

# INTÉGRATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS D'ÉCOULEMENT DE BARRÉ DE SAINT-VENANT PAR UN SCHÉMA IMPLICITE DE DIFFÉRENCES FINIES

Application  
au cas d'une galerie  
tantôt en charge  
tantôt à surface libre

PAR J. A. CUNGE ET M. WEGNER

## Introduction

Depuis plusieurs années on observe une utilisation de plus en plus courante des machines électroniques dans le domaine du calcul des intumescences. Les travaux de Stocker et Isaacson [1] sur la propagation des ondes de crue dans les rivières ont été suivis par ceux de plusieurs organisations. La SOGREAH avait sa place parmi elles, surtout dans le domaine du calcul des ondes de crue et de la construction des modèles mathématiques des rivières. Ceci nous a d'ailleurs amenés à reconsidérer la méthode originalement utilisée par Stocker, laquelle avait de sérieuses limitations.

Ainsi est née la méthode de calcul dite « implicite » [2], [3], [4], [6].

Une fois le problème du calcul de l'écoulement non stationnaire dans les canaux et rivières résolu, SOGREAH s'est occupée de la question de l'écoulement discontinu. Ainsi nous avons réussi à reproduire, par le calcul, le phénomène du mascaret [4], [5].

Dans le domaine de la propagation des intumescences nous avons rencontré un problème fort intéressant et qui trouve, très souvent, des applications : celui de la galerie tantôt en charge, tantôt à surface libre. Nous avons réussi à reproduire ce phénomène et nous présentons ici notre solution. En même temps, nous exposons le principe de notre méthode implicite appliquée au calcul des intumescences.

## Écoulement dans une galerie.

Le problème d'écoulement dans une galerie se pose le plus souvent dans deux cas.

— PREMIER CAS. — Galerie de fuite ou de dérivation d'une usine hydraulique.

Si la galerie est toujours à surface libre, on peut calculer l'écoulement sans grandes difficultés. Le problème se complique si la galerie est mise en

charge. Par exemple, une galerie de fuite peut débiter dans un cours d'eau au niveau variable. A ce moment on peut envisager le cas d'ouverture de turbines pour lequel la section entière de la galerie sera remplie et la galerie elle-même mise en charge. Pour éviter ceci, il faudrait évidemment une chambre d'équilibre ayant une surface très grande, si l'on veut y emmagasiner tout le volume nécessaire. On peut aussi envisager le « régime mixte » : une galerie, une cheminée d'équilibre et trois phases du phénomène :

*Première* : remplissage progressif du profil;

*Deuxième* : la section amont de la galerie remplie, le niveau monte dans la cheminée d'équilibre et l'onde de remplissage avance le long de la galerie;

*Troisième* : dès que l'onde de remplissage arrive à la sortie de la galerie, écoulement sous la pression  $Z-Z_1$  ( $Z$  est le niveau dans la cheminée d'équilibre,  $Z_1$  la hauteur de l'onde à la sortie). Le débit de la galerie augmente très vite et dépasse même le débit des turbines. Le niveau dans la chambre d'équilibre baisse et bientôt l'écoulement à surface libre s'établit dans la galerie. Ce régime mixte, décrit en détails dans [7] et [8] est très intéressant : très souvent son calcul permet de diminuer nettement les dimensions de la cheminée d'équilibre ou celles de la galerie, donc de trouver une solution plus économique.

DEUXIÈME CAS. — Réseau souterrain de canalisations. On sait très bien que dimensionner les collecteurs, sans qu'ils soient mis en charge, pour les débits maximaux qui peuvent être provoqués par les précipitations est rarement possible et surtout n'est pas économique. Généralement il faut prévoir de grandes surfaces ou réservoirs d'eau, jouant le rôle de cheminées d'équilibre, où l'eau est stockée jusqu'à la libération des collecteurs. Il ne faut pas insister sur le prix que peut coûter une telle solution, étant donné qu'il s'agit généralement de terrains se trouvant à l'intérieur des villes.

Or, si on pouvait reproduire par le calcul le phénomène de la propagation des ondes dans le réseau

\* Société Grenobloise d'Etudes et d'Applications Hydrauliques (SO.GR.E.A.H.).

souterrain des galeries, qui travaillent tantôt en charge, tantôt en surface libre, on pourrait aussi prévoir très exactement le volume des réservoirs nécessaires, et ensuite, soit le diminuer (par rapport aux estimations traditionnelles), soit diminuer le volume des conduites souterraines projetées, sans augmenter celui des réservoirs.

Tout cela nécessiterait une méthode de calcul automatique qui permettrait de reproduire le passage d'un type d'écoulement à l'autre et surtout qui reproduirait la seconde phase d'écoulement.

