Rabatement d'une nappe à surface libre exploitée par puits ou tranchées

Lowering of an unconfined aquifer by wells or trenches

PAR E. DE CAZENOVE

INGÉNIEUR A LA SOCIÉTÉ SOLÉTANCHE, PARIS

Les formules classiques de Dupuit donnent des indications fausses sur les niveaux d'eau au voisinage des puits ou tranchées exploitant une nappe non captive. Les niveaux, qui dépendent de nombreuses variables, doivent être déterminés par des calculs d'approximations successives. Les cas traités avec précision sont encore peu nombreux.

En s'appuyant sur un seul résultat supplémentaire, obtenu par un calcul de relaxation, on fait ici des extrapolations suffisamment précises pour tous les cas qui se rencontrent en pratique.

L'écart entre les niveaux réels et les niveaux calculés par les formules classiques de Dupuit dépend du degré d'anisotropie du terrain. Cet écart est parfois important pour l'étude des essais de pompage et très souvent pour l'étude des rabattements de nappe.

The conventional Dupuit's formulae give wrong information as regards water levels in the vicinity of wells or trenches draining an unconfined aquifer. As levels are depending on several variables, they must be determined by successive approximative computations. There are still very few cases solved with precision.

One only additional result, obtained by relaxation computation, gives enough accurate extrapolations applicable to any practice case.

The difference between the effective levels and the levels computed with the conventional Dupuit's formulae varies with the degree of anisotropy. Such difference is sometimes of great importance when studying pumping tests and very often important when studying water table lowering.

NOTATIONS

K (LT^{-1}) : perméabilité pour les terrains isotropes;

K_h et K_v (LT^{-1}) : perméabilité dans le sens horizontal et dans le sens vertical pour les terrains anisotropes;

Q ($L^3 T^{-1}$) : débit du puits;

q ($L^2 T^{-1}$) : débit de la tranchée par unité de longueur.

Les autres notations sont définies par les figures 1 et 2.

FIG. 1

FIG. 2

INTRODUCTION

On suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

- Terrain perméable homogène (mais pas nécessairement isotrope); écoulement de l'eau en régime laminaire; hauteur d'ascension capillaire négligeable;
- Nappe non captive circulant sur un fond étanche horizontal. Hauteur d'eau H fixée à la distance D de la tranchée ou à la distance R (« rayon d'action ») de l'axe du puits;
- Exploitation en régime stabilisé par tranchée ou puits descendant jusqu'au fond étanche.

Dans ces conditions, le débit *exact* est donné par les formules classiques de Dupuit [1] :

— pour la tranchée :

$$q = K_h \cdot \frac{H^2 - h^2}{2 \cdot D} \quad (1)$$

— pour le puits :

$$Q = \pi \cdot K_h \cdot \frac{H^2 - h^2}{\ln R/r} \quad (2)$$

Ces formules ont été proposées en 1863 par Dupuit pour les terrains isotropes; elles résultaient alors d'un calcul approché; de nombreux chercheurs ont cru longtemps qu'elles donnaient les débits avec 5 % d'erreur, ou même 50 %. La démonstration rigoureuse a été donnée en 1951 par Tcharnyi [2] pour les terrains isotropes, puis étendue au cas des terrains anisotropes. Brillant [3] a montré que K_v pouvait même être variable d'une manière quelconque dans le terrain : le débit est fonction de K_h uniquement.

La « démonstration » de Dupuit conduit aux équations suivantes pour la surface libre de la nappe :

— pour la tranchée :

$$y^2 = h^2 + \frac{2 \cdot q \cdot x}{K_h} = h^2 + (H^2 - h^2) \cdot \frac{x}{D} \quad (3)$$

— pour le puits :

$$y^2 = h^2 + \frac{Q \cdot \ln x/r}{\pi \cdot K_h} = h^2 + \frac{(H^2 - h^2) \cdot \ln x/r}{\ln R/r} \quad (4)$$

La hauteur d'eau Z dans le terrain à la paroi de la tranchée ($x = 0$) ou du puits ($x = r$) serait donc égale à la hauteur d'eau h dans la tranchée ou le puits.

En fait, la démonstration de Dupuit est valable seulement lorsque K_v est infini, cas purement fictif : les terrains où K_v est supérieur à K_h sont même extrêmement rares.

Par contre, K_v est nul pour les terrains constitués par des couches perméables séparées par de multiples petites couches imperméables horizontales; dans ce cas, le terrain reste saturé sur toute la hauteur H :

$$y = Z = H$$

Pour tous les autres cas, il n'existe aucune formule rigoureuse donnant l'équation de la surface libre de la nappe : on peut seulement prouver que y et Z croissent des valeurs données par Dupuit à H lorsque le rapport K_h/K_v croît de zéro à l'infini.

