QUELQUES ASPECTS DE LA PROPAGATION DES CRUES

PAR
A. DAUBERT *

I. — Introduction.

La propagation des ondes de crue a fait l'objet de très nombreuses études. Il s'agit ici, simplement, de faire une synthèse des diverses façons d'aborder le problème et d'en montrer les liaisons en suivant un double fil conducteur, l'un purement mathématique et l'autre un peu plus physique.

II. — Crues et intumescences.

Il est bien connu que les ondes de gravité en canaux, à condition qu'elles soient suffisamment « longues », se propagent sur un tirant d'eau y, à une célérité $\pm \sqrt{gy}$ par rapport au courant. C'est ce que l'on observe effectivement avec des intumescences, qui peuvent ainsi se propager à des vitesses bien supérieures à celles du courant.

Les hydrologues savent, au contraire, que les crues semblent se propager avec une célérité de l'ordre de grandeur de la vitesse du courant. La formule donnée par Seddon fournit bien ce résultat.

Sur cette divergence, divers auteurs se sont penchés, en particulier Stoker [1], qui montre la validité de la formule de Seddon pour des ondes dites « monoclinales » en satisfaisant rigoureusement à toutes les équations du problème.

Le chemin que nous suivrons ne veut pas être aussi rigoureux. Partant des équations indéfinies générales, nous essaierons de supputer l'ordre de grandeur des termes qui interviennent dans l'équilibre dynamique. En négligeant ceux d'entre eux qui sont faibles sous certaines hypothèses, nous verrons se dessiner l'onde de crue qui n'apparaîtra plus comme une onde de gravité.

III. — Rappel des équations.

Elles sont au nombre de deux que nous rappellerons sans démonstration :

— équation de continuité :

$$\frac{\partial Q}{\partial X} + B \frac{\partial Z}{\partial t} = 0$$

— équation dynamique (Barré de Saint-Venant) :

$$\frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{g} V \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial Z}{\partial X} + J = 0$$

où : Z représente la cote de la surface libre;
V la vitesse moyenne dans la section S;
$Q = VS$ le débit;
B la largeur en surface;
J la pente de la ligne de charge;
X l'abscisse curviligne le long de la rivière;
et : t le temps.

Nous n'avons pas introduit les classiques coefficients tenant compte d'une répartition de vitesse non uniforme dans la section, car ils n'apporteraient rien dans la suite du développement.

A ces équations, il convient d'ajouter des conditions aux limites que nous ne préciserons pas davantage ici, si ce n'est que nous en tirerons un « temps caractéristique T_0 » qui pourrait être, par exemple, la durée de la crue, en tout cas un temps qui fixe l'ordre de grandeur de la durée de l'évolution de la cote et du débit dans la section amont. T_0 nous fixera l'échelle des temps, c'est-à-dire la rapidité avec laquelle les phénomènes évolueront.

Nous choisirons par ailleurs d'autres grandeurs de base qui nous serviront de référence.

Pour les cotes, on prendra : H_0, tirant d'eau dans la section amont avant le passage de la crue, en régime permanent.

Les distances seront rapportées à une longueur de référence :

$$L_0 = H_0/I_0$$

I_0 étant en gros la pente de la surface libre ou de la ligne de charge en régime permanent.

De même, la largeur de référence sera B_0, largeur en surface dans la section amont avant la crue et la vitesse de référence V_0, vitesse dans cette même section et dans les mêmes conditions.

On posera, dans ces conditions :

$$\begin{aligned} Z &= H_0 z \\ B &= B_0 b \\ V &= V_0 v \\ Q &= V_0 B_0 H_0 q \\ J &= I_0 j \\ X &= L_0 x \\ t &= T_0 \tau \end{aligned}$$

* Electricité de France, Centre de Recherches et d'Essais de Chatou.

L'avantage de ce changement de variables est de faire apparaître des quantités voisines de l'unité * sauf évidemment pour les variables indépendantes x et τ.

