

# LA SURFACE LIBRE ET LES CONDITIONS DE SIMILITUDE DU VORTEX

par G. HOLTORFF \*

## Introduction.

Par comparaison des énergies mises en jeu, on peut démontrer que, lorsque la hauteur de liquide au-dessus de l'orifice de sortie est faible, l'écoulement n'est alors seulement possible que s'il est superposé à un écoulement rotatif de la forme bien connue :

$$r \cdot v_{\varphi} = \text{constante} = r' \cdot v_{\varphi}'$$

L'équation, valable pour des rapports bidimensionnels et des fluides idéaux, exprime que, lors de sa progression vers l'orifice, le moment cinétique  $r \cdot v_{\varphi}$  reste constant et, de manière plus précise, égal au produit de la vitesse de rotation  $v_{\varphi}$ , par une distance  $r'$  à l'orifice, produit que l'on appellera « moment cinétique initial ».

Dans le cas des conditions d'écoulement tridimensionnel des fluides réels, la relation donnée dans l'équation ci-dessus n'est plus valable, même pas approximativement. Le travail de frottement absorbe la presque totalité du moment cinétique des fluides visqueux. L'enfoncement de la surface du liquide n'atteint, de ce fait, qu'une valeur finie.

Les équations de Navier-Stokes constituent les équations initiales pour déterminer la variation du moment cinétique dans les fluides visqueux tridimensionnels :

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{v_{\varphi}^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(p + \gamma h)}{\partial r} + \nu \left( \Delta^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial \varphi} \right) \quad (1)$$

$$\frac{dv_{\varphi}}{dt} + \frac{v_r \cdot v_{\varphi}}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial(p + \gamma h)}{\partial \varphi} + \nu \left( \Delta^2 v_{\varphi} - \frac{v_{\varphi}}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right) \quad (2)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(p + \gamma h)}{\partial z} + \nu (\Delta^2 v_z) \quad (3)$$

avec les opérateurs :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_{\varphi}}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

La condition de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

Dans ces équations les abréviations signifient :

- $\rho$  = densité du fluide;
- $\gamma$  = poids spécifique du fluide;
- $p$  = pression;
- $\nu$  = viscosité cinématique;

Les coordonnées polaires  $r$ ,  $\varphi$  et la cote  $z$  constituent le système de coordonnées.

Les vitesses admettent les trois composantes :

- $v_r$  = composante radiale;
- $v_{\varphi}$  = composante de rotation;
- $v_z$  = composante verticale.

L'intégration de la deuxième équation de Navier-Stokes, qui renseigne sur la variation du moment cinématique en chemin vers l'orifice de sortie, constitue le très intéressant sujet d'un ouvrage publié par H. A. Einstein et Huon Li [1].

A l'intérieur ( $r \leq r_e$ ) et à l'extérieur ( $r \geq r_e$ ) du cylindre, au-dessus de l'orifice de rayon  $r_e$  et sous certaines conditions simplificatrices, on obtient pour le rapport du moment cinétique variable au moment cinétique initial  $(rv_{\varphi}/r'v_{\varphi}') = RV_{\varphi}$ , les valeurs suivantes :

pour  $r \leq r_e$  :

$$RV_{\varphi} = R_e V_{\varphi e} \frac{e^{-(\Lambda/2)(R/R_e)^2} - 1}{e^{-(\Lambda/2)} - 1}$$

pour  $r \geq r_e$  :

$$RV_{\varphi} = \frac{(R_e V_{\varphi e} - R_e^{(2-\Lambda)})(1 - R^{(2-\Lambda)})}{1 - R_e^{(2-\Lambda)}} + R^{(2-\Lambda)} \quad (2.1)$$

\* Oberingenieur am Theodor Rehbock-Flusslaboratorium der Technischen Hochschule Karlsruhe.

avec :

$$R_e V_{\varphi e} = \frac{(2 - A) (e^{-(A/2)} - 1)}{A (1 - e^{-(A/2)}) R_e^{(A-2)} + 2 (e^{-(A/2)} - 1)} \quad (5)$$

et :

$$A = \frac{Q_e}{2 \pi h v} \quad (6)$$

$r_e \cdot v_{\varphi e}$  est le moment cinétique à une distance  $r_e$  de l'axe de l'orifice,  $Q_e$  le débit à l'orifice et  $h$  la hauteur d'eau au-dessus du fond.