Ce problème s'est posé à l'occasion de la construction de l'usine de Wettingen [7], [8]. Les calculs ont été effectués par MM. les Professeurs Meyer-Peter et Favre [8]; indépendamment par J. Calame [7] et enfin le modèle réduit a été construit [8].

Nous allons ici présenter notre méthode de calcul, basée sur l'intégration numérique des équations d'écoulement à surface libre et ensuite nous comparerons nos résultats de calcul pour la galerie de Wettingen avec ceux cités ci-dessus. Nous commençons par l'exposé de la méthode dite « implicite » de calcul des intumescences dans les canaux découverts à section arbitraire.

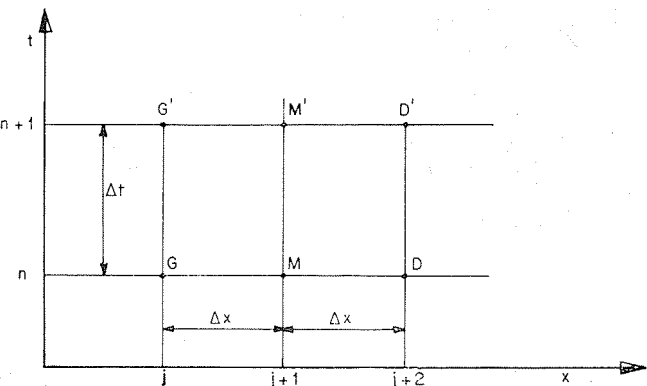
**Méthode implicite**

Il s'agit proprement dit d'un schéma implicite de différences finies dans le plan (x, t) qui permet de remplacer les équations différentielles d'écoulement par des équations aux différences finies. Les équations différentielles d'écoulement non stationnaire à surface libre sont celles de Saint-Venant :

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{b} \frac{\partial (Sv)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} - Kg v |v| \quad (1)$$

- où :
- y = la cote de la surface d'eau;
  - v = la vitesse moyenne;
  - S = la section mouillée;
  - b = la largeur;
  - K = un coefficient de résistance;
  - x = la distance dans l'axe de la rivière;
  - t = le temps.



1/ Réseau de points dans le plan (x, t).

On admet dans (1) que la direction positive de la vitesse est contraire à l'axe x.

Il s'agit de remplacer (1) par des équations aux différences finies. Considérons (fig. 1), le plan (x, t) :

Nous connaissons l'état de la rivière (donc les valeurs de v et y) au temps n et aux points G, M, D. Nous voudrions le connaître au temps n + 1 pour les points G', M', D'. La voie la plus simple consiste à remplacer les dérivées des équations (1) selon les formules :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} &\sim \frac{y(M') - y(M)}{\Delta t} \text{ avec } y(M) = \frac{y(G) + y(D)}{2} \\ \frac{\partial y}{\partial x} &\sim \frac{y(D) - y(G)}{2 \Delta x} \end{aligned} \right\} (2)$$

les dérivées  $\partial v / \partial t$  et  $\partial v / \partial x$  sont traitées de même.

En substituant (2) dans (1) on trouve les formules explicites pour y(M') et v(M') en fonction de y(G), y(D), y(M) et v(G), v(M), v(D); autrement dit les valeurs de y et v au temps n + 1 peuvent être trouvées uniquement en fonction de y et v aux points voisins connus au temps n. Cette méthode a pourtant plusieurs inconvénients. En particulier il faut que :

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{\sqrt{g(S/b)} + |v|}$$

où S est la section mouillée et b la largeur. Si cette condition n'est pas satisfaite, l'instabilité numérique du calcul apparaît. On peut trouver la description de ce phénomène ailleurs [2], [3], [4]. Nous expliquerons plus loin pourquoi cette condition nous force à écarter la possibilité de calculer l'écoulement dans une galerie en charge à l'aide de la méthode explicite. Mais on peut, au lieu des formules (2), utiliser des formules différentes, par exemple :

$$\frac{\partial y}{\partial t} \sim \frac{1}{\Delta t} \left[ \frac{y(G') + y(M')}{2} - \frac{y(G) + y(M)}{2} \right] \quad (3)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} \sim \frac{1}{\Delta x} [\theta \{y(M') - y(G')\} + (1 - \theta) \{y(M) - y(G)\}]$$

Ici le coefficient  $\theta$  joue le rôle d'un coefficient de pondération. En appliquant les formules (3) nous obtiendrons, après la substitution dans (1), des équations aux différences finies qui diffèrent bien des précédentes. On verra alors qu'il n'est pas possible de donner des formules explicites pour le niveau et le débit aux points G' et M'.