Pour déterminer le tracé de la surface libre, on doit finalement avoir recours à des essais sur modèle hydraulique ou électrique, peu précis, ou à des calculs d'approximations successives, extrêmement longs : nous utiliserons les résultats précis publiés par Chapman [4] pour l'écoulement plan (vers une tranchée) et par Boulton [5] pour quatre cas d'écoulement radial (vers un puits).

Nous avons fait les calculs d'approximations successives par « relaxation » (voir par exemple référence [10]) pour un cas supplémentaire d'écoulement plan; et tous les cas d'écoulement plan sont des cas-limite d'écoulement radial.

En extrapolant l'ensemble de ces résultats, nous obtiendrons des données assez précises pour tous les cas qui peuvent se présenter en pratique.

Nous présenterons d'abord les résultats obtenus (qui seront justifiés à l'annexe I), puis quelques applications.

ÉCOULEMENT PLAN

La hauteur d'eau Z dans le terrain à la paroi de la tranchée se déduit de la figure 3, tracée d'après les résultats de Chapman.

Voici la valeur de Z pour h nul et pour $(D/H) \cdot \sqrt{(K_v/K_h)}$ supérieur à 1,2 :

$$Z = 0,75 \cdot \frac{H^2}{2 \cdot D} \cdot \sqrt{\frac{K_h}{K_v}} = 0,75 \cdot \frac{q}{\sqrt{K_h \cdot K_v}} \quad (5)$$

Toutes choses égales d'ailleurs, Z varie ici comme $\sqrt{K_h/K_v}$.

Cette équation (5) est « empirique » ; le coef-

ficient 0,75, résultant de calculs approchés, est précis à 3 % près.

Pour tracer la surface libre, on dessine d'abord la parabole qui passe par les points $(0 ; Z)$ et $(D ; H)$:

$$y^2 = Z^2 + (H^2 - Z^2) \cdot \frac{x}{D} \quad (6)$$

La méridienne réelle est un tout petit peu au-dessus de cette courbe ; on démontre en effet qu'elle a une tangente verticale au point $(0 ; Z)$ (point singulier à rayon de courbure nul) et une tangente horizontale au point $(D ; H)$.

FIG. 3

ÉCOULEMENT RADIAL

Ici Z se déduit de la figure 4, valable en tout cas lorsque R est supérieur à : $r + 3 \cdot H \cdot \sqrt{K_h/K_v}$, cas le plus fréquent.

La courbe correspondant à $(h = 0)$ sur ce graphique se traduit par l'équation suivante :

$$Z^2 = \frac{Q}{\pi \cdot K_h} \cdot \ln \left[1 + \frac{Z/r \cdot \sqrt{K_h/K_v}}{2,667 + 0,219 \cdot \ln(1 + 5 \cdot Z/r \cdot \sqrt{K_h/K_v})} \right] \quad (7)$$

FIG. 4

C'est aussi une équation empirique, à trois coefficients (2,667; 0,219 et 5) parce qu'elle a été obtenue par l'extrapolation de trois résultats de calculs d'approximations successives.

Z varie ici comme $\sqrt{K_h/K_v}$ si $Q/K_v \cdot r^2$ est petit, beaucoup moins vite si $Q/K_v \cdot r^2$ est grand, par exemple comme $(K_h/K_v)^{0,25}$ lorsque $Q/K_v \cdot r^2$ est égal à 60.

Cette équation (7) est encore certainement valable avec une précision suffisante pour $Q/K_v \cdot r^2$ égal à 200 000.

Il n'y a pas de formule analytique simple qui donne la surface libre avec une précision acceptable et on doit opérer graphiquement en utilisant la figure 5 :

- Si h est nul, on calcule $Q/K_v \cdot r^2$; cela permet de placer deux points : un sur l'échelle de gauche pour la valeur de Z (à calculer avec l'équation (7), pour plus de précision), et un sur la courbe ABC. La méridienne doit être tracée au jugé d'après l'allure des courbes déjà connues (courbes 3, 4 et 5).
- Si h n'est pas nul, il faut d'abord calculer le rayon f du puits qui, totalement exploité

($h = 0$), donnerait le même débit. On utilise la formule (2) qui donne :

$$\frac{H^2 - h^2}{\ln R/r} = \frac{H^2}{\ln R/f} = \frac{h^2}{\ln r/f} \quad (8)$$

On calcule ensuite $Q/K_v \cdot f^2$ et on trace la méridienne correspondante. La méridienne cherchée est un peu en dessous et on en connaît déjà le point de coordonnées ($r; Z$) qui se déduit de la figure 4 : on obtient ainsi un tracé suffisamment précis en pratique.

