Flow at the toe of a spillway

II. — THE "SOLID TOE" SPILLWAY

BY

F. M. HENDERSON,

AND

D. G. TIERNEY,

SENIOR LECTURER IN CIVIL ENGINEERING,
UNIVERSITY OF CANTERBURY, CHRISTCHURCH, NEW ZEALAND

LECTURER IN HIGHWAY ENGINEERING,
UNIVERSITY OF NEW SOUTH WALES, SYDNEY, N.S.W.

(Texte français page 51.)

By means of an iteration procedure due to L. C. Woods, a complete theoretical solution is obtained for the problem of flow over the solid

curved surface at the toe of an open spillway. Experimental results were also obtained, and found to be in good agreement with the theory.

I. — INTRODUCTION

In a previous paper* [1] theoretical and experimental results were obtained for the case of flow over an "open toe" i.e. the opening made by a tunnel running through the base of a spillway block. The present study is concerned with the more usual case in which the spillway toe is a curved solid surface, and the objective is essentially the same: to obtain a complete solution which determines the velocity and pressure distribution, the local thickening of the jet

as it is deflected by the curved surface, and hence the thrust and bending moment on the spillway side walls.

The problem is inherently more difficult than in the open toe case, because of the existence of a curved solid boundary of specified shape. Nevertheless a solution is obtained through an iteration procedure, and experimental results are found to be in good agreement with the theory.

II. — THEORETICAL ANALYSIS

The situation is as shown in Figure 1. As in the analysis of the open-toe spillway, the velocity is assumed constant and equal to v_1 everywhere on the upper bounding streamline DHC, and the water is assumed to be inviscid so that the flow is irrotational. The solid boundary AEOFB consists of two straight sections AE and FB joined by a circular curve EOF of radius R_0 . As in the previous analysis the physical plane is redispensed in Figure 2a with the origin at O and the Y-axis coincident with the line of sym-

metry OH. Similarly Figs. 2b, 2c, and 2d show three other planes which are relevant to the mapping problem—the planes of the complex potential

$$w = \varphi + i\psi \quad (1)$$

and of:

$$T = \log \left(v_1 \frac{dz}{dw} \right) = \log (v_1/v) + i\theta \quad (2)$$

as before, but this time with the ζ plane disposed so that the field of flow maps into the interior of an infinite strip, as on the w plane.

The peculiar difficulty of this problem is that the velocity along the solid boundary EOF is not necessarily constant, as it is in the open-toe

* The "open-toe" spillway. *La Houille Blanche*, n° 6, novembre 1962, pp. 728-750.

FIG. 1

The basic flow situation.

Le schéma d'écoulement de base.

case. In fact the velocity will be a minimum at O, so that on the T-plane, Figure 2 d, EOF becomes a curved line, convex to the right. Since the figure on the T-plane is therefore not a poly-

FIG. 2

The mapping problem.

Choix du mode de représentation

gon, the Schwarz-Cristoffel transformation cannot be used, and no elementary solution is possible.

We resort to an iterative process based on a theorem which is a development from Cauchy's integral formula. Both the iterative process and the theorem are due to Woods [2]. The theorem relates to the solution of the general mapping problem within an infinite strip on a given (ζ) plane, and is stated as follows:

Woods' theorem :

If $\delta(\zeta) = \beta + i\gamma$ is harmonic in the strip

$$-\infty \leq \xi \leq \infty, \quad 0 \leq \eta \leq \tau$$

on the plane of $\zeta = \xi + i\eta$, then provided certain conditions are satisfied, δ at any point P (ζ) within the strip is given by:

$$\delta(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \gamma_0 \operatorname{cosech} \frac{\pi}{2\tau} (\xi^* - \zeta) + \beta_\tau \operatorname{sech} \frac{\pi}{2\tau} (\xi^* - \zeta) \right\} d\xi^* \quad (3)$$

where:

$$\gamma_0 = \lim_{\eta \rightarrow 0} \gamma(\xi^*, \eta),$$

$$\beta_\tau = \lim_{\eta \rightarrow \tau} \beta(\xi^*, \tau - \eta).$$

The conditions referred to are of the formal mathematical kind, and are such as would be satisfied in most normal flow situations, including the one dealt with in this paper. Accordingly they will not be discussed here; for details the reader is referred to Woods' original paper.

The import of the theorem is this: if δ is a harmonic function of ζ , such that the real part β is known along the upper boundary, and the imaginary part γ is known along the lower boundary, of an infinite strip in the ζ plane, then equation (3) gives a solution for δ anywhere within the strip. The solution is direct, without the need for an iterative process.

If, however, our knowledge of β and γ along the boundaries of the strip is approximate or otherwise incomplete, equation (3) then becomes the basis of an iterative process. Trial values of γ_0 and β_τ are inserted in the equation which is then solved for a series of values of ζ which traverse the boundaries of the strip. In this way improved values of γ_0 and β_τ are obtained, which can then be made the basis of a further iteration.

The process clearly lends itself to the solution

of free boundary problems such as the one considered here. For if we set:

$$\delta = \beta + i\gamma = T = \log \frac{v_1}{v} + i\theta = r + i\theta \quad (4)$$

where:

$$r = \log \frac{v_1}{v} \quad \zeta = \xi + i\eta = w = \varphi + i\psi \quad (5)$$

the lower boundary of the strip on the w (in general, ζ) plane is the solid boundary of specified shape, along which we have some knowledge of the behaviour of θ (in general, γ). The upper boundary is the free surface, along which we have some knowledge of v and hence of r (in general, β). The process described above should therefore lead to a solution of the problem.

The general technique is similar to one based on the Cauchy integral formula, which has previously been used on free boundary problems, notably by Lauck [3] in the study of the flow over a sharp edged weir of infinite height.

We now rewrite equation (3) in terms of the particular problem. If a is the depth of flow a great distance upstream or downstream, then $\psi = av_1$ along the upper boundary DHC. Hence $\tau = av_1$. (As in the open-toe case, φ is taken as *increasing* in the direction of flow). Since $v = v_1$ along DHC, $\log v/v_1 = 0$, whence $\beta_\tau = 0$, and the second term of the integrand vanishes. We have $\zeta = w$, and we set $\xi^* = \varphi^*$. We can therefore write

$$T = r + i\theta = \frac{1}{2av_1} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_0 \operatorname{cosech} \frac{\pi}{2av_1} (\varphi^* - w) d\varphi^* \quad (6)$$

At this point a more detailed discussion of the computation process may be useful. The integration is performed step-by-step along the real axis of the w -plane, and from the viewpoint of the integration process φ^* is real and variable, whereas w is constant and may be complex. We can explore the behaviour of T along AEOFB, the real axis of the w plane, by setting $w = \varphi$, (pure real), and along OH, the imaginary axis, by setting $w = i\psi$, (pure imaginary). It will be convenient to describe the point represented by w as the « operating point ».

The form of equation (6) can be condensed by setting:

$$k = \frac{\pi\varphi_0}{2av_1} \quad t = \frac{\varphi^*}{\varphi_0} \quad t_j = \frac{w}{\varphi_0}$$

where φ_0 is the potential at the point F. Then we have:

$$T = \frac{k}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_0 \operatorname{cosech} k(t - t_j) dt \quad (7)$$

In the interval

$$\text{EOF } (-\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0, \text{ and } -1 \leq t \leq +1),$$

θ_0 is known as a function of s , the distance along the curve from the origin O, but not as a function of φ , since the velocity distribution along EOF is not yet known. Trial values of θ_0 must therefore be used within this interval, but outside the interval $\theta_0 = +\alpha$ for $t > +1$, $\theta_0 = -\alpha$ for $t < -1$, and in these regions the integral becomes elementary. From (7), we can write:

$$T = \frac{k}{\pi} \left[\int_1^{\infty} + \int_{-\infty}^{-1} + \int_{-1}^1 \right] \theta_0 \operatorname{cosech} k(t - t_j) dt = L + I,$$

where:

$$L = \frac{\alpha k}{\pi} \left[\int_1^{\infty} + \int_{-\infty}^{-1} \right] \operatorname{cosech} k(t - t_j) dt = \frac{\alpha}{\pi} \log \left\{ \operatorname{cosech} k(1 + t_j) + \coth k(1 + t_j) \right\} \left\{ \operatorname{cosech} k(1 - t_j) + \coth k(1 - t_j) \right\} = \frac{\alpha}{\pi} \log \left\{ \coth \frac{k(1 - t_j)}{2} \coth \frac{k(1 + t_j)}{2} \right\} \quad (8)$$

and:

$$I = \frac{k}{\pi} \int_{-1}^1 \theta_0 \operatorname{cosech} k(t - t_j) dt \quad (9)$$

So far we have not introduced the radius R_0 of the curve EOF. Of the four quantities v_1 , a , φ_0 and R_0 , only three are independent and so only three can be known initially. It is clear from the form of (8) and (9) that it is most convenient to choose initial values of v_1 , a , and φ_0 , (and hence k), leaving R_0 to be deduced from them as the argument proceeds.