Les équations s'écrivent alors :

$$(\mathrm{I}) \quad \boxed{\begin{array}{c} \dfrac{\partial q}{\partial x} + \dfrac{b}{\mathrm{E}} \dfrac{\partial z}{\partial \tau} = 0 \\[2ex] \dfrac{\mathcal{F}^2}{\mathrm{E}} \dfrac{\partial v}{\partial \tau} + \mathcal{F}^2 v \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial x} + j = 0 \end{array}}$$

en posant :

$$\mathrm{E} = \frac{\mathrm{V}_0 \mathrm{T}_0}{\mathrm{L}_0} = \frac{\mathrm{V}_0 \mathrm{T}_0 \mathrm{I}_0}{\mathrm{H}_0}$$

$$\mathcal{F}^2 = \frac{\mathrm{V}_0^2}{g \mathrm{H}_0} \text{ d'où } \frac{\mathcal{F}^2}{\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{V}_0}{g \mathrm{T}_0 \mathrm{I}_0}$$

IV. — Les diverses simplifications.

Remarquons tout d'abord que lorsque l'on fait tendre T_0 vers l'infini, les équations du système (I) tendent vers celles qui régissent le régime permanent.

Nous n'irons pas jusqu'à une évolution s'étendant sur un temps infini, mais essayons de nous rendre compte, sur une crue, de la rapidité d'évolution qu'elle représente.

Considérons une rivière pour laquelle :

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_0 &= 10 \text{ m} \\ \mathrm{I}_0 &= 5.10^{-4} \\ \mathrm{L}_0 &= 5 \text{ km} \\ \mathrm{B}_0 &= 500 \text{ m} \\ \mathrm{V}_0 &= 1 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Supposons que la crue dure 10 jours :

$$\mathrm{T}_0 = 8{,}64.10^5 \text{ s}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^2 &= 10^{-2} \\ \mathrm{E} &= 43{,}2 \\ \frac{\mathcal{F}^2}{\mathrm{E}} &\# 2.10^{-4} \end{aligned}$$

Conséquence :

Si l'on considère l'équation dynamique, on est tenté d'y négliger le premier terme et même à la rigueur le second, vis-à-vis *des deux derniers, qui sont de l'ordre de l'unité,* attendu que les vitesses en période de crue ne peuvent malgré tout pas être multipliées par 100.

Nous ne ferons pas la même simplification dans l'équation de continuité, qui ne comporte que deux termes dont nous sommes obligés de supposer l'équivalence sous peine de retrouver le mouvement permanent.

Nous considérerons donc trois cas distincts, correspondant à des conditions physiques différentes que nous allons essayer de dégager.

PREMIER CAS :

$$\boxed{\frac{\mathcal{F}^2}{\mathrm{E}} \ll \mathcal{F}^2 < 1}$$

Le paramètre :

$$\frac{\mathcal{F}^2}{\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{V}_0/\mathrm{T}_0}{g \mathrm{I}_0}$$

compare l'*accélération locale* des particules, imputable à la variation du mouvement due à la crue, à l'accélération de la pesanteur sur le plan incliné que représente la surface libre en régime permanent. Dire que ce paramètre est très inférieur à 1, c'est dire que l'impulsion apportée par la crue est très négligeable devant les forces de pesanteur qui entrent déjà en jeu lors du mouvement permanent.

DEUXIÈME CAS :

$$\boxed{\mathcal{F}^2 \ll 1}$$

Le carré du nombre de Froude $\mathcal{F}^2$ est lui-même petit devant l'unité. Cette hypothèse ne met nullement en cause la crue, mais la rivière elle-même en régime permanent. Cela suppose essentiellement que de l'aval ne remonte aucune influence importante.

Négliger $\mathcal{F}^2$ devant l'unité, c'est supposer à leur tour, les effets de mise en vitesse ou de ralentissement dûs à la variation de la profondeur, faibles devant l'accélération de la pesanteur sur le plan incliné représenté par la surface libre.

Il n'est malheureusement pas possible, dans la présente étude, de fixer une valeur à $\mathcal{F}^2$ à partir de laquelle on puisse faire cette hypothèse. Mais l'on peut tout de même remarquer, pour les gens qui ont l'habitude de calculer des courbes de remous, que le domaine de validité de cette hypothèse doit être vraisemblablement plus étendu qu'en régime permanent. En effet, dans le calcul des courbes de remous, l'équation dynamique seule détermine la cote. Ici, ce rôle sera dévolu essentiellement à l'équation de continuité qui représente un bilan de volume plus directement lié à la cote; il suffira que l'équation dynamique lui apporte une information complémentaire.

D'autre part, contrairement à la plupart des problèmes de remous, la perturbation, ici, vient de l'amont et il est bien connu que l'équation dynamique en régime permanent ne détermine pas, dans ce cas-là, le remous avec une très grande précision. Il est alors heureux que, dans ces conditions, l'équation de continuité puisse apporter la contribution essentielle.