En effet, les équations (1), après la substitution (3), s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 & \frac{y_j^{n+1} - y_j^n + y_{j+1}^{n+1} - y_{j+1}^n}{2 \Delta t} \\
 &= \frac{1}{b} \left\{ \begin{aligned} & \frac{S_{j+1}^n v_{j+1}^n - S_j^n v_j^n}{\Delta x} (1 - \theta) \\ & + \frac{S_{j+1}^{n+1} v_{j+1}^{n+1} - S_j^{n+1} v_j^{n+1}}{\Delta x} \theta \end{aligned} \right\} \quad (4) \\
 & \frac{v_j^{n+1} - v_j^n + v_{j+1}^{n+1} - v_{j+1}^n}{2 \Delta t} \\
 &= \left\{ \begin{aligned} & (1 - \theta) \left( \frac{v_{j+1}^n + v_j^n}{2} \right) \left( \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{\Delta x} \right) \\ & + \theta \left( \frac{v_{j+1}^{n+1} + v_j^{n+1}}{2} \right) \left( \frac{v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \end{aligned} \right\} + \\
 & + g \left\{ \frac{y_{j+1}^n - y_j^n}{\Delta x} (1 - \theta) + \frac{y_{j+1}^{n+1} - y_j^{n+1}}{\Delta x} \theta \right\} + \\
 & - \frac{g}{2} \left\{ \begin{aligned} & (1 - \theta) [K_{j+1}^n v_{j+1}^n |v_{j+1}^n| + K_j^n v_j^n |v_j^n|] \\ & + \theta [K_{j+1}^{n+1} v_{j+1}^{n+1} |v_{j+1}^{n+1}| + K_j^{n+1} v_j^{n+1} |v_j^{n+1}|] \end{aligned} \right\} \quad (5)
 \end{aligned}$$

où les index  $n$  et  $n + 1$  correspondent aux temps :

$$t_n \text{ et } t_{n+1} = t_n + \Delta t$$

et les index  $j$  et  $j + 1$ , aux abscisses  $x = j$  et  $x = j + 1$ . En éliminant dans (4) les valeurs indiquées par  $n + 1$  :

$$\begin{aligned}
 y_j^{n+1} &= y_j^n + \Delta y_j & y_{j+1}^{n+1} &= y_{j+1}^n + \Delta y_{j+1} \\
 v_j^{n+1} &= v_j^n + \Delta v_j & v_{j+1}^{n+1} &= v_{j+1}^n + \Delta v_{j+1} \\
 S_j^{n+1} &= S_j^n + \Delta S_j & & \dots \dots \dots \\
 \Delta S_j &= b_j \Delta y_j & & \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

et en linéarisant les équations qui en résultent, on arrive à deux équations liant quatre inconnues :  $\Delta y_j, \Delta v_j, \Delta y_{j+1}, \Delta v_{j+1}$ .

Il est possible alors d'exprimer  $\Delta y_j$  en fonction de  $\Delta y_{j+1}$  et  $\Delta v_{j+1}$  :

$$\Delta y_j = L_j \Delta y_{j+1} + M_j \Delta v_{j+1} + N_j \quad (6)$$

Par ailleurs, si les quantités  $\Delta y_j$  et  $\Delta v_j$  sont liées par une relation :

$$\Delta v_j = E_j \Delta y_j + F_j \quad (7)$$

on peut, à l'aide des équations (4) et (5) obtenir les valeurs  $E_{j+1}$  et  $F_{j+1}$  donnant la relation :

$$\Delta v_{j+1} = E_{j+1} \Delta y_{j+1} + F_{j+1} \quad (8)$$

On voit bien, que si on construit les équations aux différences finies selon les formules (3) pour tous les points  $j$  on aboutit à un système d'équations algébriques linéaires. La matrice de ce système est assez particulière : elle n'est pas seulement très creuse, mais encore chaque ligne ne contient que trois coefficients groupés autour de la diagonale. Ceci permet de trouver la solution à l'aide de la méthode de « Progonki » [9] ou « algorithme de Richtmyer » [2].

Généralement à la limite gauche (ou droite) du modèle, nous connaissons une relation  $v_0 = v_0(y_0)$  qui, par linéarisation, conduit à :

$$\Delta v_0 = E_0 \Delta y_0 + F_0$$

On a donc une relation du type (7) pour la limite gauche, permettant le calcul des coefficients  $E$  et  $F$  de proche en proche, jusqu'à la limite droite.

Le calcul s'effectue en deux phases : tout d'abord on calcule et on stocke les coefficients  $L, M, N$  et  $E, F$  pour tous les points  $j$  en allant de gauche à droite. Lorsqu'on arrive à la limite droite, la condition à cette limite permet de déterminer  $\Delta y$  et  $\Delta v$  pour ce point.

Dans la seconde phase, on procède de droite à gauche en calculant  $\Delta y, \Delta v, y$  et  $v$  de proche en proche en se servant des coefficients stockés  $L, M, N$  et des équations (6) et (7). Ainsi, on connaît l'état du canal au temps  $t_n + \Delta t = t_{n+1}$  et on peut avancer au pas de temps suivant.

