BARRAGES-VOÛTES

II. -- Coupoles minces et isostatisme

ARCH DAMS

II.--Thin domes and statically determinate structures

PAR

P. PATIN,

ET

G. DEGEORGES,

DIRECTEUR GÉNÉRAL DE LA C.I.T.E. (*)

INGÉNIEUR CONSEIL A LA C.I.T.E. (*)

Compte tenu de l'augmentation du taux de travail du béton dans les barrages-voûtes, le problème de leur appui sur le rocher de fondation devient insoluble avec les techniques classiques. D'autre part, l'encastrement difficile à réaliser provoque la fissuration du rocher et du barrage et, tout en exigeant plus de matière, diminue la sécurité.

Il semble recommandable d'évoluer vers des ouvrages utilisant mieux la double courbure et s'appuyant, par l'intermédiaire d'une articulation, sur un élément de répartition des contraintes et de régularisation de la ligne d'appui.

As a result of the increasingly higher working stresses affecting the concrete of modern arch dams, the problem of their abutment against the foundation rock can no longer be solved by conventional methods.

The restraining of the dam ends — always a difficult problem — causes cracks to form in both rock and structure, in addition to requiring greater quantities of material and leaving a smaller safety margin.

The design trend to be recommended would appear to be towards structures making better use of the double curvature principle and being supported through a hinge on a bearing block giving a more satisfactory line of load application.

Tous ceux qui se sont penchés sur les problèmes de coques connaissent bien la difficulté théorique de leur étude. En dehors de quelques rares cas élémentaires où, par suite de la symétrie du système et de l'uniformité de l'épaisseur, les équations générales se simplifient de façon notable, on ne sait pas les calculer formellement.

En 1938, Tölke réussit, au prix de nombreuses hypothèses, à simplifier ces équations générales. Ces simplifications impliquent un certain nombre de réserves quant à l'exactitude des

résultats et, malgré cela, les équations données par Tölke sont assez difficilement exploitables en pratique.

Plus encore peut-être que dans la conception traditionnelle des barrages, on devra ici s'appuyer sur des procédés très schématiques pour dimensionner un barrage à double courbure.

C'est à ce point de vue, celui du projeteur, qui est pratiquement le plus important, que nous voulons nous placer dans les lignes qui suivent. Nous ne visons d'autre but que celui de montrer, à l'appui de calculs élémentaires, le mécanisme de ces barrages.

Les ouvrages qui nous intéressent sont exclu-

(*) C.I.T.E. : Compagnie d'Ingénieurs et Techniciens d'Etudes, 8, place Vendôme, Paris (1^{er}).

sivement les barrages en voûtes minces, au sens où l'entend la théorie des coques. Cela revient à dire que l'épaisseur de la voûte sera toujours petite par rapport aux rayons de courbure principaux.

I. — LES BARRAGES EN VOUTE MINCE A DOUBLE COURBURE ET LA THÉORIE DES MEMBRANES

On sait que dans l'étude des coques, une première approximation peut être obtenue en faisant appel à la théorie dite de la membrane. Cette théorie donne une solution isostatique du problème, en ce qu'elle ne prend pas en compte les déformations. Les simplifications de calcul qui en résultent sont telles que c'est inévitablement à cette théorie que nous aurons recours pour dégrossir l'étude.

Dans la conception habituelle des barrages-voûtes, si les arcs qui ont tendance à être les plus chargés sont effectivement soulagés par la continuité de la voûte, ils doivent ce fait à l'existence des efforts tranchants agissant dans les sections horizontales de séparation des arcs. Ces efforts tranchants, qui résultent à la fois des conditions d'appui des « consoles », de la plus grande raideur des arcs inférieurs et de la surabondance de l'épaisseur dans la zone de crête, engendrent en contrepartie des moments de flexion parfois importants le long des consoles.

Le poids propre du barrage ne joue aucun rôle dans le travail des arcs et il faut avoir recours à des théories spéciales pour mettre en évidence l'influence de ce poids. Encore convient-il d'observer que ces dernières méthodes n'ont été appliquées qu'à des barrages-voûtes épais (barrages poids-voûtes).

Dans un barrage conçu en coupole, on s'efforce au contraire de soulager les arcs horizontaux en faisant absorber une partie de la pression hydrostatique par les éléments verticaux, non pas en comptant sur leur seule raideur, mais surtout en jouant sur leur courbure. Les contraintes qui s'exercent suivant cette courbure sont équilibrées vers le haut à la fois par la composante verticale du poids de l'eau agissant au-dessus du point considéré, et par le poids propre de la partie de voûte située au-dessus de ce même point.

Comme pour les barrages-voûtes classiques, on retrouve en outre l'influence favorable sur les contraintes principales de la zone médiane, de la raideur des arcs inférieurs et supérieurs, mais les extensions seront très fortement atténuées en raison de la réduction des moments de flexion et de l'existence corrélative d'un effort

normal de compression agissant suivant la deuxième courbure.

En somme, les éléments verticaux se comporteront, non comme des consoles, travaillant essentiellement en flexion, mais comme des arcs tronqués, travaillant surtout en compression.

Nous conserverons néanmoins le terme de « consoles », malheureusement consacré aujourd'hui par une longue habitude.

Assez curieusement, les barrages poids-voûtes et les coupoles minces se rejoignent ainsi dans le principe du calcul.

A - Cas où le barrage est un corps de révolution.

Nous commencerons par l'analyse du cas où le barrage est un corps de révolution engendré par la rotation de deux lignes méridiennes autour d'un même axe vertical.

La symétrie cylindrique conduira en effet à des formules aussi simples que possible.