We now use equations (8) and (9) to explore regions of particular interest; clearly the boundary AEOFB must be dealt with first, so as to obtain—by iterative treatment of (9)—correct values of θ_0 . Once these are obtained they can be inserted in (9), and direct numerical integration of this equation, without iteration, will then yield any information required about any other region.

1. The solid boundary AEOFB.

As a first trial for the velocity distribution round the curve EOF, it is convenient to set v constant and equal to v_1 ; then at any point on the curve $\theta_0 < s < \varphi^*$, whence $\theta_0/\alpha = \varphi^*/\varphi_0$, and:

$$\theta_0 = \alpha t \quad (10)$$

Equation (9) therefore becomes:

$$I = \frac{\alpha k}{\pi} \int_{-1}^1 t \operatorname{cosech} k(t - t_j) dt \quad (11)$$

which, although not an elementary integral, is readily solved numerically by computing the value of the integrand at the centre of each of, say, ten equal intervals into which the interval $-1 < t < 1$ has been divided.

A minor difficulty arises when $t = t_j$ and the integrand becomes infinite, although the integral is convergent. Over the small interval concerned, $-0.1 < (t - t_j) < 0.1$ and we may evaluate the integral by using the approximation:

$$\begin{aligned} \operatorname{cosech} x &= 1/\sinh x = 1/[x + (x^3/6)] \\ &= [1 - (x^2/6)]/x \end{aligned} \quad (12)$$

which is true for small values of x (and in our case $|x| < 0.1$). It is readily shown by this argument that the average value of the integrand over the interval $-0.1 < (t - t_j) < 0.1$ is equal to:

$$\frac{1}{k} - \frac{k}{1800} \quad (13)$$

and this value is added to the other average values of the integrand, taken at the centres of the other intervals.

Equation (9) takes the particularly simple form of equation (11) only on the first trial, in which $\theta_0 = \alpha t$. However the process was found to converge so quickly that in many cases only one iteration was necessary, in that subsequent iterations using the corrected values of θ_0 gave results very close to the first. The following table compares values of v_1/v_0 (Fig. 1) obtained at the first trial with those obtained at a second

FIG. 3

Variation of maximum pressure p_0 with R_0/a .
Variation de la pression maximale p_0 en fonction de R_0/a .

trial. Even in the worst case computed, with $k = 1$ and $2\alpha = 90^\circ$, i.e. $R_0/a = 1.78$, the difference was only 2.1 %; for higher values of R_0/a , such as are more commonly used in practice, the difference is negligibly small.

Having obtained a numerical solution of equations (8) and (9) along AEOFB, we now have T , and hence v/v_1 , as a function of t . This immediately leads to the velocity v_0 at O , and the corresponding pressure p_0 , equal to

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 [1 - (v_0^2/v_1^2)].$$

The ratio $p_0/(1/2 \rho v_1^2)$ is plotted in Figure 3.

The above and all other calculations have been made for two values, 45° and 90° , of the total deflection angle 2α .

TABLE I

k	2α	R_0/a	v_1/v_0		(% Increase)
			1st trial	2nd trial	
1	45°	2.40	1.537	1.545	0.5
1	90°	1.78	2.365	2.415	2.1
2	45°	4.17	1.316	1.322	0.5
2	90°	2.68	1.731	1.764	1.9
4	45°	7.48	1.164	1.165	0.1
4	90°	4.31	1.356	1.365	0.7
6	45°	10.76	1.108	1.108	—
6	90°	5.93	1.228	1.229	0.1

2. The ratio R_0/a and the distribution of θ_0/α .

So far v/v_1 is known as a function of t , but not as a function of distance along the boundary AEOFB, and we do not yet know θ_0/α as a function of t . If s is the distance along this boundary to the right of O, then we have:

$$\Delta s = \Delta \varphi / v = R_0 \Delta \theta_0$$

If we substitute $t = \varphi / \varphi_0$ and $k = \pi \varphi_0 / 2 a v_1$ as before, and sum the above increments from O to some point G between O and F, then

$$\frac{R_0 \theta_0}{a} = \frac{2k}{\pi} \sum_0^G \frac{\Delta t}{v/v_1} \quad (14)$$

If G coincides with F, then:

$$\frac{R_0}{a} = \frac{2k}{\pi \alpha} \sum_0^F \frac{\Delta t}{v/v_1} \quad (15)$$

and from (14) and (15) we have:

$$\frac{\theta_0}{\alpha} = \sum_0^G \frac{\Delta t}{v/v_1} \bigg/ \sum_0^F \frac{\Delta t}{v/v_1} \quad (16)$$

From (15) we obtain R_0/a , which is used as the independent variable in Figures 3, 5-7, since it will be known by the designer in advance. Equation (16) yields, after a sufficient number of iterations, (usually only one) correct values of θ_0/α , which may now be inserted in equation (9) for direct application to any other region of the flow, without the need for iteration.

Since v/v_1 and θ_0/α are now both known as functions of t , we can obtain the velocity (and hence pressure) distribution along AEOFB. It was found that for $R_0/a > 2$, and for all values of α , the pressure at E and F was close to $0.75 p_0$, and the distribution along EOF was very nearly parabolic in form, when plotted against θ_0/α (Fig. 4). Along AE and FB the distribution vari-

FIG. 4

Pressure variation along the solid boundary AEOFB.
Variation des pressions suivant la limite solide AEOFB.

ed somewhat with R_0/a and α , but for $R_0/a > 2$ all pressure distributions were sufficiently close to the linear one shown in Figure 4 for it to be recommended as a design standard.

On the "ski-jump" spillway the solid surface usually ends abruptly at F and the pressure distribution along OF would be generally similar to the lower curve LF on Figure 4. This particular variant of the problem is not specifically dealt with in this study, but certain general remarks can be made about it. This will be done in the final section of this paper.

3. The interdependence of θ_0/α and v/v_1 .

Since the integrals of equations (8) and (9) may in general be complex, the iteration process might be expected to yield, independently, values of θ_0/α and v/v_1 . This is not so when the operating point lies on EOF, where θ_0 is not yet known as a function of t . In this case the integration yields valid results only for v/v_1 , from which θ_0/α must be deduced by equation (16). Thus the integrals indicate that T is pure real over the arc EOF, i.e. that $\theta_0 = 0$, whereas in fact θ_0 varies between $-\alpha$ and $+\alpha$.

The arc EOF is therefore analysed by obtaining v/v_1 from the real component of T, rejecting the imaginary component, if any. Hence θ_0/α from (16); these values of θ_0/α are then fed back into equation (9) for the second iteration.

4. The centre line OH.

We now have θ_0 as a function of t , i.e.

$$\theta_0/\alpha = f(t).$$

Along OH $w = i\psi = icav_1$, where $0 \leq c \leq 1$. Then $t_j = ic\pi/2k$, and from (8):

$$L = \frac{\alpha}{\pi} \log \left\{ \coth \frac{k - ic\pi/2}{2} \coth \frac{k + ic\pi/2}{2} \right\} \\ = \frac{\alpha}{\pi} \log \left\{ \frac{\cosh k + \cos c\pi/2}{\cosh k - \cos c\pi/2} \right\} \quad (17)$$

which is real and positive. From (9) we have:

$$I = \frac{k}{\pi} \int_{-1}^1 \theta_0 \operatorname{cosech} k(t - t_j) dt \\ = \frac{k\alpha}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t) (\sin kt \cos c\pi/2 - i \cosh kt \sin c\pi/2)}{\sinh^2 kt + \sin^2 c\pi/2} dt$$

The imaginary part of this integrand is an odd function of t , so that the corresponding part of the integral vanishes. We therefore have

$$I = \frac{k\alpha}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t) \sinh kt \cos c\pi/2}{\sinh^2 kt + \sin^2 c\pi/2} dt \quad (18)$$

which, like L, is pure real, confirming that $\theta = 0$

FIG. 5

The thickening of the jet at the centre line OH.
The variation of y_0/a with R_0/a .

Epaississement du jet à l'axe médian OH.
Variation de y_0/a en fonction de R_0/a .

across the line OH. In this case therefore the integrals L and I yield correct values of θ as well as of v/v_1 .