Cas particulier.

Si R est nettement inférieur à la limite indiquée plus haut, soit :

$$r + 3.H. \sqrt{\frac{K_h}{K_v}}$$

les figures 4 et 5 et la formule (7) ne sont généralement plus valables.

Ce cas a été étudié seulement pour les puits totalement exploités (h nul) : la valeur de Z est alors donnée par la figure 6, valable quel que soit R .

POTENTIELS

Les potentiels réels sont évidemment supérieurs à ceux donnés par les formules de Dupuit (formules 3 et 4) le long des méridiennes données par ces formules et au-dessus. On peut aussi démontrer que les potentiels réels sont inférieurs

aux potentiels de Dupuit près du fond étanche. Soit y l'ordonnée de la courbe de Dupuit et y_1 l'ordonnée des points où les potentiels réels sont égaux aux potentiels de Dupuit.

J. Brillant a démontré (travail inédit) que y_1

FIG. 5

FIG. 6

tend vers $y/\sqrt{3}$ lorsque x tend vers l'infini (en restant très inférieur à R , supposé infini). A en juger par les meilleurs exemples calculés par relaxation, il est même possible qu'on ait toujours pour les terrains isotropes :

$$y_1 = y/\sqrt{3} \quad (9)$$

Les écarts entre les potentiels réels et les potentiels de Dupuit deviennent très faibles à grande distance de la paroi. Ainsi, soit en écoulement plan, le point $(X; Y)$ sur la courbe de Dupuit tel que :

$$X = 3.Y.\sqrt{K_h/K_v}$$

En ce point, la hauteur d'eau réelle est $(1,01.Y)$.

De même, soit en écoulement radial le point (X, Y) sur la méridienne de Dupuit tel que :

$$X = r + 3.Y.\sqrt{K_h/K_v}$$

En ce point, la hauteur d'eau réelle est inférieure à $(1,01.Y)$, et d'autant plus voisine de Y que $Q/K_v.r^2$ est plus grand.

TERRAINS RÉELS

Les terrains perméables sont le plus souvent fortement anisotropes :

— Les *alluvions grossières* sont souvent constituées de couches de galets et graviers dont tous les interstices sont remplis de sable, alternant avec des couches de galets et graviers sans sable, beaucoup plus perméables.

Voici, par exemple, un schéma rendant compte des propriétés moyennes des alluvions du Rhin en Alsace, étudiées par Cambefort [6] : tout se passe comme s'il y avait :

- 95 % de couches sableuses, de perméabilité 2.10^{-4} m/s,
- et 5 % de couches sans sable, de perméabilité $2\,000.10^{-4}$ m/s.

Ceci donne les perméabilités moyennes suivantes :

$$K_h = 0,95.2.10^{-4} \text{ m/s} \\ + 0,05.2\,000.10^{-4} \text{ m/s} = 102.10^{-4} \text{ m/s}$$

$$\frac{1}{K_v} = \frac{0,95}{2.10^{-4} \text{ m/s}} + \frac{0,05}{2\,000.10^{-4} \text{ m/s}},$$

d'où :

$$K_v = 2,1.10^{-4} \text{ m/s}$$

Finalement :

$$K_h/K_v = 49 \text{ et } \sqrt{K_h/K_v} = 7$$

— Les *alluvions fines* sont souvent constituées par des alternances de sable propre et de sable argileux cent ou dix mille fois moins perméable. D'où un rapport K_h/K_v parfois très grand.

— Seuls, les *sables de dune propres* et certains *grès sédimentaires* sont parfois presque isotropes.

Toutes les formules théoriques supposent que le terrain est homogène et naturellement aucun terrain n'est parfaitement homogène; cependant, les essais donnent souvent des résultats cohérents, ce qui s'explique de la manière suivante :

- les débits ne dépendent que de K_h , qui est souvent assez peu variable à l'échelle des puits ou tranchées d'exploitation;
- les niveaux de la nappe rabattue ne dépendent que du rapport K_h/K_v , beaucoup plus variable, surtout lorsqu'il est élevé, mais on a vu que Z variait au plus comme la racine carrée de ce rapport, et beaucoup moins vite lorsque $Q/K_v.r^2$ est élevé, soit précisément lorsque K_h/K_v est élevé.

APPLICATIONS PRATIQUES

L'écart entre les méridiennes de Dupuit et les niveaux réels, toujours important près de la paroi de la tranchée ou du puits, comme on peut le voir sur les figures 1 et 2 (dessinées à l'échelle pour un terrain isotrope), est encore notable à la distance de $H.\sqrt{K_h/K_v}$, et ne devient très faible qu'à une distance de l'ordre de :

$$3.H.\sqrt{K_h/K_v}$$

Voici quelques cas où cet écart doit être pris en considération :

Equipement de puits filtrants.