Les suppositions fondamentales faites, pour aboutir aux équations (2.1) et (5), par Einstein et Huon Li sont en substance les suivantes :

- 1° En comparaison des vitesses horizontales, les vitesses verticales sont secondaires;
- 2° La répartition des vitesses dans la section de l'orifice est constante :

$$v_e = \frac{Q_e}{\pi r_e^2} = \text{constante.}$$

Le débit à l'intérieur d'un cylindre déterminé ( $r < r_e$ ) se réduit de la quantité d'eau s'écoulant extérieurement à ce cylindre, et prend la valeur :

$$Q_r = \frac{Q_e \cdot r^2 \pi}{r_e^2 \pi}$$

Correspondant à cela et en raison de la continuité, la vitesse radiale moyenne diminue aussi au-dessus de l'orifice jusqu'à la valeur :

$$v_r = \frac{Q_e \cdot r^2}{2 \pi r \cdot h \cdot r_e^2} = \frac{Q_e \cdot r}{2 \pi \cdot h \cdot r_e^2} \quad (7)$$

Le but de ce travail-ci est de calculer, par intégration de la première équation de Navier-Stokes, la forme de la surface libre, et, de là, formuler les conditions de similitude du vortex.

### La surface libre du vortex.

Sous considération des suppositions ci-dessus, la première équation de Navier-Stokes prend la forme :

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_{\varphi}^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (p + \gamma h)}{\partial r} \left( \sqrt{\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_r}{dr} - \frac{v_r}{r^2}} \right) \quad (1.1)$$

On obtient alors, tout d'abord par intégration :

$$\frac{v_r^2}{2} - \int \frac{v_{\varphi}^2}{r} dr = -\frac{p + \gamma h}{\rho} + C \quad (1.2)$$

On a en effet :

$$\int v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} dr = \frac{v_r^2}{2}$$

Et les équations pour la vitesse radiale et ses dérivées partielles s'écrivent :

	pour $r \geq r_e$	pour $r \leq r_e$
$v_r =$	$\frac{Q_e}{2 \pi \cdot h \cdot r}$	$\frac{Q_e \cdot r}{2 \pi \cdot h \cdot r_e^2}$
$\frac{\partial v_r}{\partial r} =$	$-\frac{Q_e}{2 \pi \cdot h \cdot r^2}$	$\frac{Q_e}{2 \pi \cdot h \cdot r_e^2}$
$\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} =$	$\frac{Q_e}{\pi \cdot h \cdot r^3}$	0

L'intégrale :

$$\int \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} \right) dr$$

devient alors, pour  $r \geq r_e$  et  $r \leq r_e$ , égale à zéro.

Dans le domaine  $r \geq r_e$ , on obtient le moment cinétique à partir de la deuxième expression de l'équation (2.1).

Avec :

$$B = \frac{R_e V_{\varphi e} - R_e^{(2-A)}}{1 - R_e^{(2-A)}} \quad (8)$$

on transforme comme suit l'équation :

$$r \cdot v_{\varphi} = r' \cdot v'_{\varphi} B - r' v'_{\varphi} B R^{(2-A)} + r' v'_{\varphi} R^{(2-A)}$$

ou bien encore :

$$r \cdot v_{\varphi} = r' v'_{\varphi} [B - (B - 1) R^{(2-A)}] \quad (2.2)$$

Pour l'intégrale  $\int (v_{\varphi}^2/r) dr$  dans l'équation (1.2), on obtient donc l'expression suivante :

$$\int \frac{v_{\varphi}^2}{r} dr = \int \frac{r'^2 v_{\varphi}'^2 [B - (B - 1) R^{(2-A)}]^2}{r^3} dr \quad (9)$$

ou bien, sous une autre forme :

$$\int \frac{v_{\varphi}^2}{r} dr = v_{\varphi}'^2 [B^2 R^{-3} - 2 B (B - 1) R^{-(1+A)} + (B - 1)^2 R^{(1-2A)}] dR \quad (9.1)$$

L'intégration donne :

$$\int \frac{v_{\varphi}^2}{r} dr = v_{\varphi}'^2 \left[ -\frac{B^2 R^{-2}}{2} + \frac{2 B (B - 1) R^{-A}}{A} - \frac{(B - 1)^2 R^{(1-A)}}{2(1-A)} \right] \quad (9.2)$$

Pour l'eau, les valeurs  $A < 10$  sont d'intérêt secondaire. Comme on peut le prouver par l'équation (2.1) (fig. 1) et comme on l'a constaté à la lueur des résultats expérimentaux [2], les pertes par viscosité à l'extérieur du cylindre de rayon  $r = r_e$  sont cependant, dans le cas  $A > 10$ , négligeables. Le rapport  $R_e V_{\varphi e}$ , tend, pour  $A > 10$ , vers la valeur limite 1. L'opérateur B (équation 8), tend lui aussi vers la valeur 1, avec  $R_e V_{\varphi e} = 1$ .

Avec  $B = 1$ , l'équation (9.2) devient :

$$\int \frac{v_{\varphi}^2}{r} dr = -\frac{v_{\varphi}'^2 R^{-2}}{2} = \frac{v_{\varphi}'^2}{2} \frac{r'^2}{r^2} \quad (9.3)$$

Dans le domaine  $r \leq r_e$ , on obtient le moment cinétique par la première expression de l'équation (2.1).