We now have v/v_1 as a function of c , i.e. of ψ . Hence from the relation $\Delta y = \Delta\psi/v$ we obtain the velocity and pressure distribution across the interval OH, and the length of the interval itself, y_0 . Finally, as in the open-toe case, we obtain dimensionless coefficients:

$$M' = \frac{M}{\frac{1}{2} \rho v_1^2 a^2}; \quad F' = \frac{F}{\frac{1}{2} \rho v_1^2 a}; \quad \bar{y}' = \frac{M'}{F'}$$

where M is the bending moment about O , and F the thrust, on a strip of unit width drawn along OH. In Figures 5 and 6 y_0/a and M' are plotted against R_0/a . The ratio $\bar{y}'/y_0$ was found to vary only slightly, as the following table shows:

Values of F may be deduced from these values of $\bar{y}'$, making a separate graph for F unnecessary. As before, M and F derive from dynamic pressure alone and must be added to corresponding quantities derived from hydrostatic pressure.

5. The free surface DHC.

Along this line w is complex and the integration becomes more involved. However, results for the open-toe case have suggested that DHC approximates to a circular arc; we shall therefore consider only the radius of curvature at H , and obtain it by considering the velocity gradient

FIG. 6

Variation of the dimensionless bending moment per unit width (M') with R_0/a .

Variation du moment de flexion adimensionnel par unité de largeur (M'), en fonction de R_0/a .

TABLE II

	R_0/a	0	2	4	6	8	≥ 10
$\frac{\bar{y}}{y_0}$	$2\alpha = 45^\circ$	0.385	0.374	0.363	0.354	0.348	0.345
	$2\alpha = 90^\circ$	0.396	0.381	0.368	0.358	0.351	0.350

FIG. 7

The relation between the radius R_1 of the free surface at H , and the radius R_0 of EOF.
Relation entre le rayon R_1 de la surface libre en H , et le rayon R_0 de EOF.

along OH . At any point on OH , we can write the well-known equation:

$$\frac{dv}{dy} = \frac{v}{R}$$

where R is the radius of curvature of the streamline. We set $v' = v/v_1$ and substitute $v = \partial\psi/\partial y$, $\psi = cav_1$, whence

$$\frac{dv'}{dc} = \frac{a}{R}$$

Also, $L + I = r = \log(v_1/v) = -\log v'$. At H , we note that $v' = 1$ and set $R = R_1$. Hence finally:

$$\frac{dr}{dc} + \frac{a}{R_1} = 0 \quad (19)$$

From (17) and (18), we have $r = L + I$ as a function of c . Differentiating, and setting $c = 1$, since $\psi = av_1$ at H , we obtain:

$$\frac{a}{R_1} = -\frac{dr}{dc} = a \operatorname{sech} k + \frac{ak}{2} \int \frac{f(t) \sinh kt dt}{\cosh^2 kt} \quad (20)$$

Since a/R_1 is required only for sketching in the upper streamline, we shall assume $f(t) = t$, i.e. the first trial value of θ_0/α . The integral in (20) then becomes elementary, for:

$$\begin{aligned} \int x \operatorname{sech} x \tanh x dx &= -x \operatorname{sech} x + \int \operatorname{sech} x dx \\ &= -x \operatorname{sech} x + \tan^{-1}(\sinh x) \end{aligned}$$

From this integral and from (2) we obtain:

$$\frac{a}{R_1} = -\frac{dr}{dc} = \frac{a}{k} \tan^{-1}(\sinh k). \quad (21)$$

The result will be a little less than the correct value, but not by more than 2 % (cf. Table I). In Figure 7 the values of a/R_0 and a/R_1 obtained from (15) and (21) are plotted against each other. When $R_0/a \rightarrow 0$, i.e. when EOF shrinks to a point, $k \rightarrow 0$ and $a/R_1 \rightarrow a$, as Figure 7 shows.

The free vortex approximation.

As in the open-toe case, the flow approximates quite closely to a free vortex when the ratio a/R_0 is small. In the present study the free vortex approximation is even more directly applicable than in the open toe case, since both a and R_0 are known initially and R_1/a , y_0/a , M' , F' , and $\bar{y}'$ may be deduced from them as in equations (17, 18, 19, 20) of reference [1].

In Figures 3, 5-7 the results of this approximation are plotted as broken lines. In all cases the results are close to those given by the complete theory when $R_0/a > 6$; below this value the results for the two theories diverge considerably. This divergence is inevitable, as Figure 7 clearly shows: in a free vortex $R_1 < R_0$ for all values of R_0 , but in the spillway problem R_1 becomes equal to, then greater than, R_0 as $R_0 \rightarrow 0$ and the curve EOF shrinks to a point.

An interesting feature of the free vortex approximation emerges when we further consider the $R_0 - R_1$ relationship. From equation (17) of reference [1] we have:

$$\frac{R_0}{a} = \frac{R_1}{a} e^{a/R_1} \quad (22)$$

from which it can easily be shown that R_0/a has a minimum value, equal to e , when

$$R_1/a = 1.$$

This conclusion is verified by Figures 3, 5-7, on which the lines representing the free vortex theory terminate when $R_0/a = e$. The theory cannot offer any conclusions at all when

$$R_0/a < e.$$

The elementary approximation.

The most elementary possible approach to the problem is to assume that the velocity is constant and equal to v_1 along the line OH , that

OH = a , that the pressure at O is accordingly equal to

$$\rho v_1^2 / R_0,$$

and that the pressure distribution between O and H is linear. If these assumptions are adopted, it follows that $F = \frac{1}{2} \rho v_1^2 / 2 R_0$, i.e. that

$$F' = F / \frac{1}{2} \rho v_1^2 a = a / R_0 \quad (23)$$

and that $M = \frac{1}{2} \rho v_1^2 / 6 R_0$, i.e. that

$$M' = M / \frac{1}{2} \rho v_1^2 a^2 = a / 3 R_0 \quad (24)$$

Equation (24) is plotted in Figure 6 as a chain-dotted line. It shows that R_0/a would have to be greater than 10 for even moderately good agreement to exist between this approximation and the complete theory.

III. — EXPERIMENTAL RESULTS

Tests were carried out in a glass sided flume 6 inches wide. Spillway sections were used having an angle 2α of 45° ; each toe section was fitted with six pressuresappings disposed along the longitudinal centre line of the curved surface. As in the open-toe case, the depth a was obtained from the equation.

$$a = \frac{Q}{b \sqrt{2gH_0}} \quad (25)$$

where Q is the discharge, b is the channel width, and H_0 is as shown in Figure 1. (A trial value of a must first be taken so as to lead to a value of y_0 and hence H_0). The dynamic pressure head at any point is obtained by subtracting $y \cos \lambda$ from the piezometric head h_1 (Fig. 1). Figure 3 shows values of the maximum pressure p_0 obtained in this way; the measured pressure distribution round the curve for $R_0/a = 7.27$ is plotted in Figure 4.

From Figures 3 and 4 it appears that measured values of pressure are in good agreement with the theory. In particular the pressure distribution round EOF is symmetrical, and there is no evidence of the pressure concentration down-

stream of O that was a feature of the open-toe experimental results [1]. It appears that this pressure "bulb" is associated with the depression of the streamline EOF in the open-toe case, and does not occur when EOF is a solid boundary.

On Figure 5 are plotted measured values of the ratio y_0/a . At high values of R_0/a , y_0 was difficult to measure accurately; at lower values, the points fit closely to a curve whose ordinates are 2% higher than the theory indicates for $2\alpha = 45^\circ$. Flow resistance could readily account for this small margin.

The good agreement between measured and predicted values of y_0 and p_0 implies that M' and F' will be as predicted by the theory; also the symmetrical distribution of dynamic pressure head along EOF clearly justifies the assumption made in the analysis that gravity can be neglected.

The final conclusion is that the theoretical results as plotted in Figures 3-7 may safely be used as a basis for design. The few matters of detail remaining will be dealt with in the next section.

IV. — CONCLUSIONS AND DESIGN RECOMMENDATIONS

1. It is assumed that the designer's needs are met with sufficient accuracy if he can obtain:

- i) the maximum depth y_0 ;
- ii) the thrust and bending moment on a strip of unit width lying along the centre line OH;
- iii) the pressure distribution along AEOFB; and,
- iv) enough information to sketch the curve DHC.

Of these, i) and ii) are met by Figures 5 and 6, iii) by Figures 3 and 4, and iv) by Figure 7. When $R_0/a > 6$, it will be found that DHC approximates to a circular arc. When $R_0/a < 6$, knowledge of the central radius R_1 enables the curve to be sketched with reasonable accuracy.

2. A good approximation may be made to the pressure distribution along any line normal to AEOFB by using the dimensionless equation:

$$\frac{dp'}{dn'} = \frac{2v'^2}{R'} = \frac{2(1-p')}{R'}$$

to evaluate the pressure gradient at the ends of the line. The terms of this equation

— $p' = p / \frac{1}{2} \rho v_1^2$, $v' = v / v_1$, $R' = R / a$, $n' = n / a$, n = distance along the normal—are known accurately at the solid boundary, and approximately at the water surface.