Il faut mettre un tubage filtrant sur toute la hauteur Z sur laquelle l'eau peut arriver au forage, si on veut que ce tubage ne provoque pas de pertes de charge parasites.

Essais de pompage.

Si on cherche à préciser seulement les débits exploitables, donc K_h , les piézomètres proches du puits doivent être crépinés seulement vers le niveau où le potentiel est le même que d'après les formules de Dupuit.

Si on étudie aussi K_v , il faut placer en plus des piézomètres arrêtés peu en dessous de la surface de la nappe rabattue.

Rabattements de nappe.

Il est ici évidemment essentiel d'étudier les niveaux réels.

Les graphiques et les formules donnés plus haut ne sont valables que pour les puits isolés. La méthode proposée pour l'étude des rabattements de nappe avec plusieurs puits est donnée à l'annexe II.

CONCLUSIONS

Les débits exacts des puits ou tranchées exploitant une nappe non captive sont donnés par les formules de Dupuit. Par contre, les hauteurs d'eau dans le terrain ne sont à peu près celles indiquées par les formules de Dupuit qu'à une distance de la paroi filtrante de l'ordre de :

$$3.H.\sqrt{\frac{K_h}{K_v}}$$

Plus près de la paroi filtrante, les hauteurs d'eau sont bien supérieures à celles indiquées par les formules de Dupuit. Les méridiennes réelles ont été obtenues par divers auteurs pour un certain nombre de cas particuliers; les extrapolations faites ici à partir de ces cas particuliers permettent de tracer la méridienne avec une précision acceptable dans tous les cas qui se rencontrent en pratique.

ANNEXE I

EXTRAPOLATION DES RÉSULTATS FOURNIS PAR LES CALCULS D'APPROXIMATIONS SUCCESSIVES

Tous les calculs seront présentés ici pour le cas du terrain isotrope. Si le terrain est anisotrope, il faut remplacer partout :

— q, Q, H, h, y, Z par $q.\sqrt{K_h/K_v}$,
 $Q.\sqrt{K_h/K_v}, H.\sqrt{K_h/K_v}$, etc.,
 — et K par $\sqrt{K_h.K_v}$.

ÉCOULEMENT PLAN

En coordonnées homogènes, Z/H est fonction de D/H et h/H . L'étude de l'écoulement classique de De Vos [7] fournit déjà une valeur par excès de Z/H :

$$\frac{Z}{H} < \sqrt{\frac{h^2}{H^2} + \frac{(H^2 - h^2)^2}{4.D^2.H^2}}$$

Par des études analytiques, on peut préciser la forme de Z/H dans deux cas :

— Pour h nul et D/H tendant vers l'infini, Z/H tend vers $a.H/2.D$; le coefficient a est inférieur à 1 (ceci résulte de l'inégalité ci-dessus) et supérieur à $2/\pi = 0,63$ (ceci résulte de l'étude d'un calcul approché de Jaeger — référence [8]).

— Lorsque D/H tend vers zéro, Z/H tend vers $(1 - b.D/H)$; le coefficient b , indépendant de h/H , est inférieur à 1.

Nous avons étudié le premier cas par les calculs d'approximations successives dits de « relaxation ». Les résultats sont donnés par les figures 7 et 8; les calculs ont été faits partout avec une décimale de plus que ce qui est indiqué sur la figure 7, et une maille jusqu'à huit fois plus fine. Le coefficient a cherché est égal à 0,75, à $\pm 3\%$ près : d'où la formule (5) déjà citée :

$$Z = 0,75 \cdot \frac{H^2}{2 \cdot D} = 0,75 \cdot \frac{q}{K} \quad (5)$$

L'ordonnée de la méridienne réelle est :

— de 10 % supérieure à celle de Dupuit pour $x = 1,6 \cdot (q/K)$;

— de 1 % supérieure à celle de Dupuit pour $x = 17 \cdot (q/K)$.

Pour tous les autres cas, nous nous sommes bornés à reproduire les résultats de Chapman (fig. 3), qui ont été obtenus par des calculs d'approximations successives à partir de formules analytiques de Muskat (voir référence [4]) :

— ces résultats confirment que le coefficient a est voisin de 0,75. La formule (5) est même déjà applicable avec une bonne approximation dès que D/H est supérieur à 1,2;

— le coefficient b paraît voisin de 0,8; il n'a pas été spécialement déterminé par Chapman.

FIG. 7

FIG. 8

ÉCOULEMENT RADIAL

En coordonnées homogènes, Z/r est fonction de trois grandeurs, par exemple H/r , h/r et R/r .

