Les calculs de marée

Tide calculations

PAR F. GOHIN

INGÉNIEUR A LA SOGREAH, GRENOBLE

Méthodes permettant le calcul des dénivellations et des courants de marées tant dans les mers littorales que dans les océans et faisant l'objet de plusieurs communications et articles (VII^e Congrès du Coastal Engineering, Congrès 1961 de l'I.A.H.R., article paru dans le bulletin du C.O.E.C. de juin 1961).

Principe et exemples du calcul sur machine à calculer électronique.

Methods for calculating tidal level differences and currents in coastal sea areas and oceans have been discussed in papers submitted to the Seventh Congress on Coastal Engineering, the 1961 I.A.H.R. Congress, and in an article published in the June 1961 issue of the C.O.E.C. Bulletin.

Electronic machine calculation principles, and calculated examples.

I. — MODÈLES PHYSIQUES ET MODÈLES MATHÉMATIQUES

Jusqu'à une époque récente, la détermination des dénivellations et des courants de marée sur les domaines maritimes réels présentait d'insurmontables difficultés de calcul. En effet, d'une part, le dessin complexe des côtes, la distribution irrégulière des profondeurs ne permettaient pas d'obtenir de solutions formelles, d'autre part, la résolution pas à pas des équations différentielles régissant les mouvements de la mer requiert un volume de calcul extrêmement important.

Depuis la dernière guerre, on a envisagé, en France et à l'étranger, la réalisation de différents ouvrages mettant en jeu les mouvements de marée : par exemple, usines marémotrices, barrages et digues de protection contre les marées de tempête. Pour mener à bien de telles études, il faut non seulement connaître avec précision les mouvements de la mer dans les conditions géographiques naturelles, mais aussi déterminer les répercussions provoquées par les modifications de géographie envisagées sur les dénivellations et les courants.

Pour effectuer de telles études, on construira un modèle physique donnant dans une zone plus ou moins étendue au large de l'ouvrage, les dénivellations et les courants de marée avant, pendant, et après la construction de l'ouvrage.

Un modèle physique de cette nature doit répondre aux exigences suivantes :

a) L'échelle en plan doit être choisie suffisamment petite pour permettre la représentation d'une zone suffisamment étendue. Si les dimensions du domaine considéré sont importantes, la force de Coriolis doit être prise en compte; autrement dit, le modèle à réaliser doit être tournant;

b) L'échelle en hauteur doit être suffisamment grande pour permettre des mesures précises tant des dénivellations que des courants.

De ces deux points, il découle que, du moins pour un projet de quelque ampleur, le modèle physique sera nettement distordu, ce qui présente, comme l'on sait, de sérieux inconvénients.

FIG. 1

Etude des marées. Atlantique nord. Réseau des points de calcul.

c) Les conditions à la limite du large doivent être avant, pendant, et après la construction, bien connues. Il est clair qu'elles ne sont bien connues qu'avant les travaux; il faudra donc :

- soit les admettre *ne varietur*,
- soit les déterminer par le calcul.

Pour préciser ces points, je prends un exemple purement imaginaire. On désire modifier les conditions climatiques le long des côtes de la mer de Behring, et pour cela on envisage de barrer le détroit séparant cette mer de l'océan glacial Arctique.

Le barrage envisagé aurait, disons 100 kilomètres de long, et la profondeur au pied du barrage serait de plusieurs dizaines de mètres.

Il est clair qu'un tel ouvrage perturbe profondément le régime des marées et peut modifier complètement les conditions de la navigation au voisinage des ports.

Il serait souhaitable de réaliser un modèle couvrant un domaine de 2 500 kilomètres sur 1 500 kilomètres. Ceci est tout à fait réalisable économiquement parlant. La région la plus perturbée se situant évidemment au voisinage de l'ouvrage, le modèle physique réalisable à construire s'étendra sur quelque 200 à 300 kilomètres de longueur et 150 kilomètres de largeur. Ce modèle devra être tournant.