Ceci explique d'ailleurs la raison pour laquelle la majeure partie des méthodes de « flood routing » sont des méthodes volumétriques, essentiellement basées sur l'équation de continuité ou de conservation du volume.

TROISIÈME CAS :

Poussant plus loin les considérations développées dans le second cas, on peut même aller jusqu'à faire l'hypothèse, dans certaines rivières, qu'il suffit de réduire le bilan dynamique à l'équation de Chézy avec une perte de charge constante dans chaque section :

$$j = f(x)$$

Dans ce cas, nous devons constater qu'il existe, en chaque section de la rivière, une courbe de jaugeage $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}_1(z)$, qui reste *valable en temps de crue.*

* A condition de prendre le plan de référence des cotes au niveau du lit.

V. — Etude des caractéristiques.

a) Pente des caractéristiques.

Nous allons, ici, étudier d'abord le caractère des équations générales et leur évolution en fonction des diverses simplifications signalées plus haut. Nous tacherons ensuite d'en donner la signification physique.

Etudions les caractéristiques du système (I).

On sait que cela revient à chercher les chemins d'intégration dans le plan (x, t), le long desquels les dérivées premières sont indéterminées.

Le long de ces chemins, on a :

$$(\mathrm{II}) \quad \begin{cases} dz = \dfrac{\partial z}{\partial \tau} d\tau + \dfrac{\partial z}{\partial x} dx \\ dv = \dfrac{\partial v}{\partial \tau} d\tau + \dfrac{\partial v}{\partial x} dx \end{cases}$$

Avant de poursuivre le calcul des caractéristiques, livrons-nous à une petite transformation de l'équation de continuité afin d'éliminer le débit q :

$$q = sv$$

avec :

$$s = s\,(z; x) = \int_{z_0(x)}^{z} b\,(u; x)\,du$$

où :

$$b\,(z_0; x) = 0, \; z_0 \text{ étant la cote du fond.}$$

Pour en tirer $\partial q / \partial x$, nous aurons besoin de calculer la dérivée totale de s par rapport à x, pour τ constant.

$$\frac{ds}{dz}_{\tau = \mathrm{Cte}} = b\,(z; x)\frac{\partial z}{\partial x} + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial b}{\partial x} du$$

Nous poserons :

$$\int_{z_0}^{z} \frac{\partial b}{\partial x} du = s'$$

Dans ces conditions :

$$\frac{\partial q}{\partial x} = s\frac{\partial v}{\partial x} + bv\frac{\partial z}{\partial x} + s'v$$

Mettons alors le système composé de (I) et (II) sous forme matricielle pour en étudier l'indétermination par rapport à :

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial \tau}, \frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\mathcal{F}^2}{\mathrm{E}} & \mathcal{F}^2 v & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{s}{b} & \dfrac{1}{\mathrm{E}} & v \\ d\tau & dx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d\tau & dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial \tau} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \tau} \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j \\ -\dfrac{s'}{b}v \\ dv \\ dz \end{bmatrix}$$

Ecrivons d'abord la nullité du déterminant principal :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\mathcal{F}^2}{\mathrm{E}} & \mathcal{F}^2 v & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{s}{b} & \dfrac{1}{\mathrm{E}} & v \\ d\tau & dx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d\tau & dx \end{vmatrix} = 0$$

En développant l'on trouve :

— dans le cas général :

$$dx = \mathrm{E}\left[v \pm \frac{1}{\mathcal{F}}\sqrt{\frac{s}{b}}\right] d\tau$$

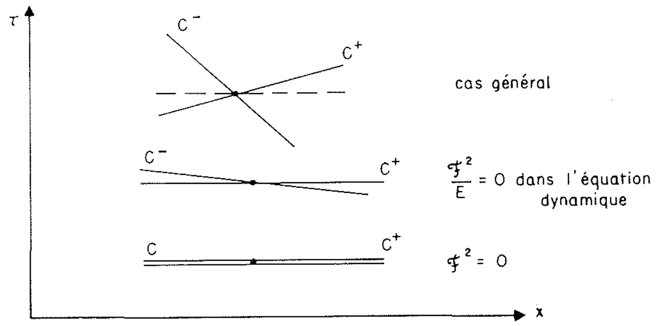
— dans le cas où seul $\mathcal{F}^2/\mathrm{E}$ peut être considéré comme nul dans l'équation dynamique :

$$d\tau \left[dx - \mathrm{E}\left(v - \frac{s}{b\mathcal{F}^2 v}\right) d\tau\right] = 0$$

— dans le cas où $\mathcal{F}^2$ est considéré comme nul :

$$\overline{d\tau}^{\,2} = 0$$

On ne terminera pas le calcul des caractéristiques en achevant d'écrire la compatibilité, car on peut suivre sur la pente des caractéristiques (C) dans le plan (x, τ), l'influence des diverses hypothèses faites.