On étudiera successivement des domaines de plus en plus étendus :

1° h nul et R/H très grand; *a priori*, si R/H tend vers l'infini de telle manière que le débit reste constant, Z/r tend vers une limite fonction de ce seul débit, soit, en coordonnées homogènes, $Q/K.r^2$ (ou : $H^2/r^2 \cdot \text{Log } R/r$).

2° h non nul, R/H encore très grand.

3° R/H quelconque : ce problème ne sera étudié que pour h nul.

Premier problème :

$h = 0$; R/H très grand. Nous utiliserons seulement trois exemples, tous obtenus par calculs de relaxation :

— Exemple 3 de Boulton [5] :

$$R/r = 52; H/r = 35,6.$$

D'où, avec la formule 2 :

$$Q/Kr^2 = 1\,008;$$

Boulton a trouvé :

$$Z/r = 25,765.$$

— Exemple 4 de Boulton :

$$R/r = 16; H/r = 4.$$

$$\text{D'où : } Q/K.r^2 = 18,15;$$

Boulton a trouvé :

$$Z/r = 1,5.$$

— Enfin, si R et r tendent vers l'infini, la différence $(R - r)$ restant fixe et égale à D , l'écoulement se fait entre deux cylindres coaxiaux de périmètres $2.\pi.r$ et $2.\pi.R$ infiniment voisins en valeur relative; c'est l'homologue de l'écoulement plan avec débit q par unité de longueur remplacé par $Q/2.\pi.r$. La formule (5) donne le résultat :

$$Z = 0,75 \cdot \frac{q}{K} = 0,75 \frac{Q}{2 \pi \cdot K \cdot r} = 0,119 \frac{Q}{K \cdot r} \quad (10)$$

Ceci n'est valable que si R et r sont très grands par rapport à $(R - r)$; la formule (2) indique que $Q/K.r^2$ est alors infiniment petit.

Sur graphique $(\log Q/K.r^2; \log Z/r)$, on a donc :

- une asymptote pour $Q/K.r^2$ infiniment petit : $Z/r = 0,119 \cdot (Q/K.r^2)$;
- et les deux points correspondant aux deux exemples de Boulton.

Pour extrapoler, il faut absolument se rattacher à la courbe de Dupuit. Soit sur cette courbe, le point S de coordonnées $(X; Z)$ (fig. 9) et le point P de coordonnées $(r; 0)$: la pente de la droite PS est :

$$i = \frac{Z}{X - r}$$

Les trois exemples utilisés donnent :

- pour Q/Kr^2 infiniment petit — $i = 2,667$;
- pour $Q/Kr^2 = 18,15$ — $i = 3,137$;
- pour $Q/Kr^2 = 1\,008$ — $i = 3,727$.

La pente i est certainement une fonction monotone croissante de $(Q/K.r^2)$. De même la pente j de la tangente menée à la méridienne de

FIG. 9

Dupuit à partir du point $(r; Z)$ est une fonction monotone décroissante de $(Q/K.r^2)$.

Prenons $i = 2,667$: pour toute valeur de $(Q/K.r^2)$ supérieure à 0, cela définit une limite par excès de (Z/r) ; on peut ainsi tracer sur la figure 4 les six courbes correspondant aux valeurs expérimentales de i et j ; ces courbes délimitent le domaine où doit passer la courbe $(h = 0)$. Ce domaine est très étroit; ainsi les valeurs expérimentales de i et j pour $(Q/K.r^2 = 1\,008)$ donnent pour $(Q/K.r^2 = 200\,000)$ des valeurs de (Z/r) différant de 5 % seulement.

La formule (7), empirique, donne pour (Z/r) des dérivées premières et secondes correctes dans tout le domaine étudié; elle s'obtient en explicitant i dans la formule d'extrapolation suivante :

$$i = 2,667 + 0,219 \ln(1 + 5 Z/r)$$

Zee, Peterson et Bock (référence [9]) ont donné une courbe analogue à celle qui est déduite de la formule (7), tracée au jugé d'après de nombreux résultats probablement beaucoup moins précis que ceux de Boulton; les valeurs de Z/r données par ces auteurs sont en moyenne inférieures de 10 % à celles trouvées ici pour Q/Kr^2 inférieur à 500, presque les mêmes pour Q/Kr^2 compris entre 1 000 et 4 000.

Deuxième problème :

h non nul; R et H très grands (fig. 4). Nous nous sommes bornés à reprendre les résultats de Zee, Peterson et Bock en les modifiant pour tenir compte de la courbe limite $(h = 0)$ donnée ci-dessus et de deux résultats de Boulton.

