

A note on the theory of the hydraulic jump in a parabolic channel

Note sur la théorie du ressaut hydraulique dans un canal parabolique

BY A. M. BINNIE

ENGINEERING LABORATORY, CAMBRIDGE

For hydraulic jumps in an open horizontal water channel of parabolic cross-section, curves are presented which give in dimensionless form the depth and velocity on the downstream side of the jump in terms of the conditions on the upstream side.

Des courbes présentées, pour les ressauts hydrauliques dans un courant d'eau s'écoulant dans un canal horizontal ouvert à section parabolique, expriment, sous forme adimensionnelle, la hauteur d'eau et la vitesse à l'aval du ressaut, en fonction du régime à l'amont de celui-ci.

I. — INTRODUCTION

The problem of the fully turbulent jump in a horizontal channel of uniform parabolic cross-section was treated by Argyropoulos (1957). He showed that a theory based on the equations of continuity and momentum was well supported by experiment, but the use of the theory was extremely laborious because it involved the solution by trial of an octic equation. Nevertheless, he solved this equation for each of his 30 experiments on a channel; and the results, applicable to this particular channel, were displayed in tabular form.

The purpose of this note is to show how by a simple transformation they may be made valid for all parabolic channels, no matter what their parameter may be. Thus these calculations need never be done again.

I. — INTRODUCTION

Le problème du ressaut pleinement turbulent dans un canal horizontal de section parabolique uniforme a été étudié par Argyropoulos en 1957. Il a montré qu'une théorie basée sur les équations de continuité et de quantité de mouvement se vérifiait bien par voie expérimentale, mais que cette théorie était d'un emploi extrêmement laborieux, puisqu'elle nécessitait la solution, par approximation, d'une équation du huitième degré. Il a, néanmoins, résolu cette équation pour chacune des 30 expériences effectuées dans un canal, et il a présenté les résultats intéressant ce canal sous la forme d'un tableau. L'objet de la présente note est de démontrer comment, au moyen d'une simple transformation, ces résultats peuvent être rendus valables pour tout canal parabolique, quel que soit son paramètre. Ainsi, ses calculs sont faits une fois pour toutes.

**II. — THEORY
OF THE HYDRAULIC JUMP**

We adopt Argyropoulos' notation, and take the profile of the cross-section as

$$y^2 = 2 px = 0.078 x, \tag{1}$$

where the origin is at the bottom of the channel, the axes of x and y are respectively vertical and horizontal, and x and y are measured in metres. The uniform velocity of the stream is denoted by V and the central depth by d . The suffixes 1 and 2 refer to cross-sections on the upstream and downstream sides of the jump. Now the cross-section of the stream is $(4/3) (2 p)^{1/2} d^{3/2}$ and its moment about the free surface is $(8/15) (2 p)^{1/2} d^{5/2}$. Hence, the equations of continuity and momentum are

$$V_1 d_1^{3/2} = V_2 d_2^{3/2}, \tag{2}$$

$$\frac{8}{15} (d_2^{5/2} - d_1^{5/2}) = \frac{1}{g} \frac{4}{3} (V_1^2 d_1^{3/2} - V_2^2 d_2^{3/2}) \tag{3}$$

A great simplification can now be made by using dimensionless expressions; and to do this, we introduce the Froude number \mathcal{F} of the stream, defined as the ratio of the velocity of the stream to that of a long wave of infinitely small amplitude on the free surface. The latter velocity was shown by Ramsey (1942) to be equal to the square root of g times the cross-sectional area divided by the breadth of the free surface. Hence, for a parabolic channel

$$\mathcal{F} = \frac{V}{[(2/3)gd]^{1/2}} \tag{4}$$

Then, on eliminating V_2 by means of (2) and V_1 by introducing \mathcal{F}_1 , (3) reduces to

$$\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4 - \left(1 + \frac{5}{3} \mathcal{F}_1^2\right) \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{3/2} + \frac{5}{3} \mathcal{F}_1^2 = 0 \tag{5}$$

This result is a shortened form of Argyropoulos' octic equation. It shows that d_2/d_1 is dependent only on \mathcal{F}_1 ; and, as p has disappeared,

**II. — THÉORIE
DU RESSAUT HYDRAULIQUE**

En adoptant la notation employée par Argyropoulos, et en posant, pour le profil de la section :

$$y^2 = 2 px = 0,078 x, \tag{1}$$

l'origine étant située au fond du canal, les axes des x et des y étant, respectivement, verticaux et horizontaux, et les valeurs de x et y étant mesurées en mètres. La vitesse uniforme du courant est V , et la profondeur au centre du canal, d . Les indices 1 et 2 correspondent aux sections transversales, respectivement à l'amont et à l'aval du ressaut. La section du courant est $(4/3) (2 p)^{1/2} d^{3/2}$, et son moment par rapport à la surface libre $(8/15) (2 p)^{1/2} d^{5/2}$. Il s'ensuit que les équations de continuité et de quantité de mouvement sont :

$$V_1 d_1^{3/2} = V_2 d_2^{3/2}, \tag{2}$$

$$\frac{8}{15} (d_2^{5/2} - d_1^{5/2}) = \frac{1}{g} \frac{4}{3} (V_1^2 d_1^{3/2} - V_2^2 d_2^{3/2}) \tag{3}$$