Il reste à expliquer la signification du coefficient de pondération  $\theta$ . Notre expérience montre que si  $(1/2) < \theta \leq 1$ , le schéma choisi est inconditionnellement stable (du point de vue du calcul numérique). Pour  $\theta = 0$ , nous avons le schéma explicite, donc instable pour

$$\Delta t > \frac{\Delta x}{\sqrt{gh} + |v|}, \text{ et finalement, pour } 0 < \theta \leq \frac{1}{2},$$

le schéma est instable pour certaines conditions intermédiaires.

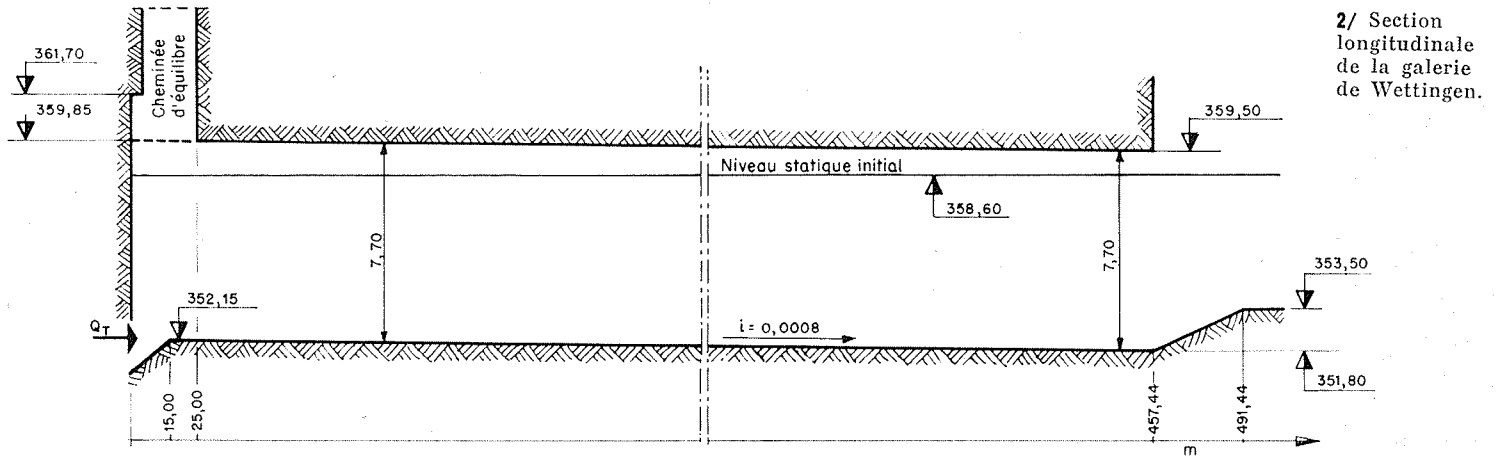
### Application au calcul du régime mixte

La méthode décrite ci-dessus nous a permis d'établir le programme de calcul des ondes dans les rivières pour lesquelles la méthode explicite mènerait à des temps de calcul prohibitifs. Il est bien entendu que cette méthode n'est valable que pour le type d'écoulement défini par les équations de Saint-Venant. Elle est valable toutefois pour des sections arbitraires du canal. En introduisant les valeurs de  $S$  et de  $K$  en fonction de la profondeur, on peut facilement calculer l'écoulement dans une galerie à surface libre. Pour pouvoir calculer, avec les mêmes hypothèses et le même programme, l'écoulement dans la galerie en charge, nous avons eu recours à un artifice mentionné déjà dans [4].

Nous admettons que l'écoulement est toujours du type « à surface libre » et, au lieu de prendre

la section fermée de la galerie, nous ajoutons à sa partie supérieure une fente de très faible largeur. Ainsi, le changement de la section est négligeable et le calcul devient possible, comme le prouve l'exemple suivant. La fente joue tout simplement le rôle d'un piézomètre.

Maintenant, nous pouvons justifier la nécessité



2/ Section longitudinale de la galerie de Wettingen.