Fixons R (très grand) et r : Q/K est une fonction de h et H , et on peut tracer sur la figure 4 des courbes d'égale valeur de H ; *a priori*, ces dernières courbes doivent avoir une allure harmonieuse : le respect de cette condition suffit à permettre une extrapolation assez sûre dans de larges domaines autour de chaque point représentatif des données les plus précises.

Troisième problème :

R et H quelconques, h nul. La formule (7) ne peut avoir une valeur générale : si on y fait tendre H vers zéro et R vers r de façon que le débit reste constant, H devient inférieur à Z , ce qui est absurde.

C'était la même chose pour l'écoulement plan :

- d'après la formule (5), si D tend vers zéro, le rapport $(H - Z)/D$ passe par un maximum égal à 0,67 puis décroît et devient négatif, ce qui est absurde;

— en réalité $(H - Z)/D$ tend vers 0,8, soit $0,67 \times 1,2$.

Faute de données expérimentales, nous proposons le même processus pour l'écoulement radial : R/r étant fixé, on calcule le rapport $(H - Z)/r$ en fonction de H/r avec la formule (7); ce rapport passe par un maximum M . Nous avons admis qu'il devait en réalité tendre vers $(1,2.M)$ lorsque H tend vers l'infini.

Les résultats ainsi obtenus sont donnés par la figure 6.

Ces résultats sont certainement assez précis pour toute la courbe $R/r = 1,5$. Pour les autres valeurs de R/r , les résultats déduits de l'extrapolation arbitraire proposée sont traduits par des courbes en traits interrompus, qui correspondent d'ailleurs à des cas tout à fait exceptionnels.

MÉRIDIENNE DE LA NAPPE

Les auteurs déjà cités ont proposé des méthodes simplifiées sans doute suffisantes pour une grande partie des cas qui se rencontrent en pratique.

Voici cependant une méthode qui nous paraît plus logique, plus sûre et plus expressive :

— Pour $h = 0$: reporter les meilleures courbes obtenues par les calculs de relaxation sur un graphique avec $\text{Log } x/r$ en abscisse et $y \cdot \sqrt{K/Q}$ en ordonnée. Sur ce graphique (fig. 5), la formule (4) de Dupuit se traduit par une courbe unique et toutes les méridiennes obtenues pour diverses valeurs de $Q/K \cdot r^2$ admettent la courbe de Dupuit comme asymptote.

Nous avons reporté sur ce graphique :

- les méridiennes des exemples 3 et 4 de Boulton,
- et une courbe ABC obtenue en majorant de 10 % les ordonnées de la courbe de Dupuit.

Cette dernière courbe a été graduée en valeur de $Q/K \cdot r^2$, suivant une méthode analogue à celle qui a été utilisée pour obtenir la formule (7).

Pour tracer la méridienne correspondant à une valeur donnée de $Q/K \cdot r^2$, on dispose de deux points : l'un pour $x = r$, déduit de la formule (7), l'autre sur la courbe ABC; compte tenu de l'allure des courbes de Boulton, on peut tracer une méridienne assez correcte : la courbe 5 de la figure 5 a été dessinée de cette manière pour $Q/K \cdot r^2$ égal à 5 850.

- Pour h non nul : soit f le rayon du puits qui, totalement exploité (avec $h = 0$), fournirait le même débit que le puits de rayon r étudié.

D'après la formule (2), f est défini par l'équation suivante :

$$\frac{H^2 - h^2}{\text{Log } R/r} = \frac{H^2}{\text{Log } R/f} = \frac{h^2}{\text{Log } r/f} \quad (8)$$

On porte maintenant en abscisse : x/f ; ainsi toutes les méridiennes admettent la même courbe de Dupuit comme asymptote.

Fixons f , H et R (donc le débit) et faisons croître h (donc r) : les méridiennes successives s'abaisseront progressivement (en restant toujours au-dessus de celle de Dupuit); ainsi la méridienne de l'exemple 2 de Boulton est à peine en dessous de la courbe 5 tracée pour la même valeur de $Q/K \cdot r^2$.

La figure 5 n'est valable que dans le même cas que la figure 4 : R/H « grand ». On peut maintenant préciser ce que cela signifie : si on fixe Q , h et r et qu'on fasse décroître H et R , le point $(R/f; H \cdot \sqrt{K/Q})$ suit la courbe de Dupuit; lorsque ce point arrive dans la zone où la méridienne initiale se séparait nettement de la courbe de Dupuit, la méridienne nouvelle s'abaisse nécessairement. A ce point de vue, la valeur de R est juste suffisante pour les exemples 1 et 3, un peu insuffisante pour l'exemple 2. Boulton a proposé de prendre $1,5.H$ comme valeur limite de R : c'est insuffisant pour $Q/K \cdot r^2$ inférieur à 20; pour $Q/K \cdot r^2$ très petit, il faut même prendre R et H tels que $(R - r)$ soit supérieur à $3.H$.

