel, positif dans le sens des s croissants; w: Déplacement normal, positif s'il a même sens que la normale extérieure; y: Déformation angulaire, angle des tangentes au méridien avant et après déformation: z = sN; γ : Poids spécifique du matériau; g: Accélération de la pesanteur;

 ω : Vitesse de rotation du disque en radians/seconde.

3. — EQUATIONS DE BASE

3-1 Equations d'équilibre.

$$\frac{d}{ds}(sN) - n + sF_t = 0 \tag{3-1}$$

$$\frac{d}{ds} (s\mathbf{Q}) - n \cot \beta + s\mathbf{F}_n = 0 \qquad (3-2)$$

$$\frac{d}{ds} (s\mathbf{M}) - m - s\mathbf{Q} = \mathbf{0} \tag{3-3}$$

3-2 Relations entre les contraintes et les déformations.

$$s_s = \frac{dv}{ds} = \frac{1}{Ee} (N - vn)$$
 (3-4)

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{s} (w \operatorname{cotg} \beta + v) = \frac{1}{\operatorname{E} e} (n - v \operatorname{N}) (3-5)$$

et réciproquement :

$$N = \frac{Ee}{1 - v^2} \left(\varepsilon_s + v\varepsilon_\theta\right) \tag{3-6}$$

$$n = \frac{\mathrm{E}e}{1 - \mathrm{v}^2} \,\left(\varepsilon_\theta + \mathrm{v}\varepsilon_s \right) \tag{3-7}$$

Les variations de courbure s'expriment par :

$$\varphi_s = -\frac{dy}{ds} = \frac{12}{\mathrm{E}e^3} \left(\mathrm{M} - \mathrm{v}m\right) \qquad (3-8)$$

$$\varrho_{\theta} = -\frac{y}{s} = \frac{12}{Ee^3} (m - vM) \quad (3-9)$$

avec :

$$y = \frac{dw}{ds} \tag{3-10}$$

inversement :

$$\mathbf{M} = \mathbf{D} \left(\boldsymbol{\varrho}_s + \boldsymbol{\nu} \boldsymbol{\varrho}_{\theta} \right) \tag{3-11}$$

$$m = D \left(\varrho_{\theta} + \nu \varrho_{s} \right) \qquad (3-12)$$

ou encore :

$$\mathbf{M} = -\mathbf{D} \left(\frac{dy}{ds} + \mathbf{v} \frac{y}{s} \right) \qquad (3-13)$$

$$m = -D\left(\frac{y}{s} + v \frac{dy}{s}\right) \qquad (3-14)$$

3-3 Equations de base.

Après transformation des équations d'équilibre, compte tenu des relations entre les contraintes et les déformations, les équations de base se réduisent à :

$$sy'' + \left(1 + 3s\frac{e'}{e}\right)y' + \left(3v\frac{e'}{e} - \frac{1}{s}\right)y$$
$$= -\frac{z}{D}\operatorname{cotg}\beta - \frac{A}{D\sin^2\beta}$$
$$-\frac{1}{D}\int s\left(F_t \operatorname{cotg}\beta - F_n\right)ds \quad (3-15)$$

$$sz'' + \left(1 - s \frac{e'}{e}\right)z' + \left(\nu \frac{e'}{e} - 1\right)z$$

= Eey cotg $\beta - \frac{d}{ds}(s^2 F_t) + s\left(s \frac{e'}{e} - \nu\right)F_t$
(3-16)

Les efforts N et Q sont liés par la relation :

N — Q tg
$$\beta = -\frac{A+S}{s \sin \beta \cos \beta}$$
 (3-17)

La constante A dépend des conditions aux limites.

S se définit par :

$$S = \sin \beta \cos \beta \int s (F_t - F_n \operatorname{tg} \beta) \, ds \quad (3-18)$$

Les forces extérieures qui s'appliquent aux disques coniques en rotation s'expriment par :

$$F_{n} = \frac{\gamma}{g} \omega^{2} re \cos \beta$$

$$F_{t} = \frac{\gamma}{g} \omega^{2} re \sin \beta$$
(3-19)

ce qui entraîne, compte tenu de (3-17) et (3-18) :

 $\mathbf{A} = \mathbf{S} = \mathbf{0}$

4. — TRANSFORMATIONS DES ÉQUATIONS DE BASE

(4-1)

4-1 Première transformation.