Nous dirons tout de suite qu'il ne semble pas, d'une façon générale, qu'une semblable définition soit économique. En effet, la convexité des consoles étant évidemment tournée du côté de la retenue, le rayon de courbure des arcs horizontaux sera maximal au voisinage de la zone médiane très sollicitée. Or, comme très souvent la largeur de la brèche diminue lorsque la profondeur augmente, il s'ensuit que, dans un barrage de révolution, les arcs les plus chargés auront à la fois le rayon de courbure le plus grand et un angle d'ouverture assez faible, circonstances l'une et l'autre défavorables vis-à-vis du travail propre de ces arcs.

Néanmoins, grâce à la symétrie de révolution, les cisaillements s'éliminent dans le calcul des coques de révolution par la théorie de la membrane.

A cet égard, il convient de ne pas perdre de vue le caractère approximatif des résultats obtenus par cette théorie, fondée sur des hypothèses assez contradictoires.

En effet, d'une part, elle suppose la surface suffisamment rigide pour que l'on puisse valablement négliger les variations des rayons de courbure au cours de la déformation, d'autre part, elle implique une coque assez souple pour que l'on puisse faire abstraction, devant les efforts normaux, des moments de flexion et de torsion résultant de cette même déformation.

On ne prend donc en compte, dans la théorie de la membrane, que les seules composantes du tenseur tension en un point parallèles au plan tangent en ce point.

Les tensions se trouvent ainsi déterminées sans ambiguïté en faisant appel à de simples considérations d'équilibre statique où n'inter-

Le barrage de Salamonde (Portugal)

(Photographie du Bureau d'Etudes A. COYNE et J. BELLIER.)

viennent pas les déformations. Dans le cas où la surface d'ensemble serait constituée par la juxtaposition de surfaces répondant à des définitions analytiques différentes, la théorie de la membrane ferait en général apparaître des discontinuités dans les contraintes le long des lignes correspondant au changement de définition, ce qui ne peut correspondre à la réalité physique. Ces discontinuités ne disparaîtront que si, en tous points de ces lignes, les surfaces ont les mêmes rayons de courbure principaux.

L'application de la théorie de la membrane aux barrages fournira une solution indépendante des conditions au pourtour de la voûte, ce qui ne confère à cette méthode qu'une valeur de toute première approximation.

On peut remarquer que l'on commet une approximation exactement comparable lorsque l'on prédétermine les arcs d'un barrage-voûte en appliquant la formule du tube pR/e , cas particulier de la théorie de la membrane lorsque le rayon de courbure des consoles est supposé infini.

La théorie de la membrane fournira donc un schéma très simplifié des phénomènes réels, d'autant plus proche de la réalité que la voûte sera moins épaisse et les appuis relativement déformables.

C'est pourquoi il ne faut pas, à notre avis, trop s'attacher aux avantages apparents de la coque de révolution, qui sont surtout le fait de l'approximation inhérente à la méthode utilisée.

Notons toutefois que les parements du barrage de Schiffenen, en Suisse, sont définis par des surfaces de révolution coaxiales.

a) EFFETS DE LA PRESSION DE L'EAU (fig. 1) :

OZ étant l'axe de révolution, on étudie l'équi-

FIG. 1

FIG. 2

libre d'un petit élément découpé dans la coque par deux méridiens et deux parallèles très voisins (fig. 2).

L'épaisseur de la coque n'est fonction que de la cote z puisque, par définition, celle des arcs est constante à un niveau donné.

En raison de la symétrie, σ_1 et σ_2 ne sont également fonctions que de la seule cote z et il n'y a pas de cisaillements sur les faces latérales de l'élément. Les contraintes σ_1 agissent dans un plan horizontal, les contraintes σ_2 dans un plan vertical.

L'équation $R = f(z)$ du méridien de la surface médiane de la coque définit complètement cette surface et permet de calculer l'un des rayons de courbure principaux.

En effet, ρ_2 est donné par l'expression :

$$\rho_2 = \frac{[1 + f'(z)^2]^{2/3}}{f''(z)}$$

Du théorème de Meusnier, on déduit la valeur de l'autre rayon de courbure principal, qui s'écrit :

$$\rho_1 = \frac{R}{\sin \alpha}$$

La surface de l'élément de coque précédemment défini est donnée par :

$$d\Omega = dS_1 dS_2, \text{ soit } d\Omega = R\rho_2 d\theta d\alpha$$

Equation de projection sur la normale Gn :

- force appliquée : $pR\rho_2 d\alpha d\theta$;
- projection des forces dans le plan de l'arc horizontal : $-\sigma_1 e \rho_2 d\alpha d\theta \sin \alpha$,
- projection des forces dans le plan de l'élément vertical : $-\sigma_2 e R d\alpha d\theta$.

La condition d'équilibre se traduit par :

$$pR\rho_2 d\alpha d\theta - \sigma_2 e R d\alpha d\theta - \sigma_1 e \rho_2 d\alpha d\theta \sin \alpha = 0$$

soit :

$$\frac{p}{e} = \frac{\sigma_1 \sin \alpha}{R} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} \quad (1)$$

Equation de projection sur la verticale (fig. 3) :

La projection de σ_1 sur la verticale est nulle.

FIG. 3

Pour les autres forces appliquées, la condition d'équilibre s'écrit :

$$pR\rho_2 d\alpha d\theta \cos \alpha + \sigma_2 e R d\theta \sin \alpha - \sigma_2 e R d\theta \sin \alpha - d\theta d (Re\sigma_2 \sin \alpha) = 0$$

soit :

$$pR\rho_2 \cos \alpha d\alpha = d (Re\sigma_2 \sin \alpha)$$

d'où en intégrant :

$$Re\sigma_2 \sin \alpha = \int pR\rho_2 \cos \alpha d\alpha + Cte$$

En remarquant que l'on a $\rho_2 \cos \alpha d\alpha = dR$ et qu'en crête du barrage, c'est-à-dire pour $R = R_0$, la contrainte σ_2 est nulle, l'intégrale ci-dessus se transforme et l'on a :

$$\sigma_2 = \frac{1}{Re \sin \alpha} \int_{R_0}^R pR dR \quad (2)$$

b) EFFETS DU POIDS PROPRE DU BARRAGE :