Les valeurs de Z données par Boulton sont cependant certainement correctes; il suffit de se souvenir que la formule (5) pour l'écoulement plan, donnant la limite de Z pour D/H infini, est encore acceptable pour D/H égal à 1,2.

PRÉCISION DES RÉSULTATS

Les cinq résultats de calculs de relaxation utilisés ici pourraient être précisés en tenant compte des données suivantes :

1° On sait que les calculs de relaxation sont très simplifiés, donc donnent des résultats plus exacts, si l'on part initialement de potentiels déjà assez proches des potentiels réels.

La relation (9), même si elle n'est valable que pour x infini, facilite beaucoup la première estimation des potentiels. Ainsi, pour l'écoulement plan, il faudrait, tous calculs faits, prendre comme méridienne initiale la parabole :

$$y^2 = 2.x + 2/3$$

On devrait ensuite prendre comme équipotentielles initiales les paraboles homofocales et orthogonales.

Comme nous ignorions la relation (9) lorsque nous avons fait les calculs, nous avons déterminé par tâtonnements la parabole la plus pro-

che à l'infini de la méridienne réelle et nous avons trouvé :

$$y^2 = 2.x + 0,7$$

résultat un peu différent du résultat exact indiqué ci-dessus.

Le coefficient (0,75) que nous avons trouvé pourrait donc être faux de 3 %.

2° Pour accélérer les calculs d'itération, il est avantageux de contrôler fréquemment, pour diverses valeurs de x , le débit. Or, Boulton ignorait, lorsqu'il a fait ses calculs, que les formules de Dupuit donnaient le débit exact : de ce fait, il faut faire une petite correction à un des exemples de Boulton.

Malgré ces petites erreurs sur les données de base, les résultats obtenus ici sont dès maintenant assez précis pour toutes les applications pratiques : on s'intéresse en effet ici au rapport K_h/K_v et presque tous les terrains sont très hétérogènes à cet égard.

ANNEXE II

APPLICATION AUX RABATTEMENTS DE NAPPE

Tout ce qui précède n'est valable que pour les puits isolés. Voici la méthode logique pour évaluer la hauteur d'eau réelle lorsqu'il y a plusieurs puits :

- Calculer par les formules de Dupuit le débit Q arrivant à chaque puits et la hauteur d'eau h_0 au point étudié (les débits ainsi calculés sont exacts : voir référence [3]).
- Calculer, toujours avec les formules de Dupuit, la méridienne d'un puits isolé qui, avec les

mêmes valeurs de r et h , fournirait le même débit Q que le puits le plus voisin du point étudié : sur cette méridienne, la hauteur d'eau est égale à h_0 à une distance x_0 de l'axe du puits.

- Calculer la hauteur d'eau réelle y_0 à la distance x_0 du puits isolé.

La hauteur d'eau réelle au point étudié est en général un tout petit peu supérieure à y_0 .

EXEMPLE NUMÉRIQUE

Soit 50 puits répartis régulièrement sur une enceinte circulaire de rayon $F = 50$ m, avec :

$$r = 0,25 \text{ m} \quad R = 250 \text{ m} \quad H = 10 \text{ m} \quad h \text{ nul}$$

On cherche la hauteur d'eau réelle au centre de cette enceinte.

On fait la transformation conforme classique ($Z = z^{50}$); il vient, tous calculs faits :

$$Q = \frac{\pi \cdot K_h \cdot H^2}{\ln(F/50 \cdot r) + 50 \ln(R/F)} = (3,84 \text{ m}^2) \cdot K_h$$

$$\pi \cdot K_h \cdot (H^2 - h_0^2) = 50 \cdot Q \cdot \ln \frac{R}{F}$$

d'où :

$$h_0 = 1,30 \text{ m}$$

Pour un puits isolé alimenté au débit Q (donc avec $H = 10$ m et R extrêmement grand, ou $R = 250$ m et H bien inférieur à 10 m), la hauteur d'eau d'après Dupuit serait h_0 à une distance x_0 telle que :

$$\pi \cdot K_h \cdot h_0^2 = Q \cdot \ln \frac{x_0}{r},$$

d'où :

$$x_0 = \frac{F}{50} = 1 \text{ m}$$

Voici le calcul des niveaux réels correspondants :

a) Pour le terrain isotrope :

$$\frac{Q}{K \cdot r^2} = \frac{3,84 \text{ m}^2}{(0,25 \text{ m})^2} = 61,4$$

La figure 4 donne :

$$(Z/r) = 3,8, \text{ d'où } Z = 3,8 \cdot 0,25 \text{ m} = 0,95 \text{ m}.$$

D'où :

$$Z \cdot \sqrt{\frac{K}{Q}} = \frac{0,95 \text{ m}}{\sqrt{3,84 \text{ m}^2}} = 0,485$$