Posons :

$$y = Y . f$$

$$= \mathbf{Z} \cdot \mathbf{g}$$

où :

$$f = \exp - \frac{1}{2} \int_{s_0}^{s} 3 \frac{h'}{h} ds = h^{-3/2}$$

$$g = \exp - \frac{1}{2} \int_{s_0}^{s} - \frac{h'}{h} ds = h^{1/2}$$
(4-2)

Les équations (3-15) et (3-16) deviennent :

z

$$L_{s}(Y) + I(s) Y = -\frac{Z \cot g \beta}{D_{0}h}$$
$$-\frac{Ah^{-3/2}}{D_{0} \sin^{2} \beta} - \frac{h^{-3/2}}{D_{0}} \int s (F_{t} \cot g \beta - F_{n}) ds$$
(4-3)

$$L/_{s}(Z) + J(s) Z = Ee_{0} \operatorname{cotg} \beta \frac{Y}{h}$$
$$- h^{-1/2} \frac{d}{ds} (s^{2} F_{t}) + h^{-1/2} s \left(\frac{h'}{h} s - v \right) F_{t}$$
(4-4)

où :

$$I(s) = -\frac{3}{2} \left[s \left(\frac{h'}{h} \right)' + \frac{3}{2} s \left(\frac{h'}{h} \right)^2 + (1 - 2v) \frac{h'}{h} \right]$$
(4-5)

$$J(s) = \frac{1}{2} \left[s\left(\frac{h'}{h}\right)' - \frac{1}{2} s\left(\frac{h'}{h}\right)^2 + (1+2v)\frac{h'}{h} \right]$$
(4-6)

L/s(.) représente l'opérateur.

$$L/_{s}(.) = \frac{d}{ds} \left[s \frac{d(.)}{ds} \right] - \frac{(.)}{s} \quad (4-7)$$

Les symboles ()' indiquent les dérivations par rapport à la variable s. Les équations (4-3) et (4-4) s'appliquent aux disques coniques ou tron-

49

coniques chargés axisymétriquement et dont l'épaisseur varie d'une façon quelconque.

4-2 Deuxième transformation.

Dans le cas d'un disque en rotation, libre sur ses deux bases, nous poserons de plus :

$$x = \frac{s}{s_0}$$

$$u = \frac{Z}{F}$$

$$v = \frac{Ee_0 s_0 \cot g \beta}{F} Y \qquad (4-8)$$

$$k = 12 (1 - v^2) \left(\frac{s_0}{e_0} \operatorname{cotg} \beta\right)^2$$
$$F = \frac{\gamma}{g} \omega^2 e_0 s_0 r_0^2$$

où s_0 et F sont respectivement une longueur et un effort de référence. Avec x, u et v, variables sans dimension, les équations (4-3) et (4-4) deviennent :

$$\mathbf{L}/_{x}(v) + \mathbf{I}(x) v = -k \frac{u}{h}$$
(4-9)

$$L/_{x}(u) + J(x) u = \frac{v}{h} - (3 + v) x^{2} h^{1/2} (4-10)$$

Les fonctions I, J et l'opérateur L(.) se rapportent tous à la variable x.

5. — CONDITIONS AUX LIMITES

Pour le cas de charge étudié, elles se réduisent à :

$$u = 0$$
, $M = 0$ pour $x = x_1$ et $x = x_2$ (5-1)

La condition de moment nul s'exprime, compte

$$\begin{split} \mathbf{M} = & -\frac{\mathbf{F}}{k \operatorname{tg} \beta} h^{3/2} \bigg[\frac{dv}{dx} + \left(\frac{v}{x} - \frac{3}{2} \frac{h'}{h} \right) v \bigg] = 0 \end{split} \tag{5-2} \end{split}$$
 pour $x = x_1$ et $x = x_2.$

tenu des transformations (4-1) et (4-8), par :

6. - RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS 4.9 et 4.10

6-1 Transformation en équations intégrales.

Les équations (4-9) et (4-10) s'écrivent sous forme d'équations intégrales de Fredholm :

$$v(x) = \int_{x_1}^{x_2} H(x, t) \left[k \frac{u(t)}{h(t)} + I(t) v(t) \right] dt$$
(6-1)
$$u(x) = \int_{x_1}^{x_2} K(x, t) \left[-\frac{v(t)}{h(t)} + J(t) u(t) \right] dt$$

$$+ (3 + v) \Phi(x) \quad (6-2)$$

avec :

$$\Phi(x) = \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{K}(x, t) t^2 h^{1/2}(t) dt$$
 (6-3)

H (x, t) et K (x, t) sont les noyaux relatifs à v et à u. Ils se déterminent facilement à l'aide des

solutions particulières de l'équation $L(\phi) = 0$ et des conditions aux limites.