1/

Dans le cas général, on a deux caractéristiques distinctes et non parallèles à Ox. Le système d'équations est hyperbolique.

b) Cas où l'on néglige $\mathcal{F}^2/\mathrm{E}$ devant 1.

Si l'on supprime brutalement le terme d'inertie locale $\partial v / \partial \tau$ en annulant $\mathcal{F}^2/\mathrm{E}$ dans l'équation dynamique, les caractéristiques se couchent sur l'axe Ox, C$^+$ (qui descend le courant) jusqu'à être parallèle à Ox, C$^-$ (qui remonte le courant) sans atteindre cette direction. En fait, si l'on fait croître E dans le cas général, on s'aperçoit que les caractéristiques s'inclinent de plus en plus sur Ox, C$^+$ davantage que C$^-$.

A la limite, lorsque E est infini, les deux caractéristiques sont parallèles à l'axe Ox, et l'on a déjà vu que le problème se ramenait à une succession de différents régimes permanents : le temps apparaît simplement comme un paramètre.

Le cas que nous avons considéré qui consiste à annuler $\mathcal{F}^2/\mathrm{E}$ dans l'équation dynamique seule, revient à faire tendre les caractéristiques C$^+$ vers des parallèles à l'axe Ox, sans que les caractéristiques C^- aient atteint la même direction. Il ne peut donc pas être obtenu à partir du cas général en faisant tendre E vers l'infini.

Le système reste hyperbolique.

c) Cas où l'on néglige F^2 devant 1.

Examinons le second cas où l'on suppose $\mathcal{F}^2$ suffisamment petit pour le négliger devant l'unité. Les deux caractéristiques sont parallèles à Ox. On pourrait, comme dans le cas précédent, suivre leur évolution à partir du cas général lorsque $\mathcal{F}^2$ tend vers zéro. Mais, à la différence du cas où E tend vers l'infini, les équations ne tendent pas vers celles en régime permanent, car l'équation de continuité reste intacte : le temps n'apparaît plus comme un paramètre, mais reste une variable.

Le système se déduit bien par continuité du cas général en faisant tendre $\mathcal{F}^2$ vers zéro, et devient parabolique.

Nous allons étudier plus en détail ce dernier cas et nous terminerons l'étude par le troisième cas où nous mènerons les calculs théoriques jusqu'au bout.

VI. — Onde de crue diffusante.

a) La diffusion.

Rappelons que, dans le cas étudié, on considère que, dans l'équation dynamique, il est légitime de prendre :

$$\mathcal{F}^2 \ll 1$$

Nous avons déjà essayé de donner les fondements de cette hypothèse.

Le fait que le système d'équations devienne alors parabolique revêt une importance particulière que nous allons tâcher de souligner.

La nature même de ces équations semble vouloir rattacher la crue à des phénomènes de diffusion qui sont également régis par des équations du type parabolique.

Il est en effet, facile de montrer qu'on aboutit à une équation de diffusion.

Le système initial s'écrit dans ce cas :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial X} + B\frac{\partial Z}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial X} &= -J \end{aligned}\right.$$

en revenant aux variables dimensionnelles.

Sans oublier que la perte de charge J est une fonction de Q, Z et X, dérivons la seconde équation à X = Cte et la première à t = Cte et éliminons les dérivées croisées de Z. Il vient alors :

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial X^2} - \left[\frac{\partial J}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial t}\right]B + \left[\frac{\partial B}{\partial X} + \frac{\partial B}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial X}\right]\frac{\partial Z}{\partial t} = 0$$

En tenant compte des valeurs des dérivées premières de Z données par le système initial, on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{B}\left[-\frac{\partial J/\partial Z}{\partial J/\partial Q} + \frac{1}{B}\frac{\partial B/\partial X - J\,\partial B/\partial Z}{\partial J/\partial Q}\right]\frac{\partial Q}{\partial X} = \frac{1}{B\,\partial J/\partial Q}\frac{\partial^2 Q}{\partial X^2}}$$

On reconnaît effectivement une équation de diffusion.