On trace la méridienne correspondante sur la figure 5; pour $x_0 = 1 \text{ m} = 4 \cdot r$, on trouve :

$$y_0 \cdot \sqrt{\frac{K}{Q}} = 0,70 \text{ environ}$$

d'où :

$$y_0 = 0,70 \cdot \sqrt{3,84 \text{ m}^2} = 1,37 \text{ m environ}$$

b) Pour un terrain anisotrope avec $K_h/K_v = 25$, voici les résultats obtenus :

$$\frac{Q}{K_v \cdot r^2} = 61,4 \cdot 25 = 1\,535$$

La figure 4 donne $(Z/r) \cdot \sqrt{K_h/K_v} = 33,2$;

d'où :

$$Z = \frac{33,2 \cdot 0,25 \text{ m}}{\sqrt{25}} = 1,66 \text{ m}$$

Il vient :

$$Z \cdot \sqrt{\frac{K_h}{Q}} = \frac{1,66 \text{ m}}{\sqrt{3,84 \text{ m}^2}} = 0,85$$

La méridienne sur la figure 5 est à peine au-dessus de la courbe 3. Pour $x_0 = 1 \text{ m} = 4 \cdot r$, on trouve :

$$y_0 \cdot \sqrt{\frac{K_h}{Q}} = 0,90,$$

d'où :

$$y_0 = 0,90 \cdot \sqrt{3,84 \text{ m}^2} = 1,76 \text{ m}$$

D'où les niveaux à l'intérieur de l'enceinte :

- pour $K_h/K_v = 0$ (Dupuit) : 1,30 m;
- pour $K_h/K_v = 1$: un peu plus de 1,37 m;
- pour $K_h/K_v = 25$: un peu plus de 1,76 m.

C'est là un exemple avec des données tout à fait ordinaires; on fait souvent des rabattements de nappe avec des puits de bien plus petit diamètre, dans des terrains bien plus anisotropes; l'écart entre les niveaux calculés par les formules de Dupuit et les niveaux réels est alors bien plus grand.

RÉFÉRENCES

- [1] J. DUPUIT. — Etudes théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux dans les canaux découverts et à travers les terrains perméables — *Dunod* (Paris) 2^e éd. — 1863.
- [2] J. TCHARNY. — La démonstration rigoureuse des formules de Dupuit pour la filtration d'eau sous pression avec zone de suintement. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S.* — Volume 89, n° 6 — 1951.
- [3] J. BRILLANT. — Le débit des écoulements en terrain perméable limité par un substratum horizontal étanche — *Le Génie Civil* — Paris, 1/3/1956, page 95.
- [4] T. G. CHAPMAN. — Two dimensional ground-water flow through a bank with vertical faces. *Revue Géotechnique*, Londres, mars 1957, p. 35.
- [5] N. S. BOULTON. — The flow pattern near a gravity well in a uniform water-bearing medium — *Journal of the Institution of Civil Engineers*, Londres, n° 10, décembre 1951, p. 534.
- [6] H. CAMBEFORT. — Les alluvions graveleuses feuilletées et à structure ouverte. *Quatrième Congrès des grands barrages* — New-Delhi, 1951, Volume IV, page 431.
- [7] H.C.P. DE Vos. — Das Strömen von Wasser durch Erddämme und deren Unterlage — *Premier Congrès des Grands Barrages*, Stockholm, 1933, volume IV, page 71.
- [8] C. JAEGER. — Hydraulique technique, Paris, *Dunod*, 1954, page 405.
- [9] Chong-Hung ZEE, D.F. PETERSON and R.O. BOCK. — Flow into a well by electric and membrane analogy — *Proceedings A.S.C.E.*, New York, Volume 81, n° 817, october 1955.
- [10] Voir par exemple : H. P. HALL. — Recherches concernant l'écoulement permanent alimentant un puits gravitaire, *La Houille Blanche*, Grenoble, janv. 1955, page 41.

Papeterie, banlieue de Grenoble, cherche :

INGÉNIEUR I.E.G.

éventuellement débutant, comme

**CHEF SERVICES ÉLECTRICITÉ FORCE MOTRICE,
ÉTUDE et EXPLOITATION**

Logement assuré. Situation d'avenir. Ecrire : Havas Grenoble 5.517.