On obtient ainsi :

$$\mathbf{H}(x,t) = \begin{cases} \frac{\left[x + (\mu_1/x)\right] \left[t + (\mu_2/t)\right]}{2(\mu_2 - \mu_1)} & x_1 \leq x \leq t \\ (6-4) \\ \frac{\left[x + (\mu_2/x)\right] \left[t + (\mu_1/t)\right]}{2(\mu_2 - \mu_1)} & t \leq x \leq x_2 \end{cases}$$

$$\mathbf{K}(x,t) = \begin{cases} \frac{\lceil x + (\varrho_1/x) \rceil \lceil t + (\varrho_2/t) \rceil}{2(\varrho_2 - \varrho_1)} & x_1 \leq x \leq t \\ \frac{\lceil x + (\varrho_2/x) \rceil \lceil t + (\varrho_1/t) \rceil}{2(\varrho_2 - \varrho_1)} & t \leq x \leq x_2 \end{cases}$$

Les solutions particulières de L (φ) = 0 étant de la forme $\varphi = ax + (b/x)$, les constantes ρ_1, ρ_2 , μ_1 , μ_2 s'expriment, pour le cas de charge envisagé, par :

$$\begin{split} \rho_{1} &= -x_{1}^{2} \qquad \rho_{2} = -x_{2}^{2} \\ \mu_{1} &= x_{1}^{2} \frac{1 + \nu - (3/2) x_{1} \left[h'(x_{1})/h(x_{1})\right]}{1 - \nu + (3/2) x_{1} \left[h'(x_{1})/h(x_{1})\right]} \\ \mu_{2} &= x_{2}^{2} \frac{1 + \nu - (3/2) x_{2} \left[h'(x_{2})/h(x_{2})\right]}{1 - \nu + (3/2) x_{2} \left[h'(x_{2})/h(x_{2})\right]} \end{split}$$
(6-6)

6-2 Résolution numérique.

Pour simplifier la résolution numérique du système d'équations (6-1) - (6-2), nous poserons.:

$$U = Ju - \frac{v}{h}$$

$$V = Iv + k \frac{u}{h}$$
(6-7)

ou inversement :

$$v = \frac{-(k/h) \mathrm{U} + \mathrm{JV}}{(k/h^2) + \mathrm{IJ}}$$

$$u = \frac{\mathrm{IU} + (\mathrm{V}/k)}{(k/h^2) + \mathrm{IJ}}$$
(6-8)

ce qui entraîne :

$$\frac{-(k/h) \text{ U} + \text{JV}}{(k/h^2) + \text{IJ}} = \int_{x_1}^{x_2} \text{ H}(x, t) \text{ V}(t) dt \quad (6-9)$$
$$\frac{\text{IU} + (\text{V}/h)}{(k/h^2) + \text{IJ}} \int_{x_1}^{x_2} \text{ K}(x, t) \text{ U}(t) dt + (3 + \nu) \Phi(x) \quad (6-10)$$

Nous choisirons n points équidistants sur la méridienne moyenne du cône, de longueur $x_n - x_1$, et remplacerons les intégrales par des sommes. En utilisant la méthode de Simpson, nous arrivons à un système de 2n équations linéaires :

$$\frac{-k (\mathbf{U}_{i}/h_{i}) + J_{i} \mathbf{V}_{i}}{(k/h_{i}^{2}) + \mathbf{I}_{i} \mathbf{J}_{i}} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{H}_{ij} \mathbf{V}_{j} \Delta_{j} \quad (6-11)$$

$$\frac{\mathbf{I}_{i} \mathbf{U}_{i} + (\mathbf{V}_{i}/h_{i})}{(k/h_{i}^{2}) + \mathbf{I}_{i} \mathbf{J}_{i}} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{K}_{ij} \mathbf{U}_{j} \Delta_{j} + (3+\nu) \Phi_{i} \quad (6-12)$$

...

où:

$$U_{i} = U(x_{i}) \qquad I_{i} = I(x_{i}) \text{ etc...}$$

$$H_{ij} = H(x_{i}, x_{j})$$

$$i = 1, 2 \dots n$$

$$\Delta_{j} = \frac{\eta_{j}}{3} \frac{x_{n} - x_{1}}{n - 1}$$

$$\eta_{j} = 1, 4, 2 \dots 4, 1$$

pour:

 $j = 1, 2, 3 \dots n - 1, n$

La résolution du système d'équations (6-11) et (6-12) donne n valeurs de U et de V. Les n valeurs correspondantes de u et de v se calculent à l'aide des formules (6-8).