All pressures referred to so far are dynamic pressures; hydrostatic thrust and bending moment as indicated by Figure 6, reference [1], must be added to the values of M and F given by Figure 6 and Table II.

3. No detailed information is presented for the case where the solid surface ends abruptly at F, as in the ski jump spillway. However it is reasonable to assume that the pressure distribution along OH remains substantially unchanged.

Exact knowledge of the pressure distribution LF, Figure 4, would enable the downward deflection of the outgoing jet (below the line $\theta = \alpha$) to be estimated from the summation of the pressure defect shown cross hatched in Figure 4. If, in the absence of more exact information, LF is assumed to be a parabola, it is readily shown that the area LMF gives rise to a force, resolved normal to FB, of $3 R_0 p_0 (\alpha - \sin \alpha) / 2 \alpha^2$. The area MNF gives rise to another force $3 p_0 a / 8$; dividing the sum of these forces by $Q_0 v_1 = a \rho v_1^2$, we obtain for the deflection angle:

$$\Delta \alpha = \frac{3 (\alpha - \sin \alpha)}{4 \alpha^2} \frac{R_0}{a} \frac{p_0}{\frac{1}{2} \rho v_1^2} + \frac{3}{16} \frac{p_0}{\frac{1}{2} \rho v_1^2} \quad (26)$$

the terms of which are readily obtained from

Figure 3. The result is approximate, but offers some guidance; it does not of course depend on an assumption that OH is vertical.

4. Adjustments for flow resistance and aeration can be made precisely as discussed in [1]; the additional remark may be made here that for lengthy chutes and spillways the adjustment for resistance losses may not be small, and the losses should be examined in enough detail for a and H_0 to be predicted with sufficient accuracy.

5. The theoretical analysis is in good agreement with experiment despite its neglect of gravitational effects. When $R_0/a > 6$, the theory gives results virtually the same as those of a theory which treats the line OH as if it were a radial line in a free vortex; but when $R_0/a < 6$ the free vortex approximation gives no results at all.

RÉFÉRENCES

- [1] F. M. HENDERSON : Flow at the toe of a spillway. I. The "Open-Toe" spillway. *La Houille Blanche*, n° 6, nov. 1962, p. 728-750.
- [2] L. C. WOODS : Compressible subsonic flow in two-dimensional channels with mixed boundary conditions. *Quarterly Jnal. Mech. and App. Maths.*, V. 7, p. 3 (september 1954).
- [3] A. LAUCK : Ueberfall über ein Wehr. *Zeitschrift angew. Math. und Mech.*, V. 5, p. 1 (1925).

NOTRE FRONTISPICE

(Cf. page 2)

HERTZ (1857-1894)

Une nouvelle époque s'ouvrit pour la science et la technique quand, en 1886, à Karlsruhe, Hertz expliqua le comportement, le mode de génération et de propagation des ondes électromagnétiques : ces découvertes, qui confirmaient la théorie électromagnétique de la lumière ébauchée par Faraday et Maxwell dès 1865 et établissant l'identité de transmission entre l'électricité, la lumière et la chaleur rayonnante, devaient devenir plus tard pour Marconi et pour d'autres les bases de la théorie de la télégraphie sans fil, puis de toutes les radiocommunications.

Heinrich Rudolf Hertz naquit en 1857 à Hambourg, où son père était sénateur. Étudiant à Dresde en 1876, puis à Munich en 1877, en mars 1880 il était reçu docteur à l'Université de Berlin; au laboratoire de physique de cette Université, il fut alors pendant trois ans l'assistant de Helmholtz.

Nous le retrouvons en 1883 « lecteur » de physique théorique à l'Université de Kiel, puis professeur de physique expérimentale à l'Ecole Technique Supérieure de Karlsruhe en 1885. C'est alors qu'il réalise son excitateur, découvre les ondes qui portent son nom et essaie de les diriger à l'aide de miroirs paraboliques.

Déjà devenu célèbre par ses travaux sur les ondes magnétiques, Hertz les étudie encore grâce à son oscillateur et montre qu'elles ont toutes les propriétés de la lumière : réflexion, interférences, diffraction, polarisation et vitesse de propagation. Dans le même temps, il montre le rôle du diélectrique dans l'induction et découvre l'effet photo-électrique en remarquant que l'étincelle se forme plus facilement quand l'éclateur de son résonateur reçoit de la lumière ultra-violet.

En 1889, Hertz enseigne la physique à l'Université de Bonn et, en 1892, il observe que les électrons peuvent traverser la matière. Et en 1894, il meurt à Bonn, âgé seulement de trente-sept ans.

Après sa mort, parurent ses « Principes de Mécanique » (1894) basés sur la moindre action, et ses travaux furent réunis sous le titre de *Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft* (Recherches sur la propagation de la force électrique) (1898) en une série de douze mémoires insérés dans les *Annales de Wiedemann*.

HERTZ (1857-1894)

Hertz's explanation of the behaviour, mode of generation and propagation of electro-magnetic waves, in Karlsruhe in 1886 ushered in a new era for science and engineering. These discoveries, confirming the electro-magnetic theory of light outlined by Faraday and Maxwell as far back as 1865 and establishing that electricity, light and radiant heat are all transmitted in the same way was later to become, for Marconi and others, the basis of wireless theory and then of all radio-communications.

Heinrich Rudolf Hertz was born in 1857 in Hamburg where his father was a senator. Studying at Dresden in 1876 and Munich in 1877 he received his doctorate in March 1880 from the University of Berlin. He then spent three years in the physics laboratory of this University as assistant to Helmholtz.

In 1883 he became a Reader in theoretical physics at Kiel University and then, in 1885, Professor of experimental physics at the Karlsruhe "Technische Hochschule". It was at this time that he produced his exciter, discovered the waves which bear his name and tried to direct them with the aid of parabolic mirrors. Already famous for his work on magnetic waves Hertz pursued his studies in this field with the help of his oscillator and was able to show that they possess all the properties of light, including reflection, refraction, interference, diffraction, polarisation and velocity. At this time too he demonstrated the role of the insulating medium in induction and discovered the photo-electric effect when he noticed the spark was more easily produced when the spark gap of his resonator was exposed to ultra-violet light.

In 1889 Hertz was teaching physics at Bonn University where in 1892 he noted that electrons are capable of passing through matter. He was a mere thirty-seven years of age when he died in Bonn in 1894.

After his death his "Principles of Mechanics", based on the principle of least effort, were published and his works were collected in a series of twelve papers in Wiedemann's "Annals" under the general title of *Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft* (Investigations into the propagation of electrical energy).

L'écoulement au pied d'un évacuateur de crues

II. — DÉVERSOIR A JET UNIQUE SANS GALERIE SOUS-JACENTE (DÉVERSOIR « A PIED SOLIDE »)

PAR

F. M. HENDERSON,

ET

D. G. TIERNEY,

MAÎTRE DE CONFÉRENCES,

CONFÉRENCIER,

UNIVERSITÉ DE CANTERBURY, CHRISTCHURCH, NOUVELLE-ZÉLANDE

UNIVERSITÉ DE LA NOUVELLE-GALLES DU SUD, SYDNEY

(Voir les figures dans le texte anglais, pages 42 à 50.)

L'emploi d'un procédé d'itération, mis au point par L. C. Woods, permet d'obtenir une solution théorique complète du problème de l'écoulement sur la surface solide courbe située au pied d'un

évacuateur de crues à ciel ouvert. On a obtenu des résultats expérimentaux en bon accord avec les valeurs théoriques.

I. — INTRODUCTION

Une étude précédente [1]* avait porté sur les résultats expérimentaux et théoriques obtenus pour l'écoulement sur un évacuateur « à pied ouvert », c'est-à-dire implanté au-dessus du débouché d'une galerie traversant de part en part la base de l'ouvrage d'évacuation. La présente étude examine le cas, plus courant, du déversoir « à pied solide », c'est-à-dire se présentant sous la forme d'une surface courbe solide. L'objectif reste le même dans les deux cas : il s'agit d'obtenir une solution complète, déterminant les répartitions des pressions et des vitesses,

l'épaississement local du jet à mesure qu'il est dévié par la surface courbe, et, de là, la poussée et le moment de flexion sur les parois latérales de l'évacuateur.

Le problème est rendu intrinsèquement plus complexe que celui du déversoir « à pied ouvert », par la présence d'une limite solide d'un profil bien déterminé. L'auteur montre comment on réussit, malgré tout, moyennant un procédé d'itération, à aboutir à une solution; les résultats expérimentaux se trouvent être en bon accord avec les valeurs théoriques.