En appelant δ le poids spécifique du béton, le poids de l'élément a pour valeur :

$$dP = \delta e R \rho_2 d\alpha d\theta$$

Equation de projection sur la normale Gn (fig.4) :

$$dP \cos \alpha - \sigma_2 e R d\theta d\alpha - \sigma_1 e \rho_2 d\alpha d\theta \sin \alpha = 0$$

d'où :

$$\delta \cos \alpha = \frac{\sigma_1 \sin \alpha}{R} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} \quad (3)$$

Equation de projection sur la verticale :

$$dP + \sigma_2 e R d\theta \sin \alpha - \sigma_2 e R d\theta \sin \alpha - d\theta d (Re\sigma_2 \sin \alpha)$$

FIG. 4

ou :

$$\delta e R \rho_2 d\alpha d\theta = d\theta d (Re\sigma_2 \sin \alpha)$$

$$Re\sigma_2 \sin \alpha = \delta \int e R \rho_2 d\alpha + Cte$$

d'où :

$$\sigma_2 = \frac{\delta}{Re \sin \alpha} \int_{R_0}^R \frac{eR}{\cos \alpha} dR \quad (4)$$

c) CONTRAINTES CUMULÉES (eau et poids propre) :

Les formules précédentes donnent :

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{e} + \delta \cos \alpha &= \frac{\sigma_1 \sin \alpha}{R} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} \\ \sigma_2 &= \frac{1}{Re \sin \alpha} \int_{R_0}^R \left(p + \frac{\delta e}{\cos \alpha} \right) R dR \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Les expressions (5) résolvent ainsi le problème du barrage de révolution traité en membrane.

On peut voir que d'une façon générale, l'influence du poids propre sera loin d'être négligeable.

Les contraintes σ_1 et σ_2 seront complètement déterminées par la seule connaissance de l'équation de la méridienne $R = f(z)$.

Le calcul ne présentera généralement pas de difficultés.

Ainsi, la théorie de la membrane donnera, comme nous l'avons déjà indiqué, des contraintes indépendantes de la géométrie du contour et des conditions d'appui, puisque nous avons seulement posé dans nos calculs : $\sigma_2 = 0$ pour $R = R_0$ c'est-à-dire au sommet du barrage.

B - Cas où le barrage n'est pas un corps de révolution.

En pratique, il est très fréquent que la définition des parements d'un barrage soit exprimée en coordonnées semi-polaires de la forme :

$$\rho = f(z, \beta)$$

et que cette définition admette un plan de symétrie vertical.

Dans ce qui suit, nous supposons qu'il en est ainsi.

L'épaisseur e du barrage sera en outre regardée comme une fonction de la seule coordonnée z , ce qui confère aux arcs horizontaux une épaisseur uniforme. Non seulement il s'ensuit une simplification notable des équations que nous nous proposons d'établir, mais encore nous pensons que la variation des contraintes dans les arcs horizontaux des barrages ne justifie d'aucun avantage réel des arcs d'épaisseur variable sur ceux d'épaisseur constante.

Ceci est encore plus vrai lorsque l'on sépare nettement l'ouvrage de ses appuis.

La normale en un point M de la surface n'est plus en général située dans le plan vertical contenant le rayon polaire $\rho = OM$ (fig. 5).

De l'équation représentative de la surface du feuillet médian de la coque $\rho = f(z, \beta)$ on peut déduire la valeur des rayons de courbure principaux au point M.

Dans le plan horizontal, le rayon de courbure R de la ligne de niveau en M s'écrit :

$$R = \frac{(\rho^2 + \rho'_{\beta}{}^2)^{3/2}}{\rho^2 - \rho\rho''_{\beta} + 2\rho'\rho'_{\beta}}$$

Celui de la ligne $\beta = \text{Cte}$ est donné par :

$$R' = \frac{(1 + \rho_z'^2)^{3/2}}{\rho''_z}$$

La connaissance de R et R' permet ensuite le calcul des rayons de courbure principaux en M, ρ_1 et ρ_2 .

Pour étudier les conditions d'équilibre, on découpera dans la coque autour du point M un

FIG. 5

petit élément défini par l'intersection de la surface avec :

- deux plans horizontaux distants de dz pour les faces supérieure et inférieure,
- deux plans verticaux contenant O' (centre de courbure) pour les faces latérales (fig. 6).

Nous nous bornerons à examiner le cas de charge correspondant à la pression hydrostatique. Outre les contraintes normales σ_1 et σ_2 , des cisaillements agissent en général sur les faces latérales.

Par ailleurs, la contrainte σ_1 n'est plus seulement fonction du seul paramètre z; elle dépend aussi de β .

Equation de projection sur la normale Gn :

La projection de forces de cisaillements étant nulle, on retrouve l'équation (1) :

$$\frac{p}{e} = \frac{\sigma_1 \sin \alpha}{R} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} \quad (6)$$

FIG. 6

Equilibre de rotation de l'élément :

Il implique l'égalité :

$$\tau_1 = \tau_2 \quad (7)$$

Projection sur la verticale (fig. 7) :

$$\begin{aligned} pR\rho_2 d\alpha d\theta \cos \alpha + \sigma_2 e R d\theta \sin \alpha - \\ [\sigma_2 e R d\theta \sin \alpha + d\theta d(Re\sigma_2 \sin \alpha)] + \\ \tau_1 e \rho_2 d\alpha \sin \alpha - (\tau_1 + d\tau_1) e \rho_2 d\alpha \sin \alpha = 0 \\ pR = \frac{1}{\rho_2 \cos \alpha} \frac{\partial (Re\sigma_2 \sin \alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tau_1}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \alpha \quad (8) \end{aligned}$$

Projection sur l'horizontale contenue dans le plan tangent en M :