7. — EXPRESSIONS DES EFFORTS, MOMENTS ET DÉFORMATIONS

7-1 Effort normal N.

D'après (4-1) et (4-8), il vient :

$$\mathbf{N} = \left(\frac{\gamma}{g} \omega^2 r_0^2\right) e_0 \frac{u}{x} h^{1/2}$$
(7-1)

et :

$$\sigma_{\rm N} = \frac{\rm N}{e} = \left(\frac{\gamma}{g} \omega^2 r_0^2\right) \frac{u}{x} h^{-1/2} \quad (7/2)$$

7-3 Effort normal n.

La condition d'équilibre (3-1) donne :

$$n = \frac{d}{ds} (sN) + sF_t$$

soit encore en posant :

$$K_{N}^{\omega} = \frac{u}{x} h^{-1/2}$$
(7-3)

$$\sigma_{\rm N} = \left(\frac{\gamma}{g} \ \omega^2 \ r_0{}^2\right) \, {\rm K}_{\rm N}{}^{\omega} \tag{7-4}$$

7-2 Cisaillement Q.

Il se définit par :
$$\mathbf{Q} = \mathbf{N} \cot \!\!\!\! \beta \qquad (7\text{-}5)$$

LA HOUILLE BLANCHE

......

d'où :

$$n = \left(\frac{\gamma}{g} \omega^2 r_0^2\right) e_0 h\left(h^{-1/2} \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} h^{-3/2} h' u + x^2\right)$$
(7-6)

$$\sigma_n = \frac{n}{e} = \left(\frac{\gamma}{g} \ \omega^2 r_0^2\right) \,\mathrm{K}_n^{\,\omega} \tag{7-7}$$

avec :

$$K_n^{\omega} = h^{-1/2} \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} h^{-3/2} h' u + x^2$$
(7-8)

7-4 Moment de flexion M.

$$\mathbf{M} = -\left(\frac{\gamma}{g} \omega^2 r_0^2\right) \frac{e_{\alpha} s_0}{k \, \mathrm{tg} \,\beta} h^{3/2} \left[\frac{dv}{dx} + \left(\frac{v}{x} - \frac{3}{2} \frac{h'}{h}\right) v\right]$$
(7-9)

$$\sigma_{\rm M} = \frac{6}{e^2} = \left(\frac{\gamma}{g} \omega^2 r_0^2\right) \, {\rm K}_{\rm M}^{\omega} \tag{7-10}$$

avec :

$$\mathbf{K}_{\mathrm{M}^{\omega}} = -\frac{6}{k} \left(\frac{s_0}{e_0} \operatorname{cotg} \beta \right) h^{-1/2} \left[\frac{dv}{dx} + \left(\frac{v}{x} - \frac{3}{2} \frac{h'}{h} \right) v \right]$$
(7-11)

7-5 Moment de flexion m.

$$m = -\left(\frac{\gamma}{g} \omega^2 r_0^2\right) \frac{e_0 s_0}{k \lg \beta} h^{3/2} \left[\nu \frac{dv}{dx} + \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{2} \nu \frac{h'}{h}\right) v \right]$$
(7-12)

$$\sigma_m = \frac{6 m}{e^2} = \left(\frac{\gamma}{g} \ \omega^2 r_0^2\right) \, \mathrm{K}_m^{\omega} \tag{7-13}$$

avec :

$$\mathbf{K}_{m}^{\omega} = \frac{6}{k} \left(\frac{s_0}{e_0} \operatorname{cotg} \beta \right) h^{-1/2} \left[\nu \frac{dv}{dx} + \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{2} \nu \frac{h'}{h} \right) v \right]$$
(7-14)

7-6 Déplacement normal w.

$$w = \left(\frac{\gamma}{g} \omega^2 r_0^2\right) \frac{s_0^2}{\mathrm{E}e_0} \mathrm{K}_w^{\omega} \tag{7-15}$$

avec :

$$K_w^{\omega} = \left(\frac{s_0}{e_0} \cos\beta\right)^{-1} \int_{x_1}^x v h^{-3/2} dx$$
 (7-16)

7-7 Déplacement tangentiel v.