II. — ANALYSE THÉORIQUE

La situation est celle représentée par la figure 1. Ainsi que dans l'analyse du déversoir « à pied ouvert », la vitesse est supposée constante et égale à v_1 sur toute la longueur du filet liquide DHC constituant la limite supérieure de

l'écoulement; l'eau est supposée être non-visqueuse, de sorte que l'écoulement est irrotationnel. La limite solide AEOFB se compose de deux sections rectilignes, AE et FB, raccordées par une courbe circulaire EOF de rayon égal à R_0 . Comme dans l'analyse précédente, le plan physique est reproduit sur la figure 2a, avec son origine en O, et l'axe des ordonnées coïncidant avec l'axe de symétrie OH. De même, les figu-

* Les références bibliographiques sont à la fin du texte anglais, page 50.

res 2 b, 2 c et 2 d représentent trois autres plans intéressant le problème de la représentation du schéma d'écoulement; il s'agit des plans du potentiel complexe :

$$w = \varphi + i\psi \quad (1)$$

et du plan correspondant à :

$$T = \log \left(v_1 \frac{dz}{dw} \right) = \log (v_1/v) + i\theta \quad (2)$$

Mais cette fois, le plan ζ est disposé de manière à permettre la représentation du champ d'écoulement à l'intérieur d'une bande infinie, comme pour le plan w .

La difficulté particulière de ce problème est que, contrairement à ce qui se passait dans le cas du déversoir « à pied ouvert », la vitesse suivant la limite solide EOF, ne reste pas nécessairement constante. En effet, sa valeur sera minimale en O, de sorte que la ligne EOF, sur le plan T (fig. 2 d) devient une ligne courbe convexe vers la droite.

Le fait que, par conséquent la figure sur le plan T n'est pas un polygone, interdit l'emploi de la transformation de Schwarz-Cristoffel, et aucune solution élémentaire n'est donc possible.

Nous aurons recours à un procédé par itération, basé sur un théorème dérivé de la formule intégrale de Cauchy. Ce procédé et le théorème ont tous les deux été formulés par Woods [2]. Le théorème a trait à la solution du problème général de représentation à l'intérieur d'une bande infinie et située sur un plan (ζ) donné; il est présenté de la manière suivante :

Théorème de Woods :

Soit $\delta(\zeta) = \beta + i\gamma$ une fonction harmonique à l'intérieur de la bande :

$$-\infty \leq \xi \leq \infty, \quad 0 \leq \eta \leq \tau$$

sur le plan correspondant à $\zeta = \xi + i\eta$.

En admettant que certaines conditions soient respectées, la valeur δ , en tout point P (ζ) à l'intérieur de la bande, sera donnée par la relation :

$$\delta(\zeta) = \frac{1}{2\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \gamma_0 \operatorname{cosech} \frac{\pi}{2\tau} (\xi^* - \zeta) + \beta_\tau \operatorname{séch} \frac{\pi}{2\tau} (\xi^* - \zeta) \right\} d\xi^* \quad (3)$$

avec :

$$\gamma_0 = \lim_{\eta \rightarrow 0} \gamma(\xi^*, \eta),$$

$$\beta_\tau = \lim_{\eta \rightarrow 0} \beta(\xi^*, \tau - \eta).$$

Ces conditions sont mathématiquement formelles, et, comme telles, se trouvent respectées dans la plupart des écoulements normaux, y compris celui faisant l'objet de la présente étude. Nous ne les examinerons donc pas ici; le lecteur trouvera toutes les précisions utiles, à cette fin, dans l'étude originale de Woods.

L'importance du théorème est la suivante : lorsque δ est une fonction harmonique de ζ , telle que la partie réelle β est connue suivant la limite supérieure, et que la partie imaginaire γ , est également connue suivant la limite inférieure d'une bande infinie se trouvant à l'intérieur du plan ζ , l'équation (3) fournit une solution pour δ en n'importe quel point situé à l'intérieur de la dite bande. Il s'agit d'une solution directe, pour laquelle aucun procédé par itération n'est nécessaire.

Mais, lorsque les valeurs de β et de γ , suivant les limites de la bande, ne sont connues qu'approximativement ou partiellement, l'équation (3) devient la base d'un procédé par itération. On introduit des valeurs d'essai pour γ_0 et β_τ , dans l'équation et l'on résout ensuite celle-ci en fonction d'une série de valeurs de ζ , s'étendant de part et d'autre des limites de la bande. On obtient ainsi pour γ_0 et β_τ des valeurs améliorées qui peuvent ensuite servir de données de base pour un nouveau procédé par itération.

Cette manière de procéder se prête évidemment bien à la résolution des problèmes de limites libres du genre de celui faisant l'objet de la présente étude. Car, si nous écrivons :

$$\delta = \beta + i\gamma = T = \log \frac{v_1}{v} + i\theta = r + i\theta \quad (4)$$

où :

$$r = \log \frac{v_1}{v}$$

$$\zeta = \xi + i\eta = w = \varphi + i\psi \quad (5)$$

la limite inférieure de la bande située sur le plan w (généralement : le plan ζ) est constituée par la limite solide, de forme bien déterminée, suivant laquelle nous connaissons, dans une certaine mesure, le comportement de θ (généralement : γ). La limite supérieure est représentée par la surface libre, suivant laquelle nous avons également une certaine connaissance des valeurs pour v et, par conséquent, pour r (généralement : β). Ce procédé devrait donc, en principe, conduire à la solution du problème.

La méthode générale ressemble à une méthode basée sur la formule intégrale de Cauchy, qui a déjà été employée pour la résolution des problèmes intéressant des limites libres, ceci notamment par Lauck [3], dans son étude sur l'écoulement par-dessus un déversoir à mince paroi, de hauteur infinie.

Ecrivons maintenant de nouveau l'équation (3) en fonction du problème particulier. Soit a la profondeur de l'écoulement, loin à l'amont ou à l'aval : ceci nous donne $\psi = av_1$, suivant la limite supérieure DHC, d'où $\tau = av_1$ (comme dans le cas du déversoir « à pied ouvert », la valeur pour φ est supposée *augmenter* dans le sens de l'écoulement). Puisque $v = v_1$ suivant DHC, $\log v/v_1 = 0$, d'où $\beta_\tau = 0$, et le deuxième terme de l'intégrand disparaît. Nous avons $\zeta = w$, et nous posons $\xi^* = \varphi^*$, ce qui nous permet d'écrire :

$$T = r + i\theta = \frac{1}{2av_1} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_0 \operatorname{coséch} \frac{\pi}{2av_1} (\varphi^* - w) d\varphi^* \quad (6)$$

Un examen plus détaillé du procédé de calcul paraît être utile à ce stade. L'intégration s'effectue, par étapes successives, suivant l'axe réel du plan w , et, pour ce qui intéresse le procédé d'intégration, la valeur de φ^* est réelle et variable, alors que celle de w est constante, et peut être complexe. En posant $w = \varphi$ (pure, réelle), nous pouvons examiner le comportement de T suivant l'axe réel du plan w , AEOFB, et, en écrivant $w = i\psi$ (pure, imaginaire), le comportement de T suivant l'axe imaginaire OH. Le point représenté par w pourra utilement être désigné comme le « point de fonctionnement ».

Nous pouvons exprimer l'équation (6) sous une forme plus condensée, en posant :

$$k = \frac{\pi\varphi_0}{2av_1} \quad t = \frac{\varphi^*}{\varphi_0} \quad t_j = \frac{w}{\varphi_0}$$

où φ_0 correspond au potentiel au point F. Ceci nous donne :

$$T = \frac{k}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_0 \operatorname{coséch} k(t - t_j) dt \quad (7)$$

Dans l'intervalle

$$\text{EOF} (-\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0 \text{ et } -1 \leq t \leq +1),$$

θ_0 est connue en tant que fonction de s , laquelle représente la distance suivant la courbe, à partir de l'origine O; par contre, θ_0 est inconnue en tant que fonction de φ , puisque la répartition des vitesses suivant EOF reste encore inconnue. Nous devons donc employer des valeurs d'essai, pour θ_0 , à l'intérieur de cet intervalle; à l'extérieur de celui-ci, par contre, $\theta_0 = +\alpha$, pour $t > +1$, $\theta_0 = -\alpha$ pour $t < -1$, et, dans ces régions, l'intégrale devient élémentaire.