Tout se passe comme si *le débit* Q

— était transporté avec une vitesse :

$$C = \frac{1}{B}\left[-\frac{\partial J/\partial Z}{\partial J/\partial Q} + \frac{1}{B}\frac{\partial B/\partial X - J\,\partial B/\partial Z}{\partial J/\partial Q}\right]$$

— et diffusait avec un coefficient de diffusion égal à :

$$\frac{1}{B\,\partial J/\partial Q}$$

b) Vitesse de « propagation ».

La vitesse de translation C du débit, que nous appellerons vitesse de propagation, est la somme de deux termes : le second terme est un terme de forme qui disparaît complètement dès que les berges sont verticales et restent parallèles.

Le premier terme représente la vitesse de propagation donnée par Seddon.

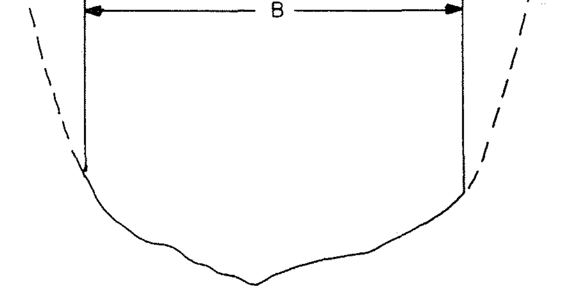
En effet, si l'on considère la perte de charge linéaire dans une *section donnée* (X = Cte), *en régime permanent* où *J = Cte*, cette dernière relation définit implicitement la fonction $Q = Q_1(z)$ dont on peut calculer la dérivée par l'intermédiaire de la fonction implicite J = Cte.

$$\frac{dQ_1}{dZ} = -\frac{\partial J/\partial Z}{\partial J/\partial Q}$$

Donc, en rivière à berges verticales et parallèles, où l'*emmagasinement de l'eau ne se fait que par des tranches de même largeur* B, la vitesse de propagation de la crue est alors donnée par *la formule de Seddon :*

$$\boxed{C = C_S = \frac{1}{B}\frac{dQ_1}{dZ}}$$

Dans le cas d'une section de forme quelconque, en



2/

tenant compte du fait que J est une fonction parabolique de Q et que, par suite,

$$\frac{\partial J}{\partial Q} = 2\, J/Q,$$

la célérité de propagation du débit s'écrit :

$$\boxed{C = C_s + \frac{\gamma}{B}\left(\frac{\partial B}{\partial X} - J\,\frac{\partial B}{\partial Z}\right)}$$

en posant, comme nous le verrons plus loin :

$$\gamma = Q/2\,BJ$$

Remarquons que cette célérité ne fait plus intervenir la pesanteur, mais uniquement le frottement et la forme des sections. On a d'ailleurs quelque scrupule à appeler C une célérité, car il ne s'agit pas à vrai dire d'une onde; en particulier, la possibilité d'une réflexion n'existe plus, ni celle d'une remontée vers l'amont.

c) Facteur d'atténuation.

C'est ainsi que nous nommons le « coefficient de diffusion » de la crue. En tenant compte, comme précédemment, de la forme parabolique en Q de la perte de charge linéaire, nous pouvons l'écrire :

$$\boxed{\gamma = Q/2\,BJ = \frac{Q/B}{2\,J}}$$

Pour avoir un ordre de grandeur de γ, on peut reprendre :

$Q = 5\,000\ m^3/s$
$B = 500\ m$
$J = 5.10^{-4}$, alors :
$\gamma = 10\ m^2/s$

C'est ce terme γ qui est responsable de l'atténuation de la crue. C'est en effet parce que le débit « diffuse » un peu par rapport à sa vitesse de translation que l'onde se déforme et s'aplatit.

Supposons en effet, que l'on suive le maximum Q_M du débit dans sa translation; on a alors :

$$\frac{\partial Q_M}{\partial X} = 0$$

et :

$$\frac{dQ_M}{dt} = \gamma\,\frac{\partial^2 Q}{\partial X^2}_{\text{en M}}$$

d) Applications.

L'équation de l'évolution du débit, qui s'écrit, dans le cadre de la diffusion :

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial t} + C\,\frac{\partial Q}{\partial X} = \gamma\,\frac{\partial^2 Q}{\partial X^2}}$$

est à la base de très nombreuses méthodes concernant la propagation et l'annonce des crues.