Il se détermine à l'aide de :

$$w \cot \beta + v = \frac{s}{Ee} (n - v N)$$
(7-17)

lorsque w, n, N sont connus.

8. — CALCUL DES DÉRIVÉES (dv/dx) et (du/dx)

Dans les expressions des efforts et des moments interviennent les dérivées v' et u' qui se calculent aussi numériquement :

52

8-1 Calcul de v'.

L'équation (6-9) s'écrit aussi :

$$v(x) = \frac{1}{2(\mu_2 - \mu_1)} \left[\left(x + \frac{\mu_2}{x} \right) \int_{x_1}^x \left(t + \frac{\mu_1}{t} \right) V(t) dt + \left(x + \frac{\mu_1}{x} \right) \int_x^{x_2} \left(t + \frac{\mu_2}{t} \right) V(t) dt \right]$$
(8-1)

Multipliant les deux membres par x et dérivant, il vient :

$$v + xv' = \frac{x}{\mu_2 - \mu_1} \left[\int_{x_1}^x \left(t + \frac{\mu_1}{t} \right) V(t) dt + \int_x^{x_2} \left(t + \frac{\mu_2}{t} \right) V(t) dt \right]$$

ou encore :

$$v' = -\frac{v}{x} + \frac{1}{v_2 - v_1} \int_{x_1}^{x_2} \left(t + \frac{v_2}{t} \right) V(t) dt - \int_{x_1}^{x} \frac{V(t)}{t} dt$$

remarquant [voir (8-1)] que :

$$\frac{1}{\mu_{2} - \mu_{1}} \int_{x_{1}}^{x_{2}} \left(t + \frac{\mu_{2}}{t} \right) V(t) dt = \frac{2y_{1}}{x_{1} + (\mu_{1}/x_{1})}$$
$$v' = -\frac{v}{x} - \int_{x_{1}}^{x} \frac{V(t)}{t} dt + \frac{2y_{1}}{x_{1} + (\mu_{1}/x_{1})}$$
(8-2)

La connaissance des V_i permet de calculer par la méthode de Simpson l'intégrale $\int_{x_i}^x \frac{V(t)}{t} dt$ à borne supérieure variable x_i .

8-2 Calcul de u'.

(6-10) se met sous la forme :

$$u(x) = \frac{1}{2(\varrho_2 - \varrho_1)} \left[\left(x + \frac{\varrho_2}{x} \right) \int_{x_1}^x \left(t + \frac{\varrho_1}{t} \right) U(t) dt + \left(x + \frac{\varrho_1}{x} \right) \int_{x_1}^x \left(t + \frac{\varrho_2}{t} \right) U(t) dt \right] + (3 + \nu) \Phi(x)$$
(8-3)

Comme précédemment, après multiplication par x et dérivation, on obtient :

$$u + xu' = \frac{x}{\varrho_2 - \varrho_1} \left[\int_{x_1}^x \left(t + \frac{\varrho_1}{t} \right) \mathbf{U}(t) \, dt + \int_x^{x_2} \left(t + \frac{\varrho_2}{t} \right) \mathbf{U}(t) \, dt \right] + (3 + v) \left[x \Phi(x) \right]'$$

d'où :

$$u' = -\frac{u}{x} + \frac{1}{\varrho_2 - \varrho_1} \int_{x_1}^{x_2} \left(t + \frac{\varrho_2}{t} \right) U(t) dt - \int_{x_1}^x \frac{U(t)}{t} dt + (3 + v) \frac{[x \Phi(x)]'}{x}$$
(8-4)

Les intégrales figurant dans (8-4) se calculent numériquement, connaissant les valeurs U_i.

9. - APPLICATION : CONE D'ÉPAISSEUR LINÉAIREMENT VARIABLE

Pour les disques d'épaisseur linéairement variable en rotation, les diverses fonctions définies aux chapitres précédents s'écrivent :

$$h = 1 - x$$

$$h' = -1$$

$$I(x) = \frac{3}{4(1 - x)^2} [x (4y - 3) + 2 - 4y]$$

LA HOUILLE BLANCHE

$$J(x) = -\frac{1}{4(1-x)^2} [x(1-4v) + 2 + 4v]$$

$$\Phi(x) = \frac{4}{315x} \left\{ \frac{1}{\varphi_2 - \varphi_1} [(\varphi_2 + x^2) G(x_1) - (\varphi_1 + x^2) G(x_n)] - G(x) \right\}$$

avec :