de l'application du schéma implicite pour nos calculs. Théoriquement, la vitesse de propagation de l'onde dans une galerie sous pression est infinie (en admettant que l'eau est incompressible). Avec notre méthode de calcul, cette condition n'est satisfaite qu'approximativement, puisque dans nos formules la vitesse de propagation est exprimée par :

$$C = \sqrt{\frac{gS}{b}}$$

Pour le cas considéré ici, la fente ayant la largeur 0,001 m, la surface de la galerie  $S = 54,95 \text{ m}^2$ , la valeur de  $C$  était :

$$\sqrt{\frac{9,81 \times 54,95}{0,001}} \approx 735 \text{ m/s}$$

Ceci est suffisant pour avoir des résultats valables, mais empêche pratiquement l'application du schéma explicite. Par exemple, pour  $\Delta x = 5 \text{ m}$ , on serait forcé de choisir une valeur du pas de temps :

$$\Delta t < \frac{5}{735} = 0,0068 \text{ s.}$$

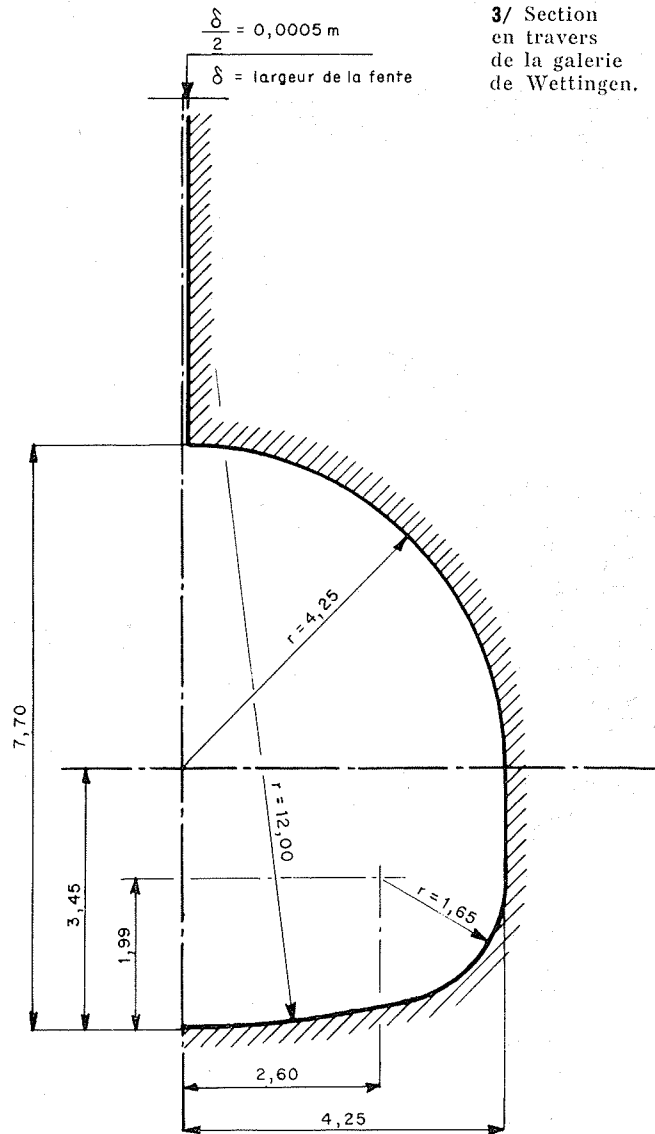
Si le phénomène durait environ 80 s (comme celui qui nous intéresse), il faudrait effectuer :

$$\frac{80}{2 \times 0,0068} \approx 5\,900 \text{ cycles de calcul.}$$

Utilisant le schéma implicite avec  $\Delta x = 5 \text{ m}$  et  $\Delta t = 1 \text{ s}$ , nous n'avons que 80 cycles de calcul et, même si le temps de calcul d'un cycle est deux fois plus grand pour le schéma implicite, on voit très bien que pratiquement c'est le seul schéma utilisable.

### Calcul de la galerie de Wettingen

Nous avons repris les données correspondant au problème de Wettingen en nous basant sur [7]. On trouve sur les figures 2 et 3 les caractéristiques



3/ Section en travers de la galerie de Wettingen.

géométriques de la galerie, et de la cheminée d'équilibre. Nous avons admis que le coefficient de Strickler est égal à 80 et nous avons ajouté (voir fig. 3) une fente de largeur 1 mm à la section originale. La galerie débouche dans un ouvrage à ciel ouvert

rejoignant la rivière Limmat. On considère le cas le plus défavorable d'un démarrage simultané des trois turbines de l'usine (débit total 120 m<sup>3</sup>/s) pendant la crue de la Limmat avec le niveau statique dans la galerie à ce moment à la cote + 358,60.

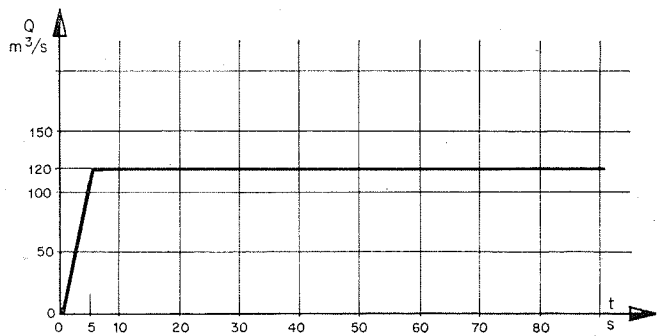
**Schématisation de la galerie**

On a admis trois tronçons :

- l'ouvrage conique, avec 8 points de calcul éloignés de Δx = 5 m l'un de l'autre;
- la galerie elle-même, avec 88 points de calcul éloignés de Δx = 5 m l'un de l'autre;
- la cheminée d'équilibre, avec 6 points de calcul éloignés de Δx = 5 m l'un de l'autre.