Avec les opérateurs :

$$D = \frac{r_e^2 v_{\varphi e}^2}{(e^{-(A/2)} - 1)^2} ; \quad C = -\frac{A}{2} \text{ et } R' = \frac{R}{R_e} = \frac{r}{r_e} \quad (10)$$

on obtient pour l'intégrale  $\int (v_{\varphi}^2/r) dr$  la relation :

$$\int \frac{v_{\varphi}^2}{r} dr = D \int \frac{(e^{CR'^2} - 1)^2}{R'^3} dR' = \frac{D}{r_e^2} \int \frac{e^{2CR'^2} - 2e^{CR'^2} + 1}{R'^3} dR' \quad (11)$$

On ne peut pas, sous cette forme, résoudre l'intégrale. On la développe alors en série, puis l'on intègre membre par membre :

$$\int \frac{v_{\varphi}^2}{r} dr = \frac{D}{r_e^2} \int \left[ \frac{1 + \frac{(2CR'^2)^1}{1!} + \frac{(2CR'^2)^2}{2!} + \dots + \frac{(2CR'^2)^n}{n!} + \dots}{R'^3} - 2 \left( 1 + \frac{(CR'^2)^1}{1!} + \frac{(CR'^2)^2}{2!} + \dots + \frac{(CR'^2)^n}{n!} + \dots \right) + 1 \right] dR' \quad (11.1)$$

On peut rassembler les termes du développement de l'équation (11.1) :

$$\int \frac{v_{\varphi}^2}{r} dr = \frac{D}{r_e^2} \int \left[ \frac{2C^2 R'^4}{2!} + \frac{6C^2 R'^6}{3!} + \dots + \frac{(2^n - 2) C^n R'^{2n}}{n!} + \dots \right] dR' \quad (11.2)$$

En intégrant membre par membre, on obtient :

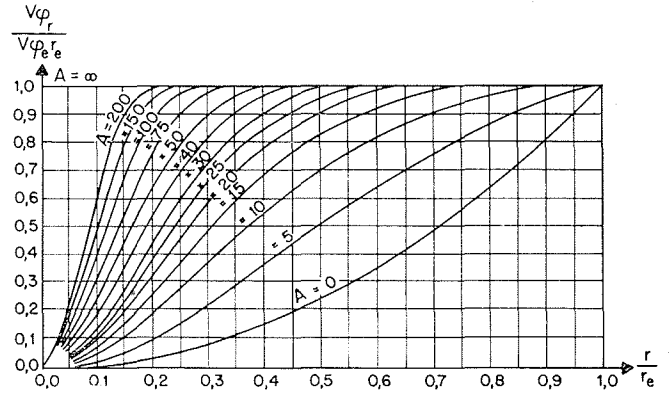
$$\int \frac{v_{\varphi}^2}{r} dr = \frac{v_{\varphi e}^2}{(e^{-(A/2)} - 1)^2} \left( \frac{2(A/2)^2 (r/r_e)^2}{2 \cdot 2!} - \frac{6(A/2)^3 (r/r_e)^4}{4 \cdot 3!} + \dots + \frac{(2^n - 2) [-(A/2)]^n (r/r_e)^{(2n-2)}}{(2n-2) n!} + \dots \right) \quad (11.3)$$

L'exploitation de la relation (11.3) est rendue difficile par la convergence particulièrement faible de la série alternante. Comme, en général, on devrait introduire dans chacun des membres des grandes valeurs de A (> 10), l'exploitation numérique ne serait alors possible qu'à la calculatrice électronique.

Dans ce qui suit, on développe une méthode graphique pour l'exploitation de l'équation. A est la seule grandeur hydraulique sans dimensions contenue dans les membres de la série. Le rapport sans dimensions  $r/r_e$  tient compte de la géométrie de l'orifice. On peut donc, en intégrant l'équation (11.3) graphiquement par quelques valeurs de A, déterminer la somme  $\Sigma$  des membres dans l'équation à partir de l'équation (11.3) résolue par rapport à  $\Sigma$ .

$$\Sigma = \int \frac{v_{\varphi}^2}{r} \frac{dr}{r_e^2 v_{\varphi e}^2} \frac{(e^{-(A/2)} - 1)^2 r_e^2}{r_e^2 v_{\varphi e}^2} \quad (12)$$

Sur le nomogramme de la figure 1, on a porté le rapport du moment cinétique instantané au moment cinétique sur le cylindre de rayon  $r_e$ , en fonction du rapport sans dimensions  $r/r_e$ , pour différentes valeurs de A.



1/ Diminution du moment cinétique.  
Reduction of kinetic moment.

L'intégration graphique a été réalisée dans les cas suivants :

	A	$r_e$	$r_e v_{\varphi e}$
1	5	1	40
2	10	1	20
3	15	1	20
4	20	1	16
5	30	1	12
6	50	1	10
7	100	1	5

Le résultat de l'intégration graphique est exploité sur le nomogramme de la figure 2.