G (x) =
$$(1 - x)^{5/2}$$
 (7 $x^2 + 10 x + 4$)
 $x_1 = \frac{s_1}{s_0}$, $x_n = \frac{s_2}{s_0}$

Les coefficients d'influence définis au paragraphe 7 s'expriment par :

$$\begin{split} \mathbf{K}_{\mathbf{N}^{\omega}} &= \frac{u}{x (1-x)^{1/2}} \\ \mathbf{K}_{\mathbf{n}^{\omega}} &= \frac{u'}{(1-x)^{1/2}} - \frac{u}{2 x (1-x)^{1/2}} + x^2 \end{split}$$

où :

$$\begin{split} u' &= -\frac{u}{x} + \frac{1}{\rho_2 - \rho_1} \int_{x_1}^{x_2} \left(t + \frac{\rho^2}{t} \right) U(t) \, dt - \int_{x_1}^{x} \frac{U(t)}{t} \, dt \\ &- \frac{8 \left(3 + \nu \right)}{315} \frac{G(x_n) - G(x_1)}{\rho_2 - \rho_1} + \frac{2 \left(3 + \nu \right)}{15} \left(1 - x \right)^{3/2} \left(3 x + 2 \right) \\ & K_{M}^{\omega} &= -\frac{6}{k \left(1 - x \right)^{1/2}} \left(\frac{s_0}{e_0} \cot g \beta \right) \left[v' + \left(\frac{v}{x} + \frac{3}{2} \frac{1}{1 - x} \right) v \right] \\ & K_{m}^{\omega} &= -\frac{6}{k \left(1 - x \right)^{1/2}} \left(\frac{s_0}{e_0} \cot g \beta \right) \left[v v' + \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{2} \frac{v}{1 - x} \right) v \right] \\ & \text{et} \\ & v' &= -\frac{v}{x} + \frac{2 y_1}{x_1 + (\mu_1/x_1)} - \int_{x_1}^{x} \frac{V(t)}{t} \, dt \end{split}$$

$$V = x + x_1 + (\mu_1/x_1) \quad \int_{x_1} t$$
$$K_{w^{\omega}} = \left(\frac{s_0}{e_0} \operatorname{cotg} \beta\right)^{-1} \int_{x_1}^x v (1-x)^{-3/2} dx$$

Le paramètre $(s_0/e_0) \cos \beta$ et les valeurs x_1 et x_n définissent la coque. Nous donnons quelques résultats correspondant à un choix de 11 points équidistants et se rapportant aux caractéristiques suivantes :

$$\nu = 0.3$$

$$x_1 = 0.2$$

$$x_n = 0.9$$

$$\frac{s_0}{e_0} \operatorname{cotg} \beta = \frac{5}{9}, \quad \frac{10}{9} \text{ et } \frac{20}{9}$$

Pour:

$$(s_0/e_0) \cot \beta = (20/9),$$

la courbe $K_n^{\omega} - - K_m^{\omega}$ s'écartant légèrement de

celle donnée par A. D. Kovalenko, nous avons refait le calcul avec 17 points. La nouvelle courbe obtenue est confondue avec la première. D'autre part, le coefficient K_w^{ω} pour la même valeur :

$$(s_0/e_0) \operatorname{cotg} \beta = (20/9)$$

est confondu avec celui donné par Kovalenko.

Le tableau I et les courbes 1 se rapportent au cas 5/9.

Le tableau II et les courbes 2 se rapportent au cas 10/9.

Le tableau III et les courbes 3 se rapportent au cas 20/9.

TABLEAU I

$$\frac{s_0}{e_0} \cot \beta = 5/9$$

x	K _N ω	Κ"ω	Кмю	$\mathrm{K}_m\omega$	$\mathbf{K}_{w}\omega$
0,20	0	0,3159198	0	0,4173260	0
$\boxed{\begin{array}{c} 0,27\ldots\ldots\\ 0,34\ldots\ldots\end{array}}$	0,0620635	0,2711191	0,0892372	0,2973372 0,2353908	0,0141
0,41	0,1027092	0,2413040	0,1294809		0,0440
0,48	0,1065843	0,2336440	0,1256304		0,0597
0,55	0,1019347	0,2308095	0,1153039	0,1416012	0,0775
0,62	0,0939435	0,2242891			0,0963
0,69	0,0791625	0,2214555	0,0774152		0,1171
0,76	0,0615024	0,2116274	0,0507763	0,0666573	0,1392
0,83	0,0353903	0,2066026	0,0196069	0,0406675	0,1626
0,90	0	0,1793518	0	0,0186878	0,1864