Naturellement, les conditions aux limites du large de ce modèle sont à modifier au fur et à mesure de la construction du barrage. Pour obtenir ces conditions, on peut envisager de réaliser un modèle mathématique s'étendant, disons, des îles Aléoutiennes à l'île de Wrangell.

Je ne développerai pas davantage maintenant cet exemple, qui n'avait d'autre but que de souligner l'intérêt d'englober un modèle physique précis et détaillé dans un modèle mathématique, plus grossier mais aussi étendu qu'on le désire.

II. — LES DIFFÉRENTS TYPES DE MODÈLES MATHÉMATIQUES

Avant de présenter quelques exemples de modèles mathématiques destinés à de telles études, modèles réalisés par la SOGREAH, je voudrais développer quelques réflexions sur les différents types de modèles mathématiques.

Tout d'abord, je précise que j'appelle « modèle mathématique » un programme de calcul, c'est-à-dire la suite des opérations permettant de résoudre les équations d'un problème donné. Lorsque, — c'est le cas pour la marée, — les équations forment un système d'équations différentielles à n dimensions, non linéaires en général, la solution numérique sera obtenue à l'aide d'un ordinateur en un certain nombre de « points » de l'espace à n dimensions. En pratique, dans le cas étudié ici, il s'agit de déterminer les deux fonctions de l'espace et du temps

suivantes : la dénivellation Z , le courant $\vec{V}$. Dans le domaine étudié, on choisira un nombre discret, aussi important que possible, de positions. En chaque point M choisi, on doit déterminer les valeurs de

$$Z_M(t) \quad \text{et} \quad \vec{V}_M(t).$$

Si l'on choisit une force extérieure sinusoïdale, on calculera en pratique, pour un certain nombre d'instantanés convenablement répartis dans la période, les valeurs prises par

$$Z_M(t) \quad \text{et} \quad \vec{V}_M(t).$$

Chiffre romains : différence entre l'heure de la pleine mer locale et l'heure du passage au méridien $G = 0$.
Chiffres arabes : amplitude locale de la composante M_2 (en cm)

FIG. 2

Océan Atlantique nord.
Amplitudes et phases calculées
de la marée semi-diurne lunaire « M_2 ».

Ceci étant dit, je classerai les modèles réalisables en trois types, selon l'étendue du domaine représenté.

Chacun de ces types est plus exactement défini par l'inventaire des forces considérées dans l'équation dynamique, qui est, avec l'équation de continuité, l'une des deux équations fondamentales du problème.

Si l'on n'étudie que les marées harmoniques, c'est-à-dire dues aux seules forces luni-solaires, on sait que l'équation dynamique s'exprime sous la forme :

- Force d'inertie temporelle
- + Force d'inertie spatiale,
- + Force due à la pression,
- + Force de Coriolis,
- + Force de frottement,
- = Force astronomique résultante.

Les trois types de modèles sont définis par l'inventaire suivant des forces prises en compte :

FORCES CONSIDÉRÉES	« Océan »	« MER LITTORALE »	« ESTUAIRE »
Inertie temporelle.	oui	oui	oui
Inertie spatiale. . .	non	non	éventuellement
Pression.	oui	oui	oui
Coriolis.	oui	oui	éventuellement
Frottement. . .	non	oui	oui
Extérieure. . .	oui	non	non

Ainsi qu'on peut le voir sur le tableau ci-dessus, les forces extérieures ne sont pas considérées dans les types « mer littorale » et « estuaire ».

Ce point doit être précisé. Si le domaine est d'étendue limitée, l'action des forces astronomiques sur l'espace liquide englobé est négligeable vis-à-vis de l'action de ces forces sur l'espace liquide non englobé. Autrement dit, on admet que la marée se produisant dans un domaine limité est d'origine purement océanique : à la limite du large, un « batteur » introduira la marée provenant de l'océan.

J'examinerai tour à tour chacun des trois types identifiés.