Le résultat de l'intégration de la première équation différentielle de Navier-Stokes s'écrit alors sous la forme condensée :

pour  $r \geq r_e$  :

$$\frac{v_r^2}{2} + \frac{v_{\varphi}^2 r^2}{2 r^2} = -\frac{p + \gamma h}{\rho} + C_1$$

pour  $r \leq r_e$  :

$$\frac{v_r^2}{2} - \frac{v_{\varphi e}^2 \cdot \Sigma}{(e^{-(A/2)} - 1)^2} = -\frac{p + \gamma h}{\rho} + C_2 \quad (1.3)$$

Les deux équations constituent les équations énergétiques du vortex. Pour  $p = 0$ ,  $h$  donne la surface libre du vortex. La constante  $C_1$  s'obtient à partir de la condition limite :

$$r = r' \rightarrow \frac{C_1}{g} = \frac{v_r'}{2g} + \frac{v_{\varphi}'}{2g} + h = H$$

$C_1/g$  est donc la hauteur d'énergie au point initial de la rotation. Dans le cas  $r \leq r_e$  on obtient pour  $r = 0$  :

$$C_2 = g \cdot h_0.$$

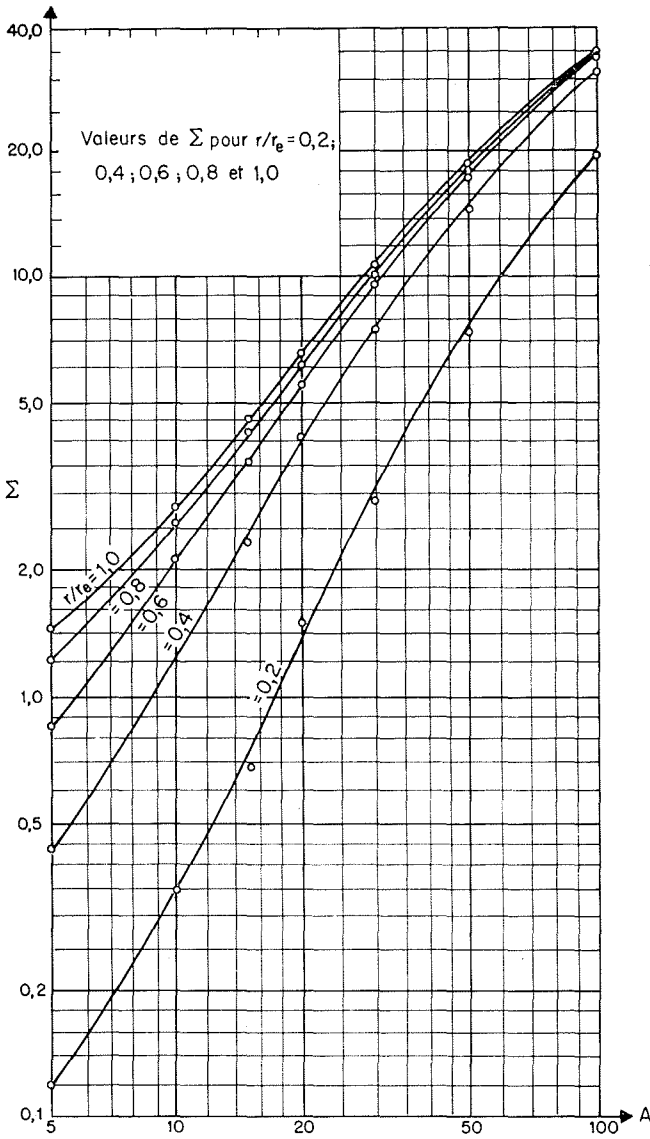
$C_2/g$  est alors l'ordonnée de la pointe du tourbillon. Avec cela, les équations de la surface libre du vortex s'écrivent en définitive :

pour  $r \geq r_e$  :

$$h = H - \frac{v_r^2}{2g} - \frac{[v_{\varphi} \cdot (r'/r)]^2}{2g}$$

pour  $r \leq r_e$  :

$$h = h_0 - \frac{v_r^2}{2g} + \frac{v_{\varphi e}^2}{g(1 - e^{-(A/2)})^2} \cdot \Sigma \quad (1.4)$$



2/ Valeurs de Σ en fonction de A.  
Values of Σ in terms of A.

La répartition des vitesses de l'écoulement radial est précisée dans les équations suivantes :

pour  $r \geq r_e$  :

$$v_r = \frac{Q_e}{2 \pi \cdot h \cdot r}$$

pour  $r \leq r_e$  :

$$v_r = \frac{Q_e \cdot r}{2 \pi \cdot h \cdot r_e^2}$$

(voir équation 7).