Nous pouvons écrire, à partir de l'équation (7) :

$$T = \frac{k}{\pi} \left[\int_1^{\infty} + \int_{-\infty}^{-1} + \int_{-1}^1 \right] \theta_0 \operatorname{coséch} k(t - t_j) dt \\ = L + I,$$

avec :

$$L = \frac{\alpha k}{\pi} \left[\int_1^{\infty} + \int_{-\infty}^{-1} \operatorname{cosech} k(t - t_j) dt \right] \\ = \frac{\alpha}{\pi} \log \left\{ \operatorname{coséch} k(1 + t_j) + \coth k(1 + t_j) \right\} \\ \left\{ \operatorname{coséch} k(1 - t_j) + \coth k(1 - t_j) \right\} \\ = \frac{\alpha}{\pi} \log \left\{ \coth \frac{k(1 - t_j)}{2} \coth \frac{k(1 + t_j)}{2} \right\} \quad (8)$$

et :

$$I = \frac{k}{\pi} \int_{-1}^1 \theta_0 \operatorname{coséch} k(t - t_j) dt \quad (9)$$

Nous n'avons pas encore fait intervenir le rayon R_0 de la courbe EOF. Trois seulement, d'entre les quatre quantités v_1 , a , φ_0 , et R_0 , sont indépendantes, et ce ne sont donc que ces trois mêmes quantités que nous pouvons connaître au départ. Evidemment, d'après la forme des équations (8) et (9), le mieux est de choisir des valeurs initiales pour v_1 , a , et φ_0 (et, par suite, pour k), en en déduisant R_0 plus tard, au cours du développement de l'argument.

Nous explorerons maintenant, au moyen des équations (8) et (9), les régions présentant un intérêt particulier; nous considérerons évidemment la limite AEOFB en premier lieu, afin d'obtenir, par application d'un procédé par itération à l'équation (9), des valeurs correctes pour θ_0 . Nous pourrions, ensuite, introduire ces valeurs dans l'équation (9), et, enfin, aborder l'intégration numérique directe de celle-ci (sans itération), ce qui nous donnera toutes les données voulues pour n'importe quelle autre région.

1. La limite solide AEOFB.

Pour un premier essai de détermination de la répartition des vitesses autour de la courbe EOF, il convient de prendre pour v une valeur constante et égale à v_1 . Dans ces conditions, en n'importe quel point de la courbe, $\theta_0 < s < \varphi^*$, d'où $\theta_0/\alpha = \varphi^*/\varphi_0$, et :

$$\theta_0 = \alpha t \quad (10)$$

L'équation (9) devient, par conséquent :

$$I = \frac{\alpha k}{\pi} \int_{-1}^1 t \operatorname{coséch} k(t - t_j) dt \quad (11)$$

laquelle, sans être une intégrale élémentaire, se résout cependant numériquement sans difficulté, en calculant la valeur de l'intégrand au centre de, par exemple, chacun d'entre une dizaine d'intervalles égaux, obtenus par la division de l'intervalle $-1 < t < 1$. Une difficulté d'ordre mineur se présente lorsque $t = t_j$ et que l'intégrand

devient infini, bien que l'intégrale soit convergente. Dans le petit intervalle intéressé,

$$-0,1 < (t - t_j) < 0,1$$

et nous pouvons évaluer l'intégrale au moyen de l'approximation :

$$\begin{aligned} \operatorname{coséch} x &= 1/\sinh x = 1/[x + (x^3/6)] \\ &= [1 - (x^2/6)]/x \end{aligned} \quad (12)$$

laquelle est valable pour les faibles valeurs de x (et, dans le cas considéré, pour $|x| < 0,1$). On démontre aisément, au moyen de cet argument, que la valeur moyenne de l'intégrand, dans l'intervalle $-0,1 < (t - t_j) < 0,1$, est égale à :

$$\frac{1}{k} - \frac{k}{1\,800} \quad (13)$$

On ajoute cette valeur aux autres valeurs moyennes de l'intégrand, prises aux centres des autres intervalles.

L'équation (9) ne prend la forme relativement simple, de l'équation (11), que lors du premier stade d'approximation pour lequel $\theta_0 = \alpha t$. Il s'est cependant trouvé que le procédé convergeait si rapidement, qu'une seule itération suffisait, dans bien des cas, en ce sens que des itérations successives, dans lesquelles l'on faisait intervenir les valeurs corrigées de θ_0 , fournissaient des résultats très voisins de ceux de la première approximation. Le tableau ci-dessous confronte les valeurs du rapport v_1/v_0 (fig. 1) obtenues dans le premier stade, avec celles obtenues dans un deuxième stade. Même dans le cas le plus défavorable, avec $k = 1$, et $2\alpha = 90^\circ$, soit $R_0/a = 1,78$, la différence n'a atteint que 2,1 % ; elle devient négligeable aux plus grandes valeurs de R_0/a , lesquelles sont plus couramment employées dans la pratique.

Ayant obtenu une solution numérique pour les équations (8) et (9), suivant AEOFB, nous connaissons maintenant T , et par là, également v/v_1 , en fonction de t . Ceci conduit directement à la vitesse v_0 , en O , et à la pression P correspondante, laquelle est égale à

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 [1 - (v_0^2/v_1^2)].$$

La figure 3 représente des valeurs du rapport $p_0/\frac{1}{2} \rho v_1^2$.

Ce calcul, et l'ensemble des calculs précédents, ont été effectués pour deux valeurs de l'angle de déflexion total 2α : 45° et 90° .

2. Le rapport R_0/a , et la répartition de θ_0/a .

Nous connaissons, pour le moment, v/v_1 en fonction de t , mais pas encore en fonction de la distance suivant la limite AEOFB; nous ne connaissons pas non plus θ_0/α en fonction de t .

Soit s la distance suivant la limite précitée, en allant vers la droite, à partir de O ; nous avons :

$$\Delta s = \Delta \varphi / v = R_0 \Delta \theta_0$$

En substituant, comme précédemment

$$t = \varphi / \varphi_0, \text{ et } k = \pi \varphi_0 / 2 \alpha v_1,$$

et en faisant la somme des accroissements précédents à partir de O et jusqu'à un point quelconque G situé entre O et F , nous obtenons :

$$\frac{R_0 \theta_0}{a} = \frac{2k}{\pi} \sum_0^G \frac{\Delta t}{v/v_1} \quad (14)$$

TABEAU I

k	2 α	R ₀ /a	v ₁ /v ₀		(%) Accroissement
			1 ^{er} stade d'approximation	2 ^e stade d'approximation	
1	45°	2,40	1,537	1,545	0,5
1	90°	1,78	2,365	2,415	2,1
2	45°	4,17	1,316	1,322	0,5
2	90°	2,68	1,731	1,746	1,9
4	45°	7,48	1,164	1,165	0,1
4	90°	4,31	1,356	1,365	0,7
6	45°	10,76	1,108	1,108	—
6	90°	5,93	1,228	1,229	0,1

et, pour G coïncidant avec F :

$$\frac{R_0}{a} = \frac{2k}{\pi\alpha} \sum_0^F \frac{\Delta t}{v/v_1} \quad (15)$$

Les équations (14) et (15) nous donnent :

$$\frac{\theta_0}{\alpha} = \sum_0^G \frac{\Delta t}{v/v_1} \Big/ \sum_0^F \frac{\Delta t}{v/v_1} \quad (16)$$

Nous obtenons à partir de (15), le rapport R_0/a que nous faisons intervenir, comme variable indépendante, dans les figures 3, 5, 6 et 7, puisque l'ingénieur étudiant un ouvrage en connaîtra la valeur d'avance. L'équation (16) fournit, moyennant un nombre suffisant d'itérations (une seule suffit le plus souvent), des valeurs précises pour θ_0/α , lesquelles peuvent à ce stade, être introduites directement dans l'équation (9), en vue d'une application directe à n'importe quelle autre région d'écoulement, sans qu'il soit nécessaire d'effectuer un calcul d'itération quelconque.

Puisque v/v_1 et θ_0/α sont connues, en fonction de t , nous pouvons déterminer la répartition des vitesses (et de là, celle des pressions) suivant AEOFB. On a trouvé que, pour $R_0/a > 2$, et pour toutes les valeurs de α , les pressions en E et en F étaient très voisines de $0,75 p_0$, et que l'allure de la courbe de la répartition, suivant EOF, correspondait, à très peu de choses près, à celle d'une parabole (fig. 4), lorsqu'on la traçait en fonction de θ_0/α . La répartition, suivant AE et FB, variait quelque peu en fonction de R_0/a et de α , mais lorsque $R_0/a > 2$, toutes les répartitions des pressions étaient suffisamment voisines de la répartition linéaire représentée sur la figure 4, pour que l'on puisse la préconiser comme base de calcul.

Sur la plupart des déversoirs en saut de ski, la surface solide se termine brusquement en F, de sorte que la répartition des pressions, suivant OF, correspondrait généralement à peu près à celle représentée par la courbe inférieure LF de la figure 4. Bien que nous ne comptions pas examiner séparément cette variante du problème dans la présente étude, certaines remarques générales peuvent néanmoins être formulées à son sujet. Ces remarques seront présentées dans la dernière partie de cette étude.