Modèle type « Océan »

Un tel modèle, comme son nom l'indique, couvre un vaste domaine, par exemple l'Atlantique Nord ou le Pacifique. On sait que, dans les espa-

ces océaniques, la profondeur est de l'ordre de plusieurs milliers de mètres en moyenne. Or, comme l'on sait, l'intensité de la force de frottement diminue avec le rayon hydraulique, c'est-à-dire la profondeur. C'est pourquoi, dans ce type de modèle, la force de frottement est négligée : les équations différentielles sont alors linéaires.

Or, il est clair que, du moins si la force extérieure est périodique, la solution véritable ne peut être que périodique également. Pour qu'une telle forme de solution puisse être obtenue, il faut que l'énergie apportée, à chaque instant, par l'astre produisant la force d'attraction considérée, soit dissipée. Que se passe-t-il dans la nature ? On admet en général que la quasi-totalité de l'énergie est dissipée sur le plateau continental par frottement ; or ce plateau continental est exclu du modèle ; par conséquent, l'énergie est dissipée à l'extérieur du modèle. Finalement, on pourra par conséquent introduire le long des limites du modèle, et en chaque point de calcul, une condition de dissipation d'énergie.

La condition la plus simple est celle liant la composante du courant normal à la dénivellation en un point frontière. Mathématiquement, ceci revient à dire qu'une fraction εV_n du courant normal V_n est en phase avec la dénivellation. La quantité ε est évidemment un paramètre qui doit avoir en chaque point P du contour du domaine une valeur bien précise, pour que l'énergie soit dissipée à l'extérieur du modèle comme elle l'est dans la nature. Finalement ε est une certaine fonction $\varepsilon(P)$ du point P du contour.

La difficulté essentielle du calcul réside donc sur le choix convenable de la fonction $\varepsilon(P)$. Dans les calculs que nous avons effectués à la SOGREAH, nous postulons qu'à chaque $\varepsilon(P)$ correspond une solution du problème. En modifiant $\varepsilon(P)$, nous constatons effectivement que la solution — c'est-à-dire, je le rappelle, l'ensemble des valeurs prises par la dénivellation et le courant en un nombre discret de points M répartis dans le domaine et en un nombre discret d'instants répartis dans la période — se modifie. Nous appelons « réglage du modèle » l'ensemble des modifications apportées à $\varepsilon(P)$ pour obtenir une solution aussi proche que possible de la solution observée.

À ce sujet, il y a lieu de souligner que le nombre d'observations utilisables, c'est-à-dire pouvant être rapprochées du calcul, est extrêmement réduit dans les océans, puisque seuls les enregistrements des îles et de certains points des côtes des continents où le plateau continental est très réduit sont à prendre en compte.

Pour en terminer avec les modèles de ce type, je voudrais en souligner l'intérêt pratique. Je

Fig. 3

Marnages et phases des marées dans la Manche.

reprendrai l'exemple du barrage du détroit de Behring, en posant la question suivante : Quelles sont les conditions à la limite nord du modèle mathématique? Je ne sais si des campagnes hydrographiques ont été faites le long du parallèle de l'île Wrangell, mais je pense que ces conditions peuvent être à leur tour obtenues par l'étude d'un modèle couvrant tout l'océan Glacial Arctique. L'intérêt pratique des modèles type « océan » est donc le suivant : ces modèles permettent d'obtenir les conditions aux limites à introduire dans des modèles plus petits, et plus précisément dans les modèles de type « mer littorale » que j'examinerai maintenant.

Modèle type « Mer littorale »

Le type « mer littorale » est, je ne le cache point, le plus simple des trois, et aussi celui pour lequel les résultats obtenus sont les plus

probants quant aux qualités des modèles mathématiques.

Dans ces modèles, en effet :

- D'une part, la force astronomique est négligée, d'où une certaine simplification du calcul;
- D'autre part, le frottement est pris en compte, d'où la certitude d'obtenir un état stable;
- Enfin la topographie des fonds, le tracé des côtes, ne sont pas approfondis dans le détail, d'où une certaine schématisation.