Elle donne :

$$\begin{aligned} -\sigma_1 e \rho_2 d\alpha + (\sigma_1 + d\sigma_1) e \rho_2 d\alpha - \tau_2 e R d\theta \\ + [\tau_2 e R d\theta + d\theta d(\tau_2 Re)] = 0 \end{aligned}$$

soit :

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \theta} e \rho_2 + Re \frac{\partial \tau_2}{\partial \alpha} + \tau_2 \frac{\partial (Re)}{\partial \alpha} = 0 \quad (9)$$

Les quatre fonctions inconnues σ_1 , σ_2 , τ_1 et τ_2 seront donc théoriquement calculables par le système ci-dessous, où l'on devra exprimer les

FIG. 7

variables θ et α en fonction des coordonnées z et β . En général, l'intégration formelle de ce système se heurtera à de grosses difficultés analytiques :

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{e} &= \frac{\sigma_1 \sin \alpha}{R} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} \\ pR &= \frac{\partial \sigma_2}{\partial \alpha} \frac{Re \tan \alpha}{\rho_2} + \sigma_2 \frac{1}{\rho_2 \cos \alpha} \frac{\partial (Re \sin \alpha)}{\partial \alpha} \\ &\quad + \frac{\partial \tau_1}{\partial \theta} \tan \alpha \\ \tau_1 &= \tau_2 \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial \theta} e \rho_2 + Re \frac{\partial \tau_2}{\partial \alpha} + \tau_2 \frac{\partial (Re)}{\partial \alpha} &= 0 \end{aligned} \right\} (10)$$

Les formules relatives au poids propre s'obtiendraient sans difficultés par un processus analogue.

REMARQUE :

Au voisinage du plan de symétrie du barrage, la variation de σ_1 peut être négligée et les cisaillements regardés comme nuls. Les formules établies pour la coque de révolution peuvent, par conséquent, être approximativement étendues aux points proches du plan de symétrie, à condition de prendre R et non ρ dans ces formules.

II. — L'AVANT-PROJET DE BARRAGE A DOUBLE COURBURE

Si l'ouvrage est un corps de révolution, l'emploi des formules (5) permettra d'apprécier la répartition de la pression hydrostatique et du poids propre entre l'une et l'autre courbure.

Par approximations successives, on précisera alors l'équation définitive de la méridienne.

Cependant, nous avons expliqué pourquoi ce type de barrage ne sera économique que dans des circonstances très particulières.

C'est donc au cas, plus général, où le barrage n'est pas défini par des surfaces de révolution que nous nous attacherons.

La complexité du système (10) est telle que l'on ne peut songer à faire appel à ces formules lors du travail de recherche des formes. Force sera donc de s'appuyer sur des procédés plus simples. Toutefois, l'idée directrice sera toujours la même : on cherchera à obtenir une surface funiculaire, définie par les funiculaires des éléments horizontaux et verticaux, confondue avec la surface moyenne de l'ouvrage.

A - Etude des arcs en première approximation.

La contrainte σ_1 qui sollicite les arcs sera toujours la plus importante, non seulement parce qu'elle sera plus grande que les autres, mais encore parce que les arcs constituent l'élément porteur principal de l'ouvrage. C'est donc logiquement l'étude de ces arcs qu'il convient d'examiner en premier lieu.

Dans ce qui suit, la pression hydrostatique p qui agit en un point peut être regardée comme égale à la somme $p_1 + p_2$ dans laquelle p_1 représente la part de la pression totale absorbée par l'arc et p_2 celle absorbée par la console.

On se propose de rechercher la loi de variation de p_1 et corrélativement celle de σ_1 telle que l'arc soit exactement le funiculaire de p_1 .

Il semble que, si cette condition est remplie de façon aussi exacte que possible, on doive obtenir les moments les plus faibles lors des calculs ultérieurs (fig. 8).

Soit ds un élément d'arc horizontal sollicité par la pression normale p_1 .

On obtient, en projetant sur l'axe OY :

$$p_1 ds \cos \theta = ed (\sigma_1 \sin \theta)$$

La projection sur la normale donne :

$$p_1 ds = e \sigma_1 d\theta$$

De ces deux relations, on tire :

$$\sigma_1 \cos \theta d\theta = d\sigma_1 \sin \theta + \sigma_1 \cos \theta d\theta$$

d'où :

$$d\sigma_1 \sin \theta = 0$$

Cette dernière égalité implique $d\sigma_1 = 0$ donc $\sigma_1 = \text{constante}$ le long de l'arc.

En outre :

$$p_1 \frac{ds}{d\theta} = e \sigma_1 = \text{Cte, soit } p_1 R = e \sigma_1 = \text{Cte}$$

et :

$$p_1 = \frac{e \sigma_1}{R}$$

FIG. 8

B - Définition des parements.

Partant de ces résultats, nous allons exposer un processus permettant de dégrossir l'étude du barrage.

Nous supposons définies au préalable les grandes lignes de l'ouvrage. Ce travail préliminaire fondamental fait davantage appel à l'expérience et à l'habileté du projeteur qu'aux calculs. Toutefois, le barrage étant approximativement dessiné, les équations (5) permettent de préciser ensuite l'allure de la console de clé.

On obtient ainsi la valeur $[\sigma_1]_z$ à un niveau quelconque le long de cette console.

Au lieu d'employer les formules (10) on évaluera ensuite σ_2 à l'aide des formules (5) qui se déduisent d'ailleurs des précédentes lorsqu'on suppose nuls les cisaillements.

Cette simplification sera d'ailleurs d'autant plus acceptable que le barrage se rapprochera davantage d'un corps de révolution.

On devra donc s'attacher à vérifier que l'on a approximativement le long d'un arc :

$$\frac{p}{e} \rho_2 + \rho_2 \delta \cos \alpha - [\sigma_1]_z \rho_2 \frac{\sin \alpha}{R} = \frac{1}{R e \sin \alpha} \int_{R_0}^R \left(p + \frac{\delta e}{\cos \alpha} \right) R dR$$

$[\sigma_1]_z$ ayant la valeur constante calculée en clé.