Comme conditions aux limites de notre modèle, nous avons admis :

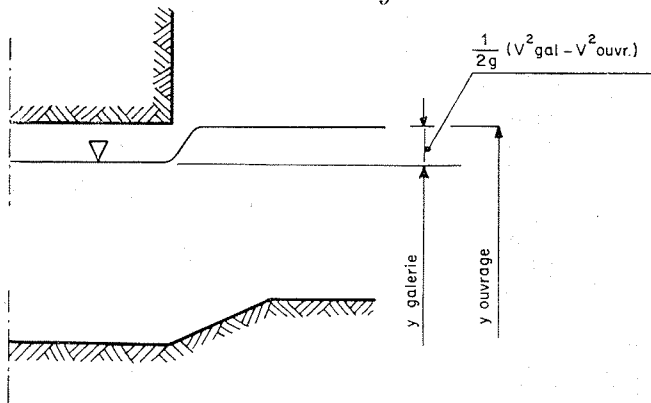
- en aval de l'ouvrage conique, le niveau de la Limmat constant et égal à + 358,60;
- en amont, le débit de l'usine donné pour le graphique figure 4,



4/ Variation du débit turbiné.

ceci correspondant à l'ouverture brusque des turbines en 5 s. La condition de passage entre la galerie et l'ouvrage en aval a été « programmée » (voir fig. 5) selon les formules :

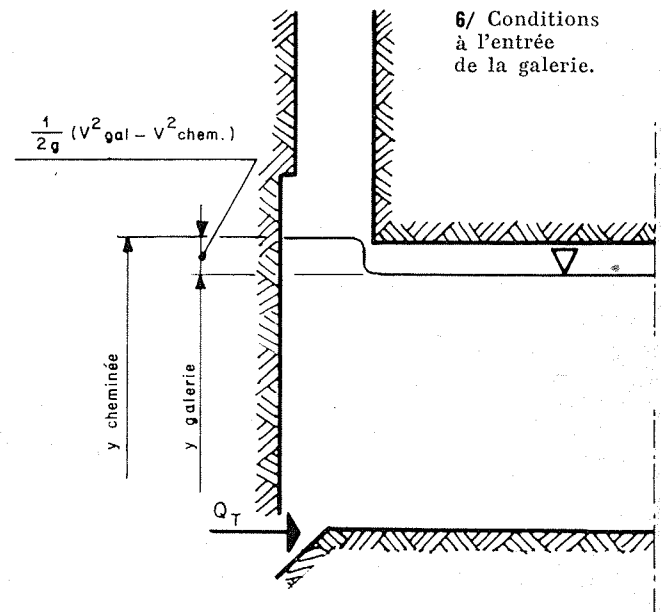
$$Q_{galerie} = Q_{ouvrage} \quad y_{ouvrage} = y_{galerie} + \frac{1}{2g} (V_{galerie}^2 - V_{ouvrage}^2)$$



5/ Conditions à la sortie de la galerie.

La condition de passage entre la galerie et la cheminée d'équilibre est plus compliquée, puisqu'elle dépend de la phase d'écoulement.

PHASE I. — Ecoulement à surface libre. La longueur de la cheminée n'étant pas négligeable par rapport à la longueur de la galerie, nous avons admis que le phénomène, dans la cheminée, se passe comme pour le canal découvert :



Tant que le niveau dans la cheminée, moins la hauteur représentative de l'énergie cinétique ne dépasse pas la cote + 359,85 (la calotte de la galerie), nous avons un écoulement à surface libre et les conditions de passage sont :

$$Q_{cheminée} = Q_{galerie} \quad y_{galerie} = y_{cheminée} - \frac{1}{2g} (v_{galerie}^2 - v_{cheminée}^2)$$

PHASE II. — Dès que la galerie est mise en charge, une onde de remplissage se propage vers l'aval et la cheminée d'équilibre commence à se remplir. A ce moment-là, nous avons admis le niveau horizontal dans la cheminée. Le volume d'eau emmagasiné dans la cheminée est égal à la différence entre Q<sub>turbine</sub> et le débit évacué par la galerie. Alors on peut trouver le niveau dans la cheminée. Ensuite on peut imposer, comme condition en amont de la galerie le niveau :

$$y_{galerie} = y_{cheminée} - \frac{v_{galerie}^2}{2g}$$

(la vitesse dans la cheminée étant nulle).