Pour vérification des équations de la surface libre, en particulier quand  $r \leq r_e$ , on peut d'abord constater qu'aux limites  $A = 0$  et  $A = \infty$ , les équations correspondent aux lois ici valables. Si l'on développe en série, tant la fonction :

$$\sum \left( A_i \frac{r}{r_e} \right)$$

que l'expression  $(1 - e^{-(A/2)})^2$ , on trouve :

$$\frac{v_r^2}{2} - v_{\varphi e}^2 \frac{2(A/2)^2 (r/r_e)^2}{2 \cdot 2!} - \frac{6(A/2)^3 (r/r_e)^4}{4 \cdot 3!} + \dots + \frac{(2^n - 2) [-(A/2)]^n (r/r_e)^{(2n-2)}}{(2n-2) n!} + \dots + \frac{1}{4} A^2 - \frac{1}{8} A^3 + \dots + \frac{A^n (2^n - 2)}{2^n \cdot n!} + \dots + \gamma h = \text{const.}$$

Si l'on divise haut et bas par  $A^2$ , le passage à la limite  $A \rightarrow 0$  ( $Q_e = 0, v_r = 0$ ) donne :

$$\lim_{A \rightarrow 0} -v_{\varphi e}^2 \frac{\frac{1}{8} \left( \frac{r}{r_e} \right)^2}{\frac{1}{4}} + \gamma h = \text{const.}$$

ou bien :

$$-\frac{1}{2} v_{\varphi e}^2 \omega^2 + \gamma h = \text{const.} \quad (13)$$

$\omega = v_{\varphi e}/r_e$  est la vitesse angulaire. L'équation 13 est bien connue (parabole du deuxième ordre) et représente la dépression de la surface sous l'effet d'un mouvement tourbillonnaire invariable.

Dans le cas d'un fluide idéal,  $A = \infty$  ( $v = 0$ ), l'équation 11 prend alors la forme :

$$\int \frac{v^2}{r} dr = \int \frac{r_e^2 v_{\varphi e}^2}{r^3} dr = -\frac{r_e^2 v_{\varphi e}^2}{2 r^2}$$

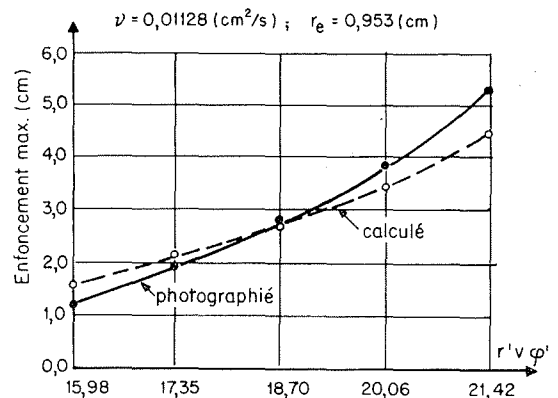
et l'équation de la surface libre s'écrit :

$$h = H - \frac{v_r^2}{2g} - \frac{v_{\varphi e}^2 r_e^2}{2 r^2} \quad (14)$$

L'équation 14 est l'équation bien connue de la surface libre dans le cas d'un mouvement de rotation d'un fluide sans frottements.

Pour les valeurs finies de A, on a pu vérifier les résultats théoriques par des expériences réalisées en 1940 dans les laboratoires hydrauliques de Karlsruhe [2]. On compare dans la figure 3 une partie des résultats photographiques expérimentaux avec les valeurs théoriques.

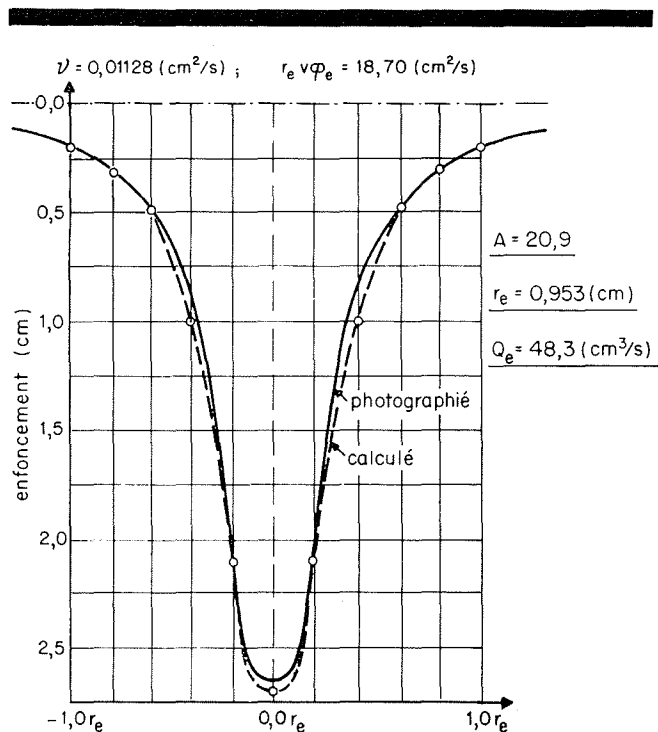
On constatait en général, que pour de grandes valeurs du moment cinétique initial  $r'v'_{\varphi}$ , les profondeurs du creux trouvées expérimentalement étaient légèrement supérieures aux valeurs théoriques. La raison de cet écart devrait être la non-



3/ Enfoncement maximal du vortex.  
Vortex becoming deeper.

coïncidence des conditions marginales théoriques et expérimentales.