Citons, en France, la méthode de Bachet [2], qui bien que présentée en 1934 de façon un peu différente, est une application pratique de cette équation dont l'auteur avait recherché la solution à partir de relevés expérimentaux ingénieusement dépouillés.

Le calcul de l'atténuation de la crête de la crue, tel que nous le donnons à la fin du paragraphe précédent, est mentionné par Forchheimer [3] et présentée par Gilcrest [4].

C'est en 1951 que M. Shoitiro Hayami [5] a fait un calcul complet des ondes de crues par cette méthode de la diffusion, sans établir son équation comme nous venons de le faire. Se plaçant dans une rivière de section rectangulaire, de pente constante, et utilisant la même approximation de l'équation dynamique, l'auteur avait pris comme loi de perte de charge linéaire celle de Chézy. Au lieu de former l'équation en Q, on peut également établir celle en y, profondeur d'eau. On trouve alors :

$$\boxed{\frac{\partial y}{\partial t} + C_s\,\frac{\partial y}{\partial X} = \gamma\,\frac{\partial^2 y}{\partial X^2}}$$

Avec la formule de Chézy, il est classique que l'on trouve la célérité de Seddon égale à :

$$C_s = \frac{3}{2}\,V$$

En conservant à V la valeur V_0 en régime uniforme avant le passage de la crue, et en prenant γ constant, on est ramené à un classique problème linéaire de diffusion. Si l'on se donne la loi de variation du tirant d'eau dans la section amont sous la forme $y = F(t)$, la solution qui est asymptote, à l'infini aval, au tirant d'eau y_0 en régime permanent précédant le passage de la crue, s'écrit :

$$\boxed{y = y_0 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^{(C_s/2\gamma)X} \int_{X/2\sqrt{\gamma t}}^{\infty} F\left(t - \frac{X^2}{4\,\gamma\zeta^2}\right) e^{-\zeta^2 - \frac{(C_s/2\gamma)^2 X^2}{4\zeta^2}}\, d\zeta}$$

Dans le cadre de la linéarisation des équations où l'auteur s'est placé, cette solution peut s'obtenir en utilisant les transformées de Fourier.

VII. — L'onde de crue simple.

a) Elle s'obtient à partir du dernier cas, qui n'a pas encore été étudié, celui où l'on réduit le bilan dynamique à une perte de charge linéaire constante qu'on peut identifier à une pente du fond i.

Les équations sont alors intégrables :

$$\begin{cases} J = i\,(X) \\ \dfrac{\partial Q}{\partial X} + B\,\dfrac{\partial Z}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

b) Comme nous l'avons déjà dit, l'équation $J = i$ est une définition implicite de Q en fonction de Z paramétrée en x. Se donner $J = i$ est donc équivalent à se donner :

$$Q = Q_1\,(Z, X)$$

ou la fonction inverse :

$$Z = K\,(Q, X)$$

On en tire immédiatement :

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial K}{\partial Q}\,\frac{\partial Q}{\partial t}$$

qui, par substitution dans l'équation de continuité, donne :

$$\frac{\partial Q}{\partial X} + B \frac{\partial K}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial t} = 0$$

REMARQUE :

En revenant à la définition de K (Q; X) par la fonction implicite $J = i$, on déduit que :

$$\frac{\partial K}{\partial Q} = \frac{1}{\partial Q_1/\partial Z} = - \frac{\partial J/\partial Q}{\partial J/\partial Z} = \frac{1}{C_s}$$

et l'équation précédente s'écrit encore :

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial t} + C_s \frac{\partial Q}{\partial X} = 0}$$

C_s étant la célérité de Seddon définie plus haut dans l'onde diffusante, dont l'équation ne diffère de celle-ci que par le terme d'atténuation.

c) Cette équation est linéaire et du premier ordre et peut être traitée par les caractéristiques :

$$\begin{cases} dt = \dfrac{dX}{C_s (Q, X)} \\ dQ = 0 \end{cases}$$

qui s'intègrent dans les plans Q = Cte sous la forme :

$$t = t_0 (Q) + \int_0^x \frac{dX}{C_s (X; Q)}$$

Pour déterminer t_0, il suffit d'avoir la loi de débit dans la section origine à l'amont :

$$Q = G (t)$$

Cette fonction peut s'inverser sous la forme :