3. L'interdépendance des rapports θ_0/α et v/v_1 .

Puisque les intégrales des équations (8) et (9) peuvent généralement être complexes, on pourrait s'attendre à ce que le procédé par itération fournisse, indépendamment, des valeurs de θ_0/α

et de v/v_1 . Mais ceci n'est pas le cas, lorsque le « point de fonctionnement » est situé sur EOF, suivant laquelle la valeur de θ_0 en fonction de t est encore inconnue. Dans ces conditions, l'intégration ne fournit des résultats valables que pour v/v_1 , à partir desquelles l'on doit déduire θ_0/α au moyen de l'équation (16). Ainsi, d'après les intégrales, la valeur de T serait pure et réelle au-dessus de l'arc EOF, c'est-à-dire que $\theta_0 = 0$, alors qu'en réalité, la valeur de θ_0 varie entre $-\alpha$ et $+\alpha$.

On effectue, par conséquent, l'analyse de l'arc EOF, en déterminant v/v_1 à partir de la composante réelle de T, sans tenir compte d'une composante imaginaire éventuelle : d'où la détermination de la valeur de θ_0/α , à partir de l'équation (16). On introduit ensuite dans l'équation (9), les valeurs ainsi obtenues pour θ_0/α , afin de permettre la deuxième itération.

4. L'axe médian OH.

Nous connaissons maintenant θ_0 en fonction de t , soit $\theta_0/\alpha = f(t)$. Par ailleurs, suivant OH, $w = i\psi = icav_1$, avec $0 \leq c \leq 1$ d'où $t_j = ic\pi/2$ k et, à partir de l'équation (8) :

$$L = \frac{\alpha}{\pi} \log \left\{ \coth \frac{k - ic\pi/2}{2} \coth \frac{k + ic\pi/2}{2} \right\} \\ = \frac{\alpha}{\pi} \log \left\{ \frac{\cosh k + \cos c\pi/2}{\cosh k - \cos c\pi/2} \right\} \quad (17)$$

laquelle est réelle et positive. Nous obtenons, à partir de l'équation (9) :

$$I = \frac{k}{\pi} \int_{-1}^1 \theta_0 \operatorname{cosech} k(t - t_j) dt \\ = \frac{k\alpha}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t) (\sin kt \cos c\pi/2 - i \cosh kt \sin c\pi/2) dt}{\sin^2 kt + \sin^2 c\pi/2}$$

La partie imaginaire de cet intégrand est une fonction impaire de t , et, par conséquent, la partie correspondante de l'intégrale disparaît. Nous avons, donc :

$$I = \frac{k\alpha}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t) \sinh kt \cos c\pi/2}{\sinh^2 kt + \sin^2 c\pi/2} dt \quad (18)$$

laquelle est pure et réelle, comme L, ce qui vérifie que $\theta = 0$ à travers la ligne OH. Donc, dans ce cas, les intégrales L et I fournissent des valeurs précises, tant pour θ que pour v/v_1 .

Nous connaissons maintenant v/v_1 en fonction de c , c'est-à-dire de ψ , ce qui nous permet de déterminer, à partir de la relation $\Delta y = \Delta\psi/v$, les répartitions des vitesses et des pressions dans l'ensemble de l'intervalle OH, ainsi que la longueur y_0 de l'intervalle lui-même.

TABLEAU II

	R_0/a	0	2	4	6	8	10
$\frac{\bar{y}}{y_0}$	$2\alpha = 45^\circ$	0,385	0,374	0,363	0,354	0,348	0,345
	$2\alpha = 90^\circ$	0,396	0,381	0,368	0,358	0,351	0,350

Enfin, comme dans le cas du déversoir « à pied ouvert », nous obtenons les coefficients sans dimensions :

$$M' = \frac{M}{\frac{1}{2} \rho v_1^2 a^2}; \quad F' = \frac{F}{\frac{1}{2} \rho v_1^2 a}; \quad \bar{y}' = \frac{M'}{F'}$$

expressions dans lesquelles M représente le moment de flexion par rapport à O , et F , la poussée, sur une bande de largeur unitaire tracée suivant OH . Les figures 5 et 6 représentent, respectivement, les courbes pour y_0/a , et pour M' , tracées en fonction de R_0/a . Ainsi que le montre le tableau II, les variations des valeurs du rapport y/y_0 se sont trouvées seulement très faibles.

Il est possible de déduire des valeurs pour F , à partir de ces valeurs de $\bar{y}$, évitant ainsi d'établir une courbe séparée pour F . Comme précédemment, M et F sont dérivées, uniquement, de la pression dynamique, et doivent s'ajouter aux quantités correspondantes, dérivées de la pression hydrostatique.

5. La surface libre DHC.

Suivant cette ligne, w est complexe, et l'intégration est par conséquent plus difficile. Mais puisque, d'après les résultats obtenus dans le cas du déversoir « à pied ouvert », DHC correspondrait, approximativement, à un arc de cercle, nous considérerons seulement le rayon de courbure en H , et nous le déterminerons en considérant le gradient de vitesse suivant OH . Pour n'importe quel point sur OH , nous pouvons écrire l'équation bien connue :

$$\frac{dv}{dy} = \frac{v}{R}$$

dans laquelle R est le rayon de courbure du filet liquide. Nous écrivons $v' = v/v_1$, et nous remplaçons v par $\partial\psi/\partial y$ et ψ par cav_1 , d'où :

$$\frac{dv'}{dc} = \frac{a}{R}$$

Par ailleurs, nous avons

$$L' + I = r = \log(v_1/v) = -\log v';$$

nous notons qu'en H , $v' = 1$, et nous écrivons $R = R_1$; nous obtenons, en définitive :

$$\frac{dr}{dc} + \frac{a}{R_1} = 0 \quad (19)$$

Les équations (17) et (18) nous fournissent $r = L + I$ en fonction de c . En tirant les dérivées, et en écrivant $c = 1$, nous obtenons, puisque $\psi = av_1$ en H :

$$\frac{a}{R_1} = -\frac{dr}{dc} = \alpha \operatorname{séch} k + \frac{\alpha k}{2} \int \frac{f(t) \sinh kt dt}{\cosh^2 kt} \quad (20)$$

Puisque nous n'avons besoin de a/R_1 que pour tracer le filet liquide supérieur dans notre schéma, nous admettrons que $f(t) = t$, c'est-à-dire la première valeur d'essai employée pour η_0/α . Dans ces conditions, l'intégrale en (20) devient élémentaire, car :

$$\begin{aligned} \int x \operatorname{séch} x \operatorname{tgh} x dx &= -x \operatorname{séch} x + \int \operatorname{séch} x dx \\ &= -x \operatorname{séch} x + \operatorname{tg}^{-1}(\sinh x) \end{aligned}$$

Nous obtenons, à partir de cette intégrale et de l'équation (2) :

$$\frac{a}{R_1} = -\frac{dr}{dc} = \frac{\alpha}{k} \operatorname{tg}^{-1}(\sinh k) \quad (21)$$

Le résultat ainsi obtenu, sera un peu moins grand que la valeur exacte, mais avec un écart ne dépassant guère 2 % (voir tabl. I). Les valeurs obtenues, à partir des équations (15) et (21), pour a/R_0 , et pour a/R_1 , sont portées en fonction l'une de l'autre, sur la figure 7. Lorsque $R_0/a \rightarrow 0$, c'est-à-dire lorsque EOF diminue jusqu'à devenir un point, $k \rightarrow 0$, et $a/R_1 \rightarrow \alpha$, ainsi que le montre la figure 7.

L'approximation du « vortex libre ».

Comme dans le cas du déversoir « à pied ouvert », l'écoulement s'assimile avec une assez bonne approximation à un vortex libre, tant que

la valeur du rapport a/R_0 reste faible. Cette approximation s'applique encore plus directement à la présente étude qu'au cas précédent, puisque cette fois, a et R_0 sont déjà connues au départ, et les valeurs de R_1/a , y_0/a , M' , F' et $\bar{y}'$ peuvent en être déduites, comme cela a été le cas dans les équations (17, 18, 19, 20) d'une étude précédente [1].

Les résultats de cette approximation sont indiqués par les lignes discontinues des figures 3, 5, 6 et 7. Ils sont tous très voisins des valeurs données par la théorie complète, lorsque

$$R_0/a > 6;$$

au-dessus de cette valeur, les résultats correspondant aux deux théories diffèrent considérablement. Ainsi que le montre clairement la figure 7, cette divergence est inévitable : dans un vortex libre, $R_1 < R_0$ pour toutes les valeurs de R_0 , alors que dans le problème du déversoir, la valeur de R_1 devient d'abord égale à celle de R_0 , puis la dépasse, lorsque $R_0 \rightarrow 0$, et que la courbe EOF se réduit à un point.