Tandis que la théorie suppose une répartition constante de la vitesse à la hauteur  $h$ , on doit admettre que, lors des expériences, la vitesse, à cause des frottements au fond, a augmenté dans les couches supérieures qui sont déterminantes de la forme du tourbillon. La raison de l'écart dans le cas de petites valeurs  $r'v'_\varphi$  est vraisemblablement l'influence de la tension superficielle à la pointe du tourbillon.



4/ Profil du vortex creux.  
Calculated and photographed eddy contours.

La figure 4 montre les contours d'un tourbillon calculé, et d'un tourbillon photographié.

**Les conditions de similitude du vortex.**

La valeur de la vitesse dans l'écoulement radial n'exerce sur la surface libre d'une influence secondaire. La valeur maximale de la dépression est complètement indépendante de la vitesse de l'écoulement radial, lorsque la vitesse radiale devient nulle à la pointe du tourbillon. De ce fait, on ne tiendra pas compte de la vitesse radiale dans ce qui suit.

Les rapports des hauteurs (profondeurs) de dépression  $(H - h)/r_e$  pour  $r \geq r_e$  et  $(h - h_0)/r_e$  dépendent des paramètres suivants.

pour  $r \geq r_e$  :  $v'_\varphi, r', r, g$   
 pour  $r \leq r_e$  :  $v_{\varphi e}, v_{r_e}, r_e, r, g, \nu$  (15)

On peut alors développer les combinaisons sans dimensions suivantes :

pour  $r \geq r_e$  :

$$\frac{r'}{r} ; \frac{v'_\varphi{}^2}{g \cdot r'}$$

(15.1)

pour  $r \leq r_e$  :

$$\frac{r}{r_e} ; \frac{v_{\varphi e}{}^2}{g \cdot r_e} ; \frac{v_{r_e} \cdot r_e}{\nu}$$

Si l'on tient compte que :

$$\frac{v'_\varphi{}^2}{g \cdot r'}, \text{ et } \frac{v_{\varphi e}{}^2}{g \cdot r_e}$$

sont les nombres de Froude du mouvement de rotation, et que  $v_{r_e} \cdot r_e / \nu$  est le nombre de Reynolds du mouvement radial, le système (15.1) exprime alors, qu'à côté des grandeurs qui caractérisent la géométrie du système ( $r'/r$ ), la surface libre ne dépend dans le cas  $r \geq r_e$  que du nombre de Froude du mouvement de rotation. Dans le cas  $r \leq r_e$ , le nombre de Reynolds du mouvement exerce aussi, en plus des grandeurs géométriques ( $r/r_e$ ) et du nombre de Froude de la rotation, une influence sur la forme de la surface libre :

pour  $r \geq r_e$  :

$$\frac{H - h}{r_e} = f\left(\frac{r'}{r} ; \mathcal{F}_{\text{rot}}\right)$$

pour  $r \leq r_e$  :

$$\frac{h - h_0}{r_e} = f\left(\frac{r}{r_e} ; \mathcal{F}_{\text{rot}} ; \mathcal{R}_{\text{rad}}\right)$$

(15.2)

Pour la similitude des mouvements tourbillonnaires réels et en modèle réduit, on a les conditions suivantes :

pour  $r \geq r_e$  :

$$\left(\frac{r'}{r}\right)_M = \left(\frac{r'}{r}\right)_N ; \mathcal{F}_{\text{rot}M} = \mathcal{F}_{\text{rot}N}$$

pour  $r \leq r_e$  :

$$\left(\frac{r}{r_e}\right)_M = \left(\frac{r}{r_e}\right)_N ; \mathcal{F}_{\text{rot}M} = \mathcal{F}_{\text{rot}N} ; \mathcal{R}_{\text{rad}M} = \mathcal{R}_{\text{rad}N}$$

(15.3)

où les indices M, N caractérisent les valeurs du modèle et celles de la nature. Ces conditions de similitude peuvent être remplies pour des propriétés analogues du fluide dans le modèle et dans la réalité.