Bien entendu, pour chaque console, les éléments géométriques varient.

Pratiquement, une telle vérification obtenue par tâtonnements étant assez longue, on la limitera à quelques points de la voûte choisis dans les zones qu'*a priori* on sait être parmi les plus sollicitées.

Ce travail préliminaire est essentiel.

On pourra fort bien, si on le juge souhaitable, s'accommoder d'arcs non circulaires, tout en satisfaisant à la condition ci-dessus.

C'est là un des avantages de la seconde courbure, qui introduit un nouveau paramètre sur

lequel on peut jouer pour faire varier le rayon de courbure d'un arc sans que cet arc cesse d'être funiculaire.

Sur des barrages récents assez nombreux, les projeteurs ont adopté des arcs à définition parabolique, elliptique, ou d'une manière générale non circulaire.

Topographiquement, de tels arcs sont souvent préférables aux arcs circulaires. En effet, un arc parabolique, par exemple, se présentera sur la ligne de rocher sous un angle moins fermé que l'arc circulaire confondu avec le cercle osculateur au sommet de la parabole (fig. 9).

L'ellipse dont le grand axe est situé dans le plan de symétrie du barrage convient également.

A ne considérer que les indications de la théorie de la membrane, le choix d'arcs non circulaires ne peut se justifier que par la meilleure adaptation topographique dont nous venons de parler.

En réalité, les méthodes de calcul prenant en compte la raideur de la voûte, donc ses déformations et les conditions à son pourtour, font apparaître un autre avantage des arcs à rayon de courbure croissant de la clé vers les naissances.

En effet, lorsqu'on se déplace de l'axe du barrage vers les rives, la hauteur des « consoles » diminue, de même leur rayon, et corrélativement leur raideur augmente. De ce fait, la part de charge qu'elles absorbent est plus importante au voisinage des rives qu'en clé.

En conséquence, pour l'arc, c'est le phénomène inverse qui se produit, de sorte qu'en choisissant d'emblée un arc dont le rayon de courbure croisse, il est théoriquement possible de réaliser une compensation telle que σ_1 demeure effectivement constant le long de l'arc, critère qui, nous l'avons vu, définit un arc funiculaire d'un charge radiale.

Bien entendu, le choix *a priori* de cette compensation ne peut qu'être arbitraire, mais le phénomène décrit ci-dessus ajoute à l'intérêt de l'adoption d'arcs non circulaires.

Cependant, dans le cas de barrages traités en coque, si les lignes de niveau sont circulaires, on pourra souvent, en opérant sur la deuxième courbure, obtenir en membrane une variation de σ_1 , donc une compensation telle que l'influence de la raideur de la voûte tende ensuite à rétablir la constance de la valeur σ_1 .

III. — PRISE EN COMPTE SOMMAIRE DES DÉFORMATIONS

Dans les calculs qui suivent, nous allons montrer la possibilité d'obtenir une valeur approchée, en clé, des effets complémentaires consé-

Fig. 9

cutifs à la raideur de la voûte et à ses conditions d'appui.

Nous limiterons le problème à l'étude d'un ouvrage coupole symétrique ou tout au moins dont la dissymétrie est peu marquée.

En raison de la symétrie du système, la valeur de σ_1 est constante au voisinage de la console de clé, où nous nous proposons de réaliser l'ajustement, et les composantes des cisaillements parallèles au plan tangent sont nulles.

Le tenseur contrainte se réduit aux composantes figurées sur le croquis (fig. 10).

On ne considère que les seuls effets de la pression hydrostatique, étant entendu, toutefois, qu'il serait facile de répéter des calculs en tous points analogues pour le poids propre du barrage.

1° EQUATION DE PROJECTION SUR LA NORMALE Gn (fig. 11) :

T et M représentent respectivement l'effort tranchant et le moment fléchissant unitaires agissant le long de la console :

$$pR\rho_2 d\alpha d\theta - \sigma_2 e R d\theta d\alpha - \sigma_1 e \rho_2 d\alpha d\theta \sin \alpha + d\theta d(\text{TR}) = 0$$

soit :

$$p = \left(\frac{\sigma_1 \sin \alpha}{R} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} \right) e + \frac{d(\text{TR})}{d\alpha} \quad (11)$$

2° PROJECTION SUR LA VERTICALE :

$$pR\rho_2 d\theta d\alpha \cos \alpha + d(\text{TR} \cos \alpha) = d(\sigma_2 e R \sin \alpha)$$

soit :

$$\text{TR} \cos \alpha + \sigma_2 e R \sin \alpha = \int_{R_0}^R p R dR \quad (12)$$

3° EQUILIBRE DES MOMENTS :

On évalue les moments par rapport au bord inférieur de l'élément. Les moments dus à σ_1 et σ_2 et à p sont du second ordre et n'interviennent donc pas.

— Bord supérieur :

$$MRd\theta + TRd\rho_2 d\alpha$$

FIG. 11

FIG. 10

— Bord inférieur :

$$-MRd\theta - d\theta d(MR)$$

L'équilibre de rotation se traduit par :

$$\text{TR}\rho_2 = \frac{d(MR)}{d\alpha} \quad (13)$$

4° Pour obtenir les équations qui manquent, nous devons faire appel aux déformations et l'on considère celle qui affecte l'arc situé à la cote z , sollicité par la contrainte σ_1 .

Soit x la composante horizontale du déplacement du point situé en clé de l'arc à la cote z .

On peut écrire :

$$x = \lambda \sigma_1 \quad (14)$$

cette relation établissant la proportionnalité entre la déformation radiale en clé et la contrainte σ_1 qui sollicite l'arc.