Toutes ces conditions permettent finalement de déterminer, connaissant par exemple la loi donnant en chaque point de la limite océanique la dénivellation en fonction du temps, les courbes de dénivellation et les hodographes des courants. En règle générale, le nombre de points où, dans la nature, les dénivellations sont enregistrées et les courants mesurés, est élevé : le réglage est donc relativement précis et sûr.

J'ai mentionné le mot « réglage »; voici pourquoi :

- En premier lieu, les conditions aux limites sont introduites en un nombre limité de points, et non pas d'une façon continue;
- En second lieu, la géographie est plus ou moins bien respectée;
- En troisième lieu, il entre, comme l'on sait, dans la force de frottement un paramètre dont la valeur est à choisir.

Le « réglage » s'effectuera, cela va de soit, sur la marée naturelle et portera sur deux points :

- Conditions aux limites;
- Paramètre de la force de frottement.

Modèle type « Estuaire »

Les modèles mathématiques du type « estuaire » sont en concurrence très nette avec les modèles physiques, surtout lorsque la force de Coriolis peut être négligée.

Ce type présente une difficulté importante qui est la suivante : la géographie varie avec l'âge de la marée; en effet, les bancs et/ou les hauts fonds se découvrent pendant certaines fractions

de la période. Par suite, d'une part, les limites du modèle, d'autre part, les conditions aux limites, varient au cours du temps. Précisons que cette difficulté, si importante soit-elle, n'est cependant pas insurmontable. Je n'exposerai pas ici les solutions envisagées par la SOGREAH.

Je l'ai dit, ces modèles sont en concurrence avec les modèles physiques; ils présentent sur ces derniers les avantages suivants :

— En premier lieu, les résultats calculés sont extrêmement précis (ce qui ne veut pas dire extrêmement justes) : le modèle mathématique n'utilisant pas d'échelles en plan ou en hauteur, la question de la sensibilité des calculs ne se pose pas, c'est-à-dire qu'une modification même très faible des courants et des dénivellations due à une modification quelconque de la géographie est décelable.

— En second lieu, l'effet de la force de Coriolis peut être apprécié dans une certaine mesure, c'est-à-dire que l'on peut apporter à la question « faut-il réaliser un modèle physique tournant ou fixe? », une réponse. A ce sujet, il y a lieu de souligner que le prix de revient de construction et d'exploitation des modèles mathématiques dépend peu de la prise en compte de la force de Coriolis.

FIG. 4

Comparaison des amplitudes modèle et nature en certains ports de la Manche.
Essai n° 1 Coriolis.

III. — EXEMPLES ET MODÈLES RÉALISÉS PAR LA SOGRÉAH

Il y a lieu d'observer tout d'abord que pour chaque type précédemment distingué, on peut réaliser un programme de calcul « cadre » correspondant à la partie immuable du modèle, en pratique : résolution des équations différentielles, exploitation des résultats calculés pour en déduire les constantes harmoniques, etc.

A cette partie fixe on adjointra pour chaque

domaine considéré une partie variable, comportant en particulier les valeurs des différents facteurs locaux intervenant dans le calcul, par exemple : positions des points où s'effectue le calcul, profondeur locale, etc.

La SOGREAH a réalisé différents modèles permettant la détermination des dénivellations et des courants sur différents domaines.

DISCUSSION

Président : M. BANAL

M. le Président remercie M. GOHIN de tout ce qu'il a dit et de tout ce qu'il a laissé entendre sur les mérites des modèles mathématiques.

M. le Président croit que l'on peut cependant mettre au crédit des modèles physiques la communication de MM. BONNEFILLE et JEANNEL, car, tant que, sur un modèle, on ne regarde que les choses assez grosses, comme les courants et les débits, par exemple, et que l'on néglige les fluctuations de la vitesse en situation et en temps, le modèle mathématique peut, évidemment, entrer en concurrence. C'est pourquoi l'avenir des modèles physiques est dans une prise en considération plus fine de leurs propriétés.