Le nombre de Reynolds du mouvement radial,  $\mathcal{R}_{\text{rad}}$  extérieurement et :

$$\mathcal{R}_{\text{rad}r_e} = v_{r_e} \cdot r_e / \nu$$

sur le cylindre de rayon  $r_e$ , est identique à la valeur A. Entre  $\mathcal{F}_{\text{rot}r'}$  et  $\mathcal{F}_{\text{rot}r_e}$ , et à cause de la relation  $r_e v_{\varphi e} = r' v'_\varphi$  (dans le cas  $A > 10$ , voir l'équation 9.3), on obtient le résultat suivant :

$$\mathcal{F}_{\text{rot}r'} = \mathcal{F}_{\text{rot}r_e} \frac{r_e^3}{r'^3}$$

En tenant compte de l'équation 1.4 et du fait

que  $v_r^2/2g$  est négligeable, les conditions de similitude s'énoncent :

pour  $r \geq r_e$  :

$$\frac{H-h}{r_e} = \frac{r_e^2}{2r^2} \mathcal{F}_{\text{rot } r_e}$$

pour  $r \leq r_e$  :

$$\frac{h-h_0}{r_e} = \mathcal{F}_{\text{rot } r_e} \frac{\Sigma [\mathcal{R}_{\text{rad } r_e}; (r/r_e)]}{(1 - e^{-(A/2)})^2} \quad (15.4)$$

En général, on peut, comme il a déjà été mentionné plusieurs fois, mettre les équations sous la forme suivante :

pour  $r \geq r_e$  :

$$\frac{H-h}{r_e} = \frac{r_e^2}{2r^2} \mathcal{F}_{\text{rot } r_e}$$

pour  $r \leq r_e$  :

$$\frac{h-h_0}{r_e} = \mathcal{F}_{\text{rot } r_e} \cdot \Sigma \left( \mathcal{R}_{\text{rad } r_e} \frac{r}{r_e} \right) \quad (15.5)$$

Lorsque les valeurs de A ou  $\mathcal{R}_{\text{rad } r_e}$  deviennent très grandes, c'est-à-dire  $1 - e^{-(A/2)} \sim 1$ , les équations (15.5) sont les conditions nécessaires pour la similitude des surfaces libres. La fonction :

$$\Sigma \left( \mathcal{R}_{\text{rad } r_e}; \frac{r}{r_e} \right)$$

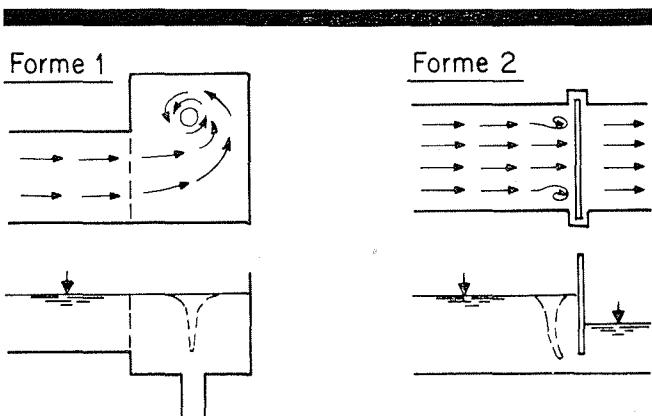
est représentée sur la figure 2.

La difficulté de l'expérimentation en laboratoire réside dans l'existence de deux conditions différentes pour le modèle réduit pour un problème expérimental unique.

Une similitude dans le domaine  $r \geq r_e$  est nécessaire pour comprendre l'influence décisive de la géométrie sur le moment cinétique. La similitude dans le domaine  $r \leq r_e$  est utile pour garantir dans le modèle une forme du tourbillon conforme à celle de la nature.

La manière dont on solutionne ces problèmes de la façon la plus opportune, dans la réalisation des modèles, varie de cas en cas. Si l'influence de la géométrie est décisive (fig. 5, forme 1), la technique expérimentale suivante est avantageuse :

1° toutes les grandeurs sont converties d'après la loi de similitude de Froude (également dans le



domaine  $r \leq r_e$ ), et les inconnues sont trouvées sur le modèle;

2° à l'aide de l'équation 15.5 on détermine le nombre  $\mathcal{F}_{\text{rot}}$  au point  $r = r_e$ ;

3° la valeur A pour les rapports réels est tirée du nomogramme de la figure 2;

4° le rapport réel  $(h-h_0)/r_e$  se calcule à partir de l'équation 15.5.