Puisque si $\sigma_1 = 1$, $x = \lambda$ on déterminera pratiquement la valeur de λ en calculant la déformation de l'arc en clé sous l'effet d'une pression radiale qui crée en ce point une contrainte égale à l'unité, la distribution de cette contrainte le long de l'arc étant par ailleurs conforme à celle déduite de la théorie de la membrane (c'est-à-dire autant que possible uniforme).

Dans ce calcul préliminaire, on pourra tenir compte, si on le veut, de la déformation complé-

mentaire consécutive au tassement du rocher au niveau des appuis de l'arc.

λ sera une fonction de la cote z , les caractéristiques des arcs dépendant elles-mêmes de cette coordonnée.

L'équation classique d'équarissage des pièces courbes permet d'écrire la relation suivante entre le moment fléchissant M et la composante radiale de la déformation :

$$\frac{d^2x}{dz^2} = - \frac{M}{EJ} \quad (15)$$

où J représente le moment d'inertie réduit de la section de la console et E le coefficient d'élasticité du béton.

Finalement, le système intégral-différentiel à résoudre sera, le suivant :

$$\left. \begin{aligned} p &= \left(\frac{\sigma_1 \sin \alpha}{R} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} \right) e + \frac{d(TR)}{d\alpha} \\ TR \cos \alpha + \sigma_2 e R \sin \alpha &= \int_{R_0}^R p R dR \\ TR \rho_2 &= \frac{d(MR)}{d\alpha} \\ x &= \lambda \sigma_1 \\ \frac{d^2x}{dz^2} &= - \frac{M}{EJ} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Dans ces formules α , R , ρ_2 , e , λ et J s'expriment en fonction de la seule coordonnée z .

Nous n'insisterons pas sur les méthodes permettant la résolution numérique du système (16). Le calcul formel ne sera pratiquement jamais possible et il faudra avoir recours à des procédés d'approximation.

Les conditions aux extrémités de la console s'écrivent :

— en crête :

$$M = 0 \quad \text{et} \quad T = 0$$

— à la base :

— s'il y a encastrement :

$$x = 0 \quad \text{et} \quad (dx/dz) = 0$$

— s'il y a un joint, et en faisant l'hypothèse d'un moment proportionnel à la rotation :

$$EJ \left(\frac{d^2x}{dz^2} \right)_{z=h} = k \left(\frac{dx}{dz} \right)_{z=h}$$

L'effort tranchant, conséquence du frottement entre la voûte et son socle au niveau du joint est traduit par la relation :

$$T_{z=h} = (f \sigma_2 e)_{z=h}$$

f étant le coefficient de frottement.

Le système (16) ne tient compte, comme nous l'avons dit, que des effets de la pression hydrostatique, à l'exclusion de toutes les autres causes susceptibles de développer des efforts dans la voûte (poids propre, variations d'origine thermique, gonflement du béton).

Les parements de la voûte, toutefois, sont rarement assez inclinés pour que les effets du poids propre deviennent importants en regard de ceux de la poussée de l'eau, notamment en ce qui concerne les flexions.

On obtiendra sans doute une approximation convenable en superposant simplement les contraintes calculées par le système (16) pour la poussée de l'eau avec celles obtenues par la seule théorie de la membrane pour le poids propre.

IV. — RECHERCHE DE L'ISOSTATISME DANS LA CONCEPTION DES BARRAGES EN VOUTE MINCE

A - Isostatisme intérieur.

Lorsque l'on connaît, grâce à la théorie de la membrane, les contraintes en tous points d'une coque mince, il est ensuite possible de calculer les déformations provoquées par ces contraintes.

A titre d'exemple, nous considérerons le cas le plus simple où la coque est une surface de révolution (fig. 12).

Le déplacement en un point peut être regardé comme égal à la somme géométrique d'un déplacement radial ΔR et d'un abaissement Δz .

La dilatation unitaire suivant la ligne de niveau a pour valeur :

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\mu}{E} \sigma_2$$

En suivant la méridienne :

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\mu}{E} \sigma_1$$

Fig. 12

On en déduit ΔR qui est donné par la relation :

$$\Delta R = \varepsilon_1 R = \frac{R}{E} (\sigma_1 - \mu \sigma_2) \quad (17)$$

La différence entre l'abaissement vertical de deux lignes de niveau distantes de dz s'écrit :

$$\Delta z - \Delta z' = \varepsilon_2 \rho_2 da \times \sin \alpha = \varepsilon_2 dz$$

soit :

$$\Delta z - \Delta z' = \frac{dz}{E} (\sigma_2 - \mu \sigma_1) \quad (18)$$

Dans les formules (17) et (18) les contraintes σ_1 et σ_2 sont calculables par la résolution du système (5).

L'équation de la méridienne initiale étant de la forme $f(R, z) = 0$, celle de la méridienne déformée s'écrira :

$$f(R - \Delta R, z + \Delta z) = F(R, z) = 0.$$

D'une façon générale, les courbes $f(R, z)$ et $F(R, z)$ seront différentes l'une de l'autre. En d'autres termes, on ne pourra les amener en coïncidence par un simple déplacement — translation et rotation — sans les déformer.

On peut en conclure que la déformation de la membrane s'accompagnera en toute certitude de moments de flexions le long de la méridienne.

Par contre, dans le cas où les déplacements de la membrane ne provoqueraient aucune déformation de la méridienne, les flexions seraient effectivement nulles et la distribution des contraintes conforme à celle calculée.

Pour qu'il en soit ainsi, il faudrait que certaines conditions soient simultanément remplies par la loi qui définit les variations de l'épaisseur et par les réactions du contour.

Par exemple, si le déplacement de la méridienne se réduisait à une simple translation, la valeur de ΔR devrait être la même en tous les points, et la condition à vérifier s'écrit, en négligeant l'influence de la composante verticale de la déformation :

$$\frac{R}{E} (\sigma_1 - \mu \sigma_2) = \text{Cte}$$

où σ_1 et σ_2 sont des fonctions de l'épaisseur calculées par le système (5). Il est théoriquement possible de trouver une loi de variation de e conduisant à la condition ci-dessus. Mais cette loi pourra être en contradiction avec celle qui résulte de la considération des contraintes et conduire à des épaisseurs localement nulles, voire même négatives.