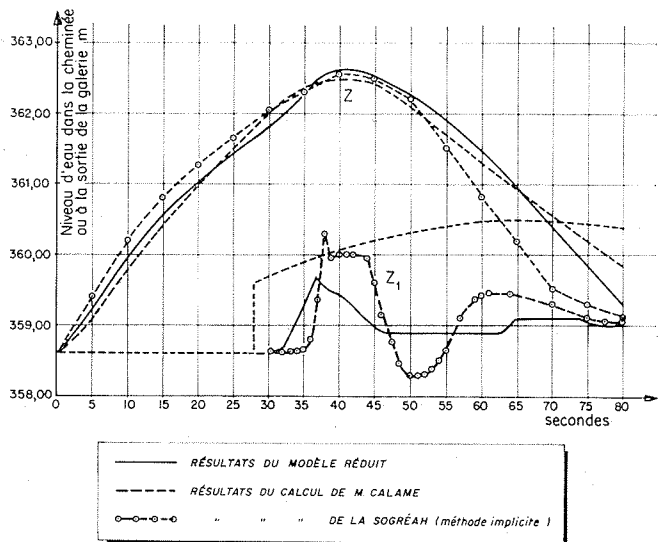
**Résultats du calcul**

Nous avons effectué le calcul pour des conditions mentionnées ci-dessus, en admettant le coefficient de pondération θ = 2/3. Le but principal était la vérification de notre méthode par comparaison avec les calculs effectués auparavant et les résultats

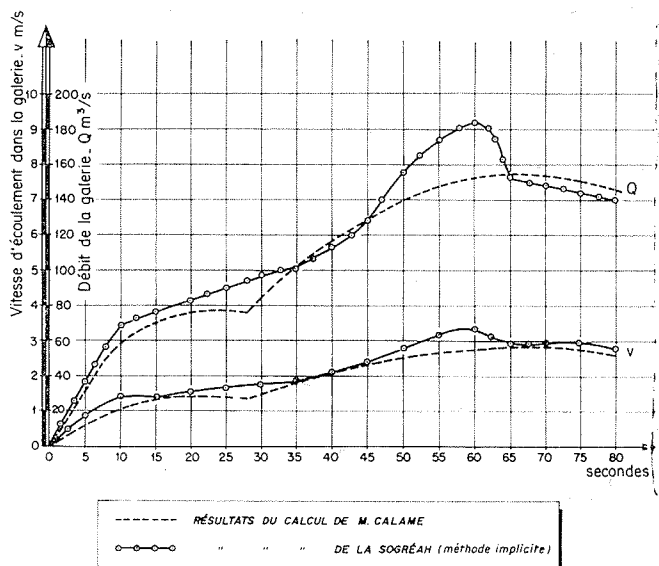
obtenus à l'aide du modèle réduit [7], [8]. Il s'agit surtout du calcul des valeurs les plus importantes :

- $a_1$  = vitesse de propagation de l'onde le long de la galerie;
- $Z$  = ordonnée du niveau de l'eau dans la chambre d'équilibre;
- $Z_1$  = ordonnée du niveau de l'eau dans l'ouvrage de fuite à la sortie de la galerie;
- $Q_1$  = le débit qui s'écoule par la galerie à la vitesse moyenne  $W_1 = Q_1/f_1$ , où  $f_1$  est la section mouillée.

Les figures 7 et 8 donnent la comparaison de ces valeurs calculées par la méthode exposée par M. Calame, observées sur le modèle réduit construit par le Laboratoire de Recherches Hydrauliques à Zürich [7], [8] avec celles calculées par la SOGREAH.



7/ Variation des niveaux dans la cheminée d'équilibre Z et à la sortie de la galerie  $Z_1$  en fonction du temps.



8/ Variation du débit de la galerie et de la vitesse d'écoulement en fonction du temps.

On aperçoit des différences qui peuvent être expliquées par le fait que les conditions aux limites dans les trois cas n'étaient pas exactement les

mêmes. Ainsi l'hypothèse du niveau constant de la Limmat est probablement responsable de la réflexion de l'onde, qui est plus marquée dans nos calculs qu'on ne l'observe sur le modèle. Quant aux débits (fig. 7), nous n'avons pas eu connaissance de résultats du modèle et nous étions obligés de comparer nos résultats avec les calculs de M. Calame seulement, eux seuls étant à notre disposition.