COURBES 1



Contrainte tangentielle	$\sigma_{\mathbf{s}} = [(\gamma/g)\omega^2 r_0^2](\mathbf{K}_{\mathrm{N}}^{\omega} - \mathbf{K}_{\mathrm{M}}^{\omega})$
Contrainte longitudinale	$\sigma_{\theta} = [(\gamma/g)\omega^2 r_0^2](\mathbf{K}_n^{\omega} - \mathbf{K}_m^{\omega})$
Déplacement normal	$w = [(\gamma/g)\omega^2 r_0^2](s_0^2/\mathrm{E}e_0)\mathrm{K}_w\omega$
Calcul numé	érique avec 11 points
Séries hyper	géométriques (Kovalenko)

TABLEAU II

$\frac{s_0}{e_0} \operatorname{cotg} \beta = 10/9$

x	K _N ω	Knw	$K_M \omega$	$K_m \omega$	$\mathbf{K}_{w}\omega$
0,20	0	0,1583373	0	0,5397614	0,0183
0,27	0,0299083	0,1980172	0,1194634		0,0369
0,34	0,0536181	0,2178848	0,1668081	0,3091733	0,0572
0,41	0,0637431	0,2414132			0,0778
0,48	0,0712174	0,2559745	- 0,1812823		0,1015
0,55	0,0702730	0,2754760	0,1672635		0,1015
0,62	0,0677069	0,2870310		0,1613203	0,1269
0,69	0,0580516	0,3041433		0,1293259	0,1554
0,76	0,0466289	0,3111067		0,0945482	0,1859
0,83	0,0269375	0,3247879		- 0,0563865	0,2192
0,90	0	0,3134405	0		0,2517



COURBES 2

TABLEAU III

$$\frac{s_0}{e_0} \cos\beta = 20/9$$

x:	K _N ω	$\mathbf{K}_{n}\omega$	$\mathrm{K}_{\mathrm{M}}\omega$	$\mathrm{K}_m\omega$	Κωω
0,20	0	0,0000266	0	0,4177120	0
0,27	0,0029614	0,1188704	0,1040046	0,3020179	0,0141
0,34	0,0132236	0,1781490		-0,2526186	0,0287
0,41	0,0210855	0,2335668	0,1801729	0,2233396	0,0449
0,48	0,0311369	0,2723253	- 0,1923432		0,0620
0,55	0,0332028	0,3188632			0,0824
0,62	0,0360485	0,3543967			0,1050
0,69	0,0317716	0,4000762		0,1263896	0,1312
0,76	0,0276885	0,4329304	0,0925821		0,1601
0,83	0,0158585	0,4762716			0,1917
0,90	0	0,4907477	0		0,2243





COURBES 3

Contrainte t	angentielle	$\sigma_{\it s} =$	[(γ/	$g)\omega^2 r_0$	$^{2}](K$	ν ^ω	$\mathrm{K}_{\mathrm{M}}^{\omega})$
Contrainte 1	ongitudinale	$\sigma_{\theta} =$	[(y/	$g)\omega^2 r_0$	²](K		\mathbf{K}_m^{ω})
Déplacement	. normal	$w \equiv$	[(γ/	$g)\omega^2 r_0$	$[s_{0}^{2}](s_{0})$	$_{0}^{2}/\mathrm{E}e_{0}$	₀)Κ _w ω
	Calcul numén	rique	(. × }	avec avec	11 p 17 pc	oints oints	
	Séries hyperg	éomé	triqu	es (Ko	vale	nko)	

10. — CONCLUSION

La transformation des équations générales de la flexion axisymétrique des coques en un système d'équations intégrales de Fredohlm permet de résoudre analytiquement certains problèmes. La résolution numérique du système d'équations intégrales, beaucoup plus générale, s'applique aux coques d'épaisseur variable dont l'étude analytique est en général inextricable.