En outre, ce cas semble présenter peu d'intérêt pratique, puisqu'il implique un déplacement

radial ΔR au pied du barrage. Il n'est cependant pas à exclure. On pourrait trouver la loi plus générale correspondant à une rotation et à une translation combinées de la méridienne telles que le déplacement au pied réponde à certaines conditions.

B - Isostatisme extérieur.

La recherche d'une loi de variation adéquate de l'épaisseur n'a de sens que si l'on tient compte en même temps de l'influence des réactions à la lisière du barrage.

En fait, la distribution idéale des contraintes, à laquelle conduit la théorie de la membrane, ne pourra jamais être conforme à la réalité. Toute tentative faite pour s'en rapprocher ne pourra prétendre qu'à de simples améliorations dans le sens d'une réduction des contraintes dues aux flexions et aux torsions.

On pourra, néanmoins, parvenir à de très intéressants résultats en compensant les flexions par le jeu simultané des deux facteurs responsables de ces flexions : raideur de la voûte et influence des appuis.

On connaît, par exemple, la possibilité de réduire la valeur des flexions maximales le long des consoles en donnant un surcroît d'épaisseur aux parties hautes du barrage.

Cependant, un perfectionnement très intéressant serait apporté à la technique actuelle, s'il était possible de libérer partiellement les appuis de la voûte en leur permettant de pivoter et de subir des déplacements radiaux.

On tendrait ainsi vers l'annulation des efforts tranchants et des moments le long de la lisière de la voûte.

Dès lors, en s'attachant à définir une loi convenable de variation de l'épaisseur de la voûte, on s'approcherait vraisemblablement assez près de la répartition des contraintes données par la théorie de la membrane.

Nous allons brièvement exposer ci-dessous le principe de dispositions d'appui susceptibles de répondre au problème.

Au début de notre article (voir le numéro précédent de *La Houille Blanche*), nous avons évoqué les avantages présentés par le joint périmétral qui crée le long du pourtour de la voûte une solution de continuité pour les contraintes d'extension. Le mécanisme de tels appuis apparaît clairement sur les croquis (fig. 13).

On obtient une très nette réduction des pressions sur le rocher et le meilleur centrage de la poussée limite notablement l'influence du rocher sur la déformation de la voûte. Or, si la déformabilité de ce rocher joue, pour les arcs considérés isolément, dans le sens d'une diminution du moment d'encastrement, donc des

FIG. 13

contraintes maximales, elle est par contre de nature à accroître les flexions dans les consoles.

On franchirait un pas important vers l'isostaticisme des appuis si, par un artifice constructif, on parvenait à supprimer les moments sur le pourtour de la voûte.

La C.I.T.E. a fait breveter un dispositif susceptible de jouer un tel rôle.

Le principe du procédé est fort simple. L'appui de la voûte sur le socle s'effectue par l'intermédiaire de plaques de caoutchouc (néoprène par exemple) spécialement traité (fig. 14). Sous les très fortes pressions qu'il reçoit (de l'ordre de 100 kg/cm², c'est-à-dire le taux de travail d'un bon béton) le caoutchouc se comporte à peu près comme un fluide visqueux, pour la transmission des pressions.

Les dimensions l et L à donner aux plaques d'appui sont déterminées de façon que la pression soit suffisante pour provoquer le fluage du caoutchouc. La réaction de celui-ci est alors une poussée centrée, perpendiculaire à la face d'appui.

Si cette condition est remplie, la pression est quasi uniforme dans la bielle qui prolonge la voûte dans l'alvéole contenant le caoutchouc.

L'effort tranchant T (toujours faible devant Q) qui résulte de l'impossibilité du déplacement

FIG. 14

FIG. 15

radial est, pour sa part, équilibré par la face aval de l'alvéole. Un fretage local du béton pourra s'avérer nécessaire.

Un tel ensemble se comporte donc comme une articulation, mais comporte une large surface d'appui éliminant les inconvénients des articulations classiques (concentration des contraintes).

Si le système ci-dessus procure à l'appui un degré de liberté, il n'en subsiste pas moins l'effort tranchant. Or, on sait que cet effort tranchant est en grande partie responsable des moments de flexion dans les arcs, puisque, sans lui, la courbe des pressions serait confondue avec la fibre moyenne de l'arc.

On peut libérer davantage encore l'appui en ne lui laissant plus que la possibilité de réagir sous la forme d'un effort normal, c'est-à-dire d'une force agissant suivant la tangente à la fibre moyenne de l'arc au niveau de l'appui. Le schéma (fig. 15) illustre le principe d'un appui qui tend à remplir cette condition. La plaque de caoutchouc C_1 joue ici le même rôle que dans l'appui précédent. La bielle B , réalisée en béton armé est mécaniquement indépendante de la voûte.

On interpose entre cette bielle et le socle S une plaque de caoutchouc dont le traitement et les dimensions sont telles que la déformation reste dans le domaine élastique. Le module de rigidité au cisaillement du caoutchouc est assez faible pour que la plaque C_2 permette un déplacement tangentiel relatif ΔL assez important, en ne développant qu'une faible réaction élastique T' , qui fixe la nouvelle valeur de l'effort tranchant à la naissance (fig. 16).

FIG. 16

Pour un déplacement ΔL donné, T' est d'ailleurs inversement proportionnel à e . On peut ainsi, dans une certaine mesure, jouer sur l'épaisseur de la plaque pour réduire la valeur de T' .