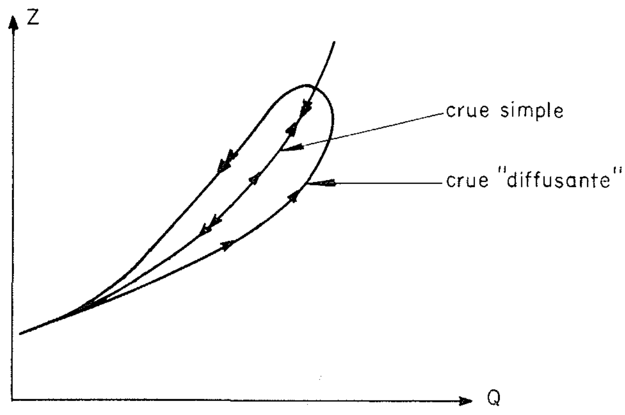
$$t = t_0 (Q)$$

Cela revient à connaître les instants t_0 où les différents débits Q passent à la section amont.

L'intégrale écrite n'exprime rien d'autre qu'une relation cinématique. Chaque débit Q est repéré à son passage dans la section origine et comme l'on connaît sa vitesse C_s (X, Q), on en déduit aisément l'instant de son passage à une distance X à l'aval.

d) Ce résultat est tellement simple que l'on se demande s'il peut effectivement s'appliquer.

Il suffit pour cela que les hypothèses soient vérifiées. On le contrôlera en s'assurant qu'en période de crue, les courbes de jaugeage Q_1 (Z) restent encore valables. Les points figuratifs (Q, Z) ne doivent pas dessiner de boucle autour de la courbe de jaugeage, comme c'est le cas dans « la crue diffusante ».



3/

VIII. — Conclusion.

Cette analyse qui voudrait présenter les divers aspects des ondes de crue en partant de Saint-Venant pour aboutir à Chézy, a surtout mis l'accent sur la parenté que présente ce phénomène avec la diffusion. Chaque époque a un peu sa mode, la nôtre est à la diffusion. Nous avons rattaché ce problème de mécanique à ce vaste ensemble qu'est la diffusion pour mieux le comprendre à la lumière de cette analogie. Il resterait encore à tenter de lui appliquer des méthodes de traitement analogues. Les études sont actuellement en cours au Centre de Recherches et d'Essais de Chatou.

Nous ne voudrions d'ailleurs pas terminer cette étude sans remercier les nombreux Ingénieurs du Département « Laboratoire National d'Hydraulique » avec qui ce problème a souvent été discuté.

Bibliographie.

[1] STOKER. — Water waves.
[2] BACHET. — Note sur la propagation et l'annonce des crues. *Annales des Ponts et Chaussées,* 1934.
[3] FORCHHEIMER. — Hydraulik. *Teubner,* Leipzig et Berlin 1930.
[4] ROUSE. — Engineering Hydraulic. *J. Wiley.*
[5] SHOITIRO HAYAMI. — On the propagation of flood waves- *Disaster prevention research Institute,* Tokyo, bulletin n° 1, décembre 1951.

Abstract

Some aspects of flood routing by A. Daubert *

The autor refers to the classic equations of variable flow in rivers and then transforms them by the introduction of reference values, bringing in dimensionless variables. This new form of the T/γ system enables the various terms involved to be compared and their relevance to be discussed.

The method of characteristics is next referred to and applied to the dimensionless variables, followed by an account of the evolution of the characteristic curves when the less important parameters are ignored.

One of the most interesting cases is that of the diffusion-type flood equation obtained by the elimination of the space and time partial differentials of discharge from the dynamic equation. The system then becomes parabolic and can be reduced to an equation of the heat transfer type.

From this are deduced the flood diffusion coefficient and propagation velocity, the latter being composed of two terms, one of which is geometrical and disappears when the banks are vertical, which is a case where Seddon's formula applies. The author mentions the methods of Bachet and Shoitiro Hayami, which are both based on the diffusion equation.

In conclusion, the case of a simple flood wave is studied, in which the energy slope is constant : in this case the system becomes a first order linear partial differential equation which integrates.

This case in which the maximum number of terms are left out, though very simplified, nevertheless occurs under actual conditions. It can be recognised by the fact that a single-value Q (Z) relation obtains, which holds good even under flood conditions.

* Electricité de France, Centre de Recherches et d'Essais de Chatou.