Un examen plus poussé de la relation entre R_0 et R_1 met en évidence un aspect intéressant de l'approximation du « vortex libre » : Nous avons d'après l'équation (17) d'une étude précédente [1] :

$$\frac{R_0}{a} = \frac{R_1}{a} e^{a/R_1} \quad (22)$$

III. — RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Les essais ont été effectués dans un canal vitré large de 6 pouces (152 mm). Les profils de déversoir étudiés comportaient un angle 2α égal à 45° . Chaque profil de pied de déversoir comportait six prises de pression, disposées suivant l'axe longitudinal de la surface courbe. Comme dans le cas du déversoir « à pied ouvert », la profondeur a a été déterminée à partir de l'équation :

$$a = \frac{Q}{b \sqrt{2gH_0}} \quad (25)$$

Q étant le débit, b la largeur du canal, et H_0 étant telle que représentée sur la figure 1. (Il est nécessaire d'admettre, au départ, une valeur d'essai pour a , de manière à obtenir des valeurs pour y_0 , et de là, pour H_0 .) La hauteur de la pression dynamique, en tout point, s'obtient en soustrayant $y \cos \lambda$ de la hauteur piézométrique h_1 (fig. 1). La figure 3 montre les valeurs ainsi obtenues pour la pression maximale p_0 ; la répartition des pressions, mesurée de part et d'autre

On voit aisément, d'après cette équation, que le rapport R_0/a possède une valeur minimale égale à e lorsque $R_1/a = 1$. Cette conclusion est vérifiée par les figures 3, 5, 6 et 7, dont les courbes correspondant à la théorie du vortex libre se terminent lorsque $R_0/a = e$. La théorie ne permet de tirer aucune conclusion pour le cas où $R_0/a < e$.

L'approximation élémentaire.

La manière la plus élémentaire possible d'aborder le problème consiste à admettre que la vitesse est constante et égale à v_1 suivant la ligne OH, que $OH = a$, que la pression en O est, par conséquent, égale à $a \rho v_1^2 / R_0$, et enfin que la répartition des pressions, entre O et H, est linéaire. Si l'on admet ces hypothèses, il s'ensuit que $F = a^2 \rho v_1^2 / 2 R_0$, c'est-à-dire que :

$$F' = F / \frac{1}{2} \rho v_1^2 a = a / R_0 \quad (23)$$

et que $M = a^3 \rho v_1^2 / 6 R_0$, c'est-à-dire que :

$$M' = M / \frac{1}{2} \rho v_1^2 a^2 = a / 3 R_0 \quad (24)$$

La courbe correspondant à l'équation (24) est représentée par la ligne, en trait pointillé, de la figure 6, laquelle montre que la valeur du rapport R_0/a devrait être supérieure à 10 pour que cette approximation s'accorde, même passablement, avec la théorie complète.

de la courbe correspondant à $R_0/a = 7,27$, est représentée sur la figure 4.

On voit, d'après les figures 3 et 4, que les valeurs mesurées des pressions s'accordent bien avec la théorie. En particulier, la répartition des pressions est symétrique autour de EOF, et il n'apparaît, à l'aval du point O, aucune concentration des pressions telle que celle qui caractérisait les résultats expérimentaux dans le cas du déversoir « à pied ouvert » [1]. La présence de ce « bulbe » de pression semble être liée au rabattement du filet liquide libre EOF, constaté sur le déversoir « à pied ouvert », lequel ne se produit pas lorsque EOF constitue une limite solide.

La figure 5 montre également les valeurs mesurées du rapport y_0/a .

Il était difficile d'obtenir des valeurs précises pour y_0 , lorsque celles du rapport R_0/a étaient élevées; aux plus faibles valeurs de ce rapport, par contre, les points d'essai s'alignaient très bien sur une courbe, dont les ordonnées sont

supérieures à 2 % à celles indiquées par la théorie pour $2\alpha = 45^\circ$. La résistance à l'écoulement pourrait bien expliquer ce léger écart.

La bonne concordance entre les valeurs expérimentales et théoriques, pour y_0 et p_0 , paraît indiquer que les valeurs expérimentales de M' et de F' doivent également être voisines de leurs valeurs théoriques. En outre, la répartition symétrique des hauteurs de pression dynamique sui-

vant EOF justifie nettement l'hypothèse faite pour l'analyse, et suivant laquelle l'influence de la gravité serait négligeable.

Enfin, nous pouvons conclure que les résultats théoriques, tels qu'ils sont représentés sur les figures 3 à 7, peuvent être pris, en toute sécurité, comme bases de calcul.

Les quelques points de détail restant à examiner le seront dans le chapitre suivant.

IV. — CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS POUR LE CALCUL

1. Nous admettrons que les exigences du calcul seront respectées avec une rigueur suffisante, lorsqu'il sera possible de déterminer :

- 1° la profondeur maximale y_0 ;
- 2° la poussée, et le moment de flexion, agissant sur une bande, de largeur unitaire et disposée suivant l'axe OH;
- 3° la répartition des pressions suivant AEOFB;
- 4° toutes les données nécessaires pour tracer sommairement la courbe DHC.

Les deux premières données sont fournies par les figures 5 et 6, la troisième par les figures 3 et 4, et la dernière par la figure 7.

On constatera que, lorsque $R_0/a > 6$, DHC correspond approximativement à un arc de cercle. Lorsque $R_0/a < 6$, la connaissance du rayon au centre, R_1 , permet de tracer la courbe avec une assez bonne précision.

2. Une détermination approchée de la répartition des pressions suivant toute ligne normale à AEOFB, est possible en employant l'équation adimensionnelle

$$\frac{dp'}{dn'} = \frac{2v'^2}{R'} = \frac{2(1-p')}{R'}$$

pour évaluer le gradient des pressions aux extrémités de la ligne. Les termes de cette équation ($p' = p/\frac{1}{2}\rho v_1^2$, $v' = v/v_1$, $R' = R/a$, $n' = n/a$, et n = distance suivant la normale) sont connus, avec précision, le long de la paroi, et approximativement, à la surface du plan d'eau.

Toutes les pressions considérées jusqu'à présent étaient des pressions dynamiques; il est nécessaire d'ajouter aux valeurs pour M et F , données par la figure 6 et par le tableau II, la poussée hydrostatique et le moment de flexion donnés par la figure 6 d'une étude précédente [1].

3. Nous n'avons pas détaillé le cas où la surface solide se termine brusquement en F, comme un déversoir en saut de ski. L'hypothèse selon laquelle la répartition des pressions suivant OH ne subit aucune modification importante, paraît cependant être raisonnable.

La connaissance exacte de la répartition des pressions LF (fig. 4), permettrait l'évaluation de la déflexion, vers le bas, du jet sortant (au-dessous de la ligne $0 = \alpha$) à partir de la sommation du déficit de pression représentée par la zone hachurée de la figure 4. En admettant, à défaut de données plus précises, que la courbe LF soit une parabole, on démontre aisément que la surface LMF donne lieu à une force, trouvée normale à FB et égale à $3R_0P_0(\alpha - \sin \alpha)/2\alpha^2$. L'aire MNF donne lieu à une deuxième force, égale à $3p_0a/8$; en divisant la somme de ces forces par $Q_0v_1 = a_0v_1^2$, on obtient, pour l'angle de déflexion, la relation suivante :

$$\Delta\alpha = \frac{3(\alpha - \sin \alpha)}{4\alpha^2} \frac{R_0}{a} \frac{p_0}{\frac{1}{2}\rho v_1^2} + \frac{3}{16} \frac{p_0}{\frac{1}{2}\rho v_1^2} \quad (26)$$

dont les termes s'obtiennent sans difficulté à partir de la figure 3. Bien que le résultat ainsi obtenu soit approximatif, il présente néanmoins une indication d'une certaine utilité; il ne dépend pas, bien entendu, d'une hypothèse suivant laquelle OH serait verticale.

4. Les corrections tenant compte de la résistance à l'écoulement et de l'aération, peuvent être apportées exactement comme il a été démontré dans notre étude précédente [1]; il importe cependant de remarquer ici que les corrections tenant compte des pertes dues à la résistance à l'écoulement, ne seront pas nécessairement faibles, lorsqu'il s'agit de déversoirs ou d'évacuateurs de crues de grande longueur; il importe d'examiner ces pertes d'une manière suffisamment détaillée, pour que l'on puisse calculer des valeurs bien précises pour a , et pour H_0 .

5. Les résultats de l'analyse théorique s'accordent bien avec les résultats expérimentaux, bien que l'influence de la gravité ait été négligée. Lorsque $R_0/a > 6$, les résultats fournis par la théorie seront pratiquement les mêmes que ceux que l'on obtiendrait en se basant sur une théorie assimilant la ligne OH à une ligne radiale dans un vortex libre. Mais lorsque $R_0/a < 6$, l'approximation du vortex libre ne fournit aucun résultat.