Notre étude montre qu'on obtient une bonne précision à partir d'un nombre de points relativement faible. Les résultats de A.D. Kovalenko sont très voisins des nôtres; les faibles écarts constatés peuvent ètre dus :

- pour la résolution analytique, à une imprécision du calcul des séries hypergéométriques; l'auteur précise en effet qu'il ne considère que 25 à 30 termes dans le cas où la convergence est faible:
- -- pour la résolution numérique, au nombre de points limité.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] K.E. BISSHOPP. Lateral bending of symmetrically loaded conical discs. Quaterly of applied Mathematics, octobre 1944, vol. II, nº 3, p. 205.
- [2] A. D. KOVALENKO. Plaques et enveloppes dans les rotors de turbomachines, Edition de l'Académie des

Sciences de la R.S.S. de l'Ukraine, Kiev, 1955, p. 222-257.

[3] S.X. CASACCI. - Etude de la flexion des coques de révolution chargées axisymétriquement. Revue Travaux, novembre-décembre 1959.

NOTRE FRONTISPICE

(Cf. page 2)

FOURIER (Jean-Baptiste, Joseph, baron) (1768-1830)

FOURIER (Jean-Baptiste, Joseph, baron) (1/08-1830) Beaucoup parmi ceux qui entendent prononcer le nom de Fourier se représentent celui qui fut un des plus grands géo-mètres du XIX[®] siècle comme un mathématicien hirsute blanchis-sant un tableau noir avec les interminables « séries » qui portent son nom et qui ont rendu tant de services dans les recherches en physique mathématique. Bien peu, sans doute, connaissent le singulier éclectisme dont sa carrière fut marquée et qui fit de lui successivement un religieux novice, un professeur, un égyptologue, un haut fone-tionnaire de l'Administration politique et enfin un membre de l'Institut de France, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences et membre de l'Académie Française. Jean-Baptiste Fourier était né à Avxerre le 21 mars 1768. L'achèvement de ses études le vit entrer comme novice à l'abbaye de Saint-Benoit-sur-Loire qu'il quitta à la fin de 1789 pour aller lire devant l'Académie des Sciences son premier mémoire, trai-tant de la résolution des équations numériques. Nommé professeur lors de la fondation de l'Ecole Normale, il fut chargé du cours d'analyse à l'Ecole Polytechnique après la création de cette école.

fut chargé du cours d'analyse à l'École Polytechnique après la création de cette école. L'année 1798 le vit suivre Monge et Berthollet en Egypte, où, devenu membre de l'Institut d'Egypte dès sa création, puis secrétaire perpétuel, il publia un grand nombre de mémoires concernant ce pays. Son retour en France fut suivi de sa nomi-nation comme préfet de l'Isère, poste où il demeura durant les années 1802 à 1815, au cours desquelles il consacra ses loisirs d'administrateur à écrire son grand et bel ouvrage sur la *Théorie analytique de la chaleur* (1812) que couronna l'Académie des Sciences, puis divers mémoires sur la statistique, sur la théorie du mouvement de la chaleur, sur la résolution générale des équations algébriques. Il mourut d'une chute, à Paris, le 16 mai 1830. En 1831 eut lieu la publication posthume de son Analyse des équations déter-minées.

minées.

Baron Jean-Baptiste Joseph FOURIER (1768-1830)

To many, the name of Fourier, one of the greatest mathemati-cians of the 19th Century, conjures up a picture of a hirsute mathematician standing before a black-board and covering it with the interminable "series" bearing his name, which have since been such a valuable asset in mathematical physics research. liowever, only few people are probably aware of the rare eclecticism which marked Fourier's career, as a result of which here successingly, a reliajous nucce, a brofessor an earblo

liouver, only few people are probably aware of the rare celecticism which marked Fourier's career, as a result of which he was, successively, a religious novice, a professor, an egyptologist, a high political administration official and, finally the permanent secretary of the Academy of Science and a Member of the Institut de France and the Académie Française. Jean-Baptiste Fourier was born at Auxerre on the 21st March 1768. On completing his studies, he entered the Abbey at Saint-Benoitsur-Loire as a novice, which he left in 1789 to read his first paper—on the solution of numerical equations—before the Academy of Science and, when the Ecole Polytechnique was created, was made responsible for its course on analysis. In 1798, he followed Monge and Berthollet to Egypt, where he became a Member of the Institut d'Egypte on the day of its foundation. He subsequently became its permanent, excretary, aduring which period he published a large number of articles about Egypt. In 1802, shortly after his return to France, he was apointed Prefect of the Isser Department, apost he was to hold until 1815. His remarkable work on the Theoretical analysis of heat—which was awarded a distinction by the Academy of Science—was utiten during his leisure hours as an administrator, followed by a number of papers on statistics, the theory of heat movement, and the general solution of algebraic equations.