L'emploi d'expressions adimensionnelles permet une grande simplification. A cette fin, nous introduisons le nombre de Froude \mathcal{F} du courant, nombre qui est défini comme étant le rapport entre la vitesse du courant, et celle d'une onde longue d'amplitude infiniment petite sur la surface libre. Ramsey a démontré en 1942 que cette dernière vitesse était égale à la racine carrée de g , multipliée par l'aire de la section transversale, et divisée par largeur de la surface libre. D'où, pour un canal parabolique :

$$\mathcal{F} = \frac{V}{[(2/3)gd]^{1/2}} \tag{4}$$

Ainsi, en éliminant, d'une part, V_2 au moyen de (2), et, d'autre part V_1 en introduisant \mathcal{F}_1 , on réduit l'équation (3) à la forme suivante :

$$\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4 - \left(1 + \frac{5}{3} \mathcal{F}_1^2\right) \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{3/2} + \frac{5}{3} \mathcal{F}_1^2 = 0 \tag{5}$$

Ce résultat est une forme abrégée de l'équation du 8^e degré d'Argyropoulos. Il montre que d_2/d_1 dépend seulement de \mathcal{F}_1 ; puisque p a disparu,

it is true for all parabolic channels. With the values of V_1 and d_1 for each experiment \mathcal{F}_1 may be determined; and the 30 values of d_2/d_1 already calculated should lie on a single curve if plotted on a base of \mathcal{F}_1 . When this procedure was carried out with g taken as 980 cm/sec^2 , the points were found to be slightly scattered about a mean curve, these discrepancies being no doubt due to the complicated form of the equation used by Argyropoulos. However, it is easy to find \mathcal{F}_1 from (5) when d_2/d_1 is specified. This has been done for $d_2/d_1 = 1.5, 2, 3, \dots, 6$, and the resulting curve is shown in Figure 1.

With little difficulty the theoretical values of \mathcal{F}_2 can be determined; for when V_1 and V_2 are removed by the use of \mathcal{F}_1 and \mathcal{F}_2 from (2), it becomes

$$\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1 (d_2/d_1)^{-2} \quad (6)$$

The second curve in Figure 1 has been drawn with the aid of this result.

The curves have not been extended as far as $\mathcal{F}_1 = 1$, because in that region the jump is not fully turbulent and the analysis given above is invalid.

l'équation est valable pour n'importe quel canal parabolique. En connaissant les valeurs de V_1 et de d_1 correspondant à chaque expérience, on peut déterminer \mathcal{F}_1 , et les 30 valeurs de d_2/d_1 déjà calculées devraient se trouver sur une courbe unique, tracée en fonction de \mathcal{F}_1 . Lorsque cette méthode a été essayée avec $g = 980 \text{ cm/s}^2$, on a constaté une légère dispersion des points par rapport à la courbe moyenne, ces écarts étant sans doute imputables à la forme compliquée de l'équation employée par Argyropoulos. On obtient cependant facilement \mathcal{F}_1 à partir de (5) pour des valeurs bien déterminées de d_2/d_1 ; ceci a été fait pour $d_2/d_1 = 1,5, 2, 3 \dots 6$ avec, comme résultat, la courbe de la figure 1. Les valeurs théoriques de \mathcal{F}_2 se déterminent assez facilement; en effet, lorsqu'on élimine V_1 et V_2 de (2) en faisant intervenir \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 , cette équation devient :

$$\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1 (d_2/d_1)^{-2} \quad (6)$$

C'est à partir de ce résultat qu'a été tracée la deuxième courbe de la figure 1.

Les courbes n'ont pas été tracées jusqu'à $\mathcal{F}_1 = 1$, car, dans cette région, le ressaut n'est pas pleinement turbulent, de sorte que l'analyse présentée plus haut n'est pas valable.

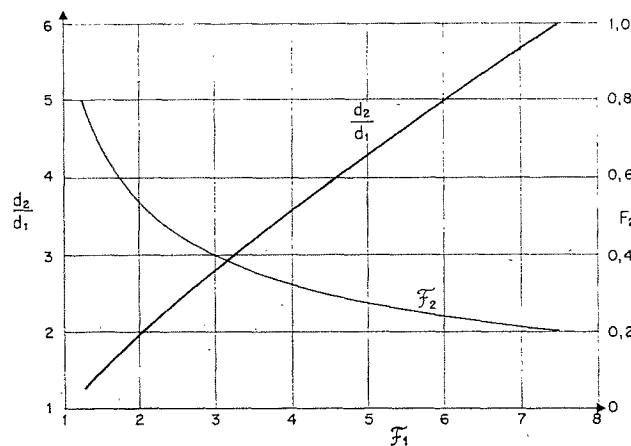


FIG. 1
Values of d_2/d_1 and \mathcal{F}_2 plotted on a base of \mathcal{F}_1 .
Valeurs de d_2/d_1 et \mathcal{F}_2 en fonction de \mathcal{F}_1 .

REFERENCES

- ARGYROPOULOS (P.A.). — *Trans. 7th Congress International Assoc. of Hydraulic Research*, 2 (1957), D-12.
- RAMSEY (A.S.). — *Treatise on hydromechanics* (5th ed.), 2 (1942), 260. Bell, London.