M. GOUGENHEIM souligne l'intérêt de la méthode purement mathématique pour le calcul systématique des marées océaniques.

Les résultats auxquels elle a conduit, quoique avec une grande part d'arbitraire, ressemblent, dans une certaine mesure, à ceux qui ont été trouvés par d'autres auteurs pour l'océan Atlantique, avec des parts équivalentes d'arbitraire, mais portant sur d'autres conditions. La comparaison des hypothèses des divers auteurs permettra peut-être d'apporter, dans une certaine mesure, quelques précisions sur les phénomènes.

D'autre part, la connaissance du relief sous-marin de l'océan Atlantique, qui va s'améliorer peu à peu dans un délai relativement rapide, sera un facteur extrêmement important pour opérer dans de meilleures conditions. En particulier, il sera possible, en reprenant les théories d'Harris, dont le tracé des lignes cotidales fut effectué en 1900 avec une connaissance extrêmement sommaire des profondeurs, d'arriver à une meilleure interprétation des phénomènes.

Depuis Harris, divers auteurs, en particulier Defant, Sterneck, Dietrich, Villain ont établi des cartes cotidales avec des données de base plus nombreuses et des procédés de calcul plus poussés, mais encore peu évolués, faute de machines électroniques. Tout récemment, le professeur russe Timonov a mis au point deux autres méthodes de tracé de lignes cotidales : un article, en cours de traduction, a paru au début de cette année. La méthode de Timonov a été utilisée par un autre savant russe, Boganov, pour la détermination des lignes cotidales des ondes semi-diurnes et des ondes diurnes, mais dans l'océan Pacifique, de sorte que les cartes qu'il vient de publier et qui sont tout à fait intéressantes, ne peuvent servir de point de comparaison.

M. GOHIN croit qu'on n'est pas loin de parvenir à

résoudre ce problème scientifique qui se pose depuis longtemps et qui intéressait Poincaré.

M. GOUGENHEIM remarque que l'idéal de la théorie des marées est de déterminer complètement le phénomène sans avoir recours à l'observation, en partant seulement du mouvement des astres perturbateurs et de la configuration de bassins océaniques. La partie de mécanique céleste est beaucoup plus simple que celle qui met en œuvre la mécanique des fluides, à cause de la forme arbitraire du contour et du fond des océans et aussi de la nécessité de tenir compte des formes de frottements.

M. GOHIN pense que le terme de viscosité introduit dans les calculs effectués à Hambourg sous la direction du professeur Hansen est quelque peu artificiel; il se demande si ce procédé peut être étendu à tout domaine océanique.

M. GOUGENHEIM concède que les mers littorales paraissent intervenir peu, mais elles sont, tout de même, de grandes dissipatrices d'énergie.

M. GOHIN rappelle que l'on considère en général que la quasi-totalité de l'énergie est dissipée dans les mers littorales. Dans sa méthode, il prend en considération ce fait.

M. BONNEFILLE remarque que la compétition est ouverte entre les modèles réduits et les machines à calculer, pour le plus grand bien des deux méthodes. En ce qui concerne le calcul des marées sur tout le globe terrestre, un espoir, pour les modèles réduits, est l'installation de laboratoires sur satellite artificiel, solution aussi concevable que celle de machines infiniment puissantes.

Il semble que les modèles réduits commencent à défricher les problèmes et que les machines en précisent les solutions ensuite. Pour le moment, c'est aux modèles réduits de montrer la voie en ce qui concerne les problèmes des courants océaniques et où intervient la salinité.

M. GOHIN indique que l'étude sur modèle mathématique de l'influence de la salinité est possible. La SOGREAH compte bien l'entreprendre. M. GOHIN précise également que s'il n'a pas mentionné que son modèle permet la détermination des courants de marée, c'est en raison de leur petitesse (de l'ordre de 10 cm/s au plus). Par contre, le modèle ne permet pas l'étude des courants permanents qui, eux, peuvent atteindre quelques mètres/seconde.