L'effort normal Q qui comprime la plaque provoque une faible déformation Δe dans le sens de l'épaisseur, laquelle entraîne un tassement d'ensemble de la voûte. Ces déformations ne perturberont pas la distribution des contraintes dans la voûte si le mouvement qui en résulte correspond à une translation en bloc du barrage. Il est approximativement possible de se placer dans ce cas en intervenant sur la largeur L de telle sorte que, cette dimension variant en même temps que Q , la valeur de Δe soit à peu près la même partout le long des appuis latéraux, compte tenu de l'orientation. L'articulation dont nous venons de parler se comportera, si l'on excepte l'effort tranchant résiduel T' , comme un appui du premier genre.

Pour fixer les idées sur l'ordre de grandeur des déformations, on peut considérer le cas d'un arc circulaire de 50 m de rayon moyen et de 90° d'angle au centre, supportant une charge uniforme de 40 m d'eau.

Avec un coefficient d'élasticité du béton pris égal à 200 000 kg/cm², le déplacement radial correspondant à l'annulation totale de l'effort tranchant aurait pour valeur :

$$\Delta l = \frac{\sigma}{E} R;$$

$$\sigma = \frac{pR}{e} = 50 \text{ kg/cm}^2;$$

$$\Delta l = \frac{50 \times 50 \times 10^2}{200\,000} = 1,25 \text{ cm.}$$

Il suffirait donc d'une déformation tangentielle ΔL de la plaque de caoutchouc de l'ordre du centimètre pour libérer l'appui de façon convenable.

La contrainte que nous venons de calculer dans l'exemple ci-dessus par la formule du tube est celle que l'on obtiendrait dans l'arc pris isolément avec des appuis permettant à la fois la rotation et le déplacement tangentiel.

Dans le même arc simplement articulé, les contraintes auraient sensiblement pour valeur :

	INTRADOS kg/cm ²	EXTRADOS kg/cm ²
Naissances	50	50
Clé	38	61

Si l'arc était complètement encastré, le rocher étant supposé indéformable, on aurait :

	INTRADOS kg/cm ²	EXTRADOS kg/cm ²
Naissances	92,5	5
Clé	25	70

Les chiffres qui précèdent montrent clairement l'intérêt qui s'attache à la réalisation de l'isostatisme des appuis des arcs.

Alors que la contrainte maximale dans l'arc isostatique est égale à 50 kg/cm², elle n'atteint que 61 kg/cm² dans l'arc articulé, mais 92,5 kg/cm² dans l'arc encastré.

Il paraît légitime de s'attendre, lors du calcul global de la voûte, à des différences du même ordre de grandeur dans la valeur des contraintes correspondant aux divers cas d'appuis.

Conception d'un barrage articulé.

Un site de barrage étant donné, on déterminera d'abord une ligne moyenne d'articulation possible, en fonction de la forme de la vallée, de la résistance du terrain, du rapport des dimensions principales, etc. Une première analyse, menée selon les méthodes indiquées ci-dessus pour les coques, conduira à un réseau de funiculaires horizontaux et verticaux, dont on déduira un réseau d'isostatiques. C'est à partir de ces éléments que l'on calculera les plots constituant une articulation semi-continue.

En effet, les efforts ne pouvant être, pour tous les cas de charge, correctement répartis sur toute la ligne d'appui, l'articulation devra être décomposée en éléments de longueur assez faible (longueur calculée en suivant la ligne d'appui) pour que la pression puisse y être considérée comme constante dans tous les cas. De plus, il y a intérêt, du point de vue fabrication, à retrouver des éléments de largeur toujours identique, disons de l'ordre du mètre, la largeur de l'élément d'articulation (dimension prise perpendiculairement aux parements) étant seule variable.

En général, les isostatiques ne seront pas normales à la ligne d'appui moyenne. Dans la mesure où leur inclinaison ne sera pas trop importante, la composante tangentielle sera absorbée par l'encastrement du béton dans le logement de chaque plaque de caoutchouc, et la surface d'appui sera sensiblement continue (fig. 17).

Si, au contraire, l'inclinaison des isostatiques est plus importante, la surface d'appui pourra

FIG. 17

présenter l'aspect d'un escalier très étiré, de façon que chaque élément d'appui ne reçoive que des efforts normaux dans les cas de charge les plus fréquents.

Dans les zones de la surface d'appui non occupées par les plaques d'articulation, l'étanchéité

FIG. 18

sera assurée par un garnissage en matériau élastique légèrement compressible (caoutchouc légèrement alvéolaire).

CONCLUSION

On peut évidemment se demander, compte tenu des prix extrêmement bas réalisés sur les chantiers de bétonnage, s'il est intéressant de tant chercher à économiser le béton dans les voûtes. A cela, on peut répondre tout d'abord qu'en poussant un peu plus loin le même raisonnement, on ne ferait plus de barrages-voûtes. Les grands ouvrages-voûtes, comme Kariba, sont à peine moins lourds, et combien plus compliqués, que les ouvrages-poids correspondants. Si on les préfère, c'est qu'ils paraissent plus sûrs.

De même, l'ouvrage mince articulé appuyé sur un pulvino ne sera peut-être guère moins coûteux que la voûte classique, mais combien plus sûr : le rocher, ne recevant que des contraintes faibles de compressions presque pures, n'aura pas tendance à s'ouvrir pour laisser pénétrer la pression, ni à s'écraser plus ou moins élastiquement en augmentant la fatigue dans l'ouvrage.

Le ferait-il, que le jeu de l'articulation et la minceur de la coque élimineraient les moments indésirables, comme elles éliminent ceux qu'introduiraient les déformations élastiques du barrage sous la charge.

Homogénéité des contraintes, en grandeur et en direction, dans le béton et le rocher, n'est-ce pas là le souhait de tout projeteur?

Notons enfin en passant que le principe de l'articulation à base de matériau « fluant » est applicable à bien d'autres ouvrages que les barrages, et en particulier aux grands ponts voûtés, pour lesquels le problème de faire passer des forces considérables par un appui linéaire n'avait, jusqu'à présent, jamais été résolu de façon parfaitement satisfaisante.