Néanmoins, il semble que nos calculs reproduisent assez bien le phénomène, au moins en les comparant avec les calculs traditionnels et les observations sur le modèle réduit. Les deux facteurs les plus importants : le temps d'arrivée de l'onde à la section aval de la galerie et le niveau dans la cheminée sont très proches, comme le montre la table suivante :

	MODÈLE	CALCUL CALAME	CALCUL SOGREAH
Temps d'arrivée de l'onde. . . . . (s)	30	28	32
Temps auquel le niveau dans la cheminée atteint son maximum. . . . . (s)	43	40	43
Le niveau maximal dans la cheminée au-dessus du niveau initial. . . . . (m)	4,05	3,93	3,96

Les calculs ont été effectués à l'aide de notre programme standard de propagation d'ondes et sur l'ordinateur électronique IBM 7070. Le temps nécessaire pour calculer 80 cycles (c'est-à-dire pour reproduire le phénomène durant 80 s en réalité,  $\Delta t$  étant égal à une seconde), était de 20 mn environ.

Liste des références

- [1] E. ISAACSON, J. J. STOKER et A. TROESCH. — Numerical solution of flood prediction and river regulation problems. *New York University. Reports I, II, III, 1953-1956.*
- [2] R. D. RICHTMYER. — Difference methods for initial value problems. *Interscience Publishers, New York, 1957.*
- [3] A. PREISSMANN. — Propagation des intumescences dans les canaux et les rivières. *1<sup>er</sup> Congrès de l'Association Française de Calcul, Grenoble, 1960.*
- [4] A. PREISSMANN et J. A. CUNGE. — Calcul des intumescences sur machines électroniques. *IX<sup>e</sup> Assemblée Générale de l'A.I.R.H., Dubrovnik, 1961.*
- [5] A. PREISSMANN et J. A. CUNGE. — Calcul du mascaret sur machine électronique. *Mémoires & Travaux de la Société Hydrotechnique de France, 1961; et La Houille Blanche, n° 5, 1961.*
- [6] J. A. CUNGE et P. BERTHIER. — Digital computers and hydro-electric design problems. *Water Power, 1962.*
- [7] J. CALAME. — Calcul de l'onde de translation dans les canaux d'usines, Lausanne-Paris, 1932.
- [8] E. MEYER-PETER et H. FAVRE. — Ueber die Eigenschaften von Schwallen und die Berechnung von Unterwasserstollen. *Schweizerische Bauzeitung, 1932.*
- [9] A. A. ABRAMOW et W. B. ANDRIEYEW. — Application de méthode « pragonki »... (en russe). *Journal de Mathématique Appliquée et de la Physique Mathématique, t. 3, n° 2, 1963.*

**Abstract**

**Numerical integration of Barré de Saint-Venant's flow equations by means of an implicate scheme of finite differences. Applications in the case of alternately free and pressurised flow in a tunnel.**

**By J. A. Cunge and M. Wegner**

The study of free-surface flows involves the solution of hyperbolic partial differential equations. A numerical solution method is described, in which the partial derivatives are replaced by finite differences so that, for a function  $f(x, t)$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \theta \frac{f(x + \Delta x, t + \Delta t) - f(x, t + \Delta t)}{\Delta x} + (1 - \theta) \frac{f(x + \Delta x, t) - f(x, t)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f(x + \Delta x, t + \Delta t) + f(x, t + \Delta t)}{2 \Delta t} - \frac{f(x + \Delta x, t) + f(x, t)}{2 \Delta t}$$

where  $\theta$  is a weighting factor such that  $\frac{1}{2} < \theta \leq 1$ .

Furthermore, by assuming a linear relationship between level and velocity increases in the time increment and by using an algorithm described by Richtmyer [2], the authors succeed in solving a system of concatenated linear equations clearly defined by the boundary conditions. The derivation and solution of the formulae are described for the first time in detail for the application of this implicit scheme of finite differences to hyperbolic equations.

This method obviously requires electronic computing equipment for its application. In view of the completely satisfactory results obtained for river and canal wave problems, it was thought worth applying it to the problem of composite tunnel flow as well (i.e. varying between pressurised and free-surface flows), of which numerous cases occur in practice. For this, the authors use an artifice first thought of by Preissmann [4] to reduce pressurised flow to free-surface flow, in which a very narrow slot is provided in the upper part of the tunnel to act as a piezometer without affecting the tunnel cross-sectional area.

This method is then used to calculate the rapid tail race tunnel and surge tank filling conditions produced when the turbines at Wettingen power station are opened up fully in five seconds.

A comparison of the author's results with those of model tests at the Zürich Hydraulic Research Laboratory [8] and data calculated by Calame [7] gives the following figures for the two most important factors concerned:

	MODEL	CALAME CALCULATION	SOGREAH CALCULATION
Time taken by the wave to arrive (seconds).....	30	28	32
Maximum water level in the surge tank (metres).....	4.05	3.93	3.96

The calculations are thus seen to be adequately representative of the phenomenon, certain differences being due to the fact that the boundary conditions chosen were not the same in all three cases, especially as regards the tunnel outlet level.