EXEMPLE :

	VALEURS RÉELLES	GRANDEURS RÉDUITES DU MODÈLE
Rayon $r_e$ ..... (cm)	5	1
Hauteur d'eau.....(cm)	100	20
Viscosité cinématique... (cm <sup>2</sup> /s)	0,012	0,012
Débit d'eau... (cm <sup>3</sup> /s)	755	13,3
Valeur A.....	100	8,95
$\Sigma$ (de la fig. 2).....	36	2,5

Le rapport d'enfoncement de la surface dans la maquette atteindrait 0,5. De là, on calcule le nombre  $\mathcal{F}_{\text{rot}}$  à partir de l'équation 15.5.

$$\mathcal{F}_{\text{rot}} = \frac{[(h-h_0)/r_e]_M}{r_{eM} \cdot \Sigma_M} = 0,5/2,5 = 0,2$$

Le rapport réel d'enfoncement de la surface  $(h-h_0)/r_e$  devient avec  $\mathcal{F}_{\text{rot}} = 0,2$  :

$$(h-h_0)/r_e = 0,2 \Sigma_N = 7,2$$

Dans le cas où l'influence de la géométrie sur le moment cinétique est secondaire, et aussi en particulier quand le domaine  $r \leq r_e$  n'est pas clairement limité (fig. 5, forme 2), la condition de similitude pour  $r \leq r_e$  peut également être prise en considération en dehors du domaine  $r \leq r_e$ . Le rapport d'enfoncement est alors identique dans le cas de la maquette comme dans celui de la réalité.

MÊME EXEMPLE :

	VALEURS RÉDUITES	VALEURS RÉELLES
$r_e$ ..... (cm)	5	1
$h$ ..... (cm)	100	20
$\nu$ ..... (cm <sup>2</sup> /s)	0,012	0,012
$Q_e$ ..... (cm <sup>3</sup> /s)	755	?
A.....	100	100
$\Sigma$ .....	36	36

Le débit d'eau dans la maquette se calcule à partir de l'équation en A (6) :

$$Q_e = 100 \cdot 2 \pi \cdot 0,012 \cdot 20 = 151 \text{ cm}^3/\text{s}$$

L'exemple montre que sous l'hypothèse d'un nombre  $\mathcal{F}_{\text{rot}}$  identique dans la nature et la maquette, on doit choisir pour les débits et vitesses dans la maquette, des valeurs beaucoup plus grandes que celles données par la loi de similitude de Froude. Ces faits ont été constatés dans des expé-

riences indépendantes les unes des autres, menées par Denny et Joung [3], Iversen [4] et Fraser [5]. Les quatre auteurs sont unanimes à rapporter que la loi de Froude donne des enfoncements de la pointe du tourbillon trop faibles. Denny et Joung conseillent de choisir dans les expériences sur la maquette, des vitesses beaucoup plus grandes correspondant à peu près aux valeurs réelles, et de ne pas dépasser le rapport de réduction de 1/16.

Si l'on applique cette règle empirique dans l'exemple calculé ci-dessus, on obtient les rapports suivants :

— vitesse à l'entrée :

$$v_e = \frac{Q_{eN}}{r_{eN}^2 \pi} = 9,62 \text{ cm/s};$$

— débit à l'orifice dans la maquette :

$$Q_{eM} = 9,62 \cdot r_{eM}^2 \cdot \pi = 30,2 \text{ cm}^3/\text{s};$$

— valeur A dans la maquette :

$$A_M = \frac{Q_{eM}}{2 \pi \cdot h \cdot \nu} = 20,1;$$

—  $\Sigma_M$  (de la fig. 2) = 7,0;

—  $\mathcal{F}_{\text{rotM}} = \mathcal{F}_{\text{rotN}} \cdot 5 = 1,0$ .

Le rapport d'enfoncement d'après la règle empirique devient :

$$(h - h_0)/r_e = \mathcal{F}_{\text{rotM}} \cdot \Sigma_M = 7,0$$

Ce rapport atteignait d'après l'équation 15.5, pour le même exemple, la valeur 7,2.

## References

- [1] EINSTEIN et HUON LI. — Le vortex permanent dans un fluide réel, *La Houille Blanche*, août 1955.
- [2] A. HOEFFKEN. — Beitrag zur Kenntnis der Wirbelbewegung in zähen Flüssigkeiten. Karlsruhe, 1940.
- [3] DENNY and YOUNG. — The prevention of vortices and swirls at intakes. *IAHR*, 7th general meeting, 1957.
- [4] IVERSEN. — Studies of submergence requirements of high-specific speed pumps. *Trans. ASME*, vol. 75, n° 4.
- [5] FRASER. — Hydraulic problems encountered in intake structures of vertical wet-pit pumps and methods leading to their solution. *Trans. ASME*, vol. 75, n° 4.

## Abstract

### The free surface and conditions of similarity for a drain vortex

by G. Holtorff \*

#### Introduction.

Stable flow above a drain in shallow water is only possible if a vortex motion of the well-known form  $v_\varphi \cdot r = \text{constant}$  is superposed on it. This relation indicates that the moment of momentum is constant on its way to the drain. In the case of real fluids the moment of momentum is almost entirely consumed by friction losses. For the decay of moment of momentum approaching the drain a solution was developed by H. A. Einstein and Huon Li from the second Navier-Stokes equation (eq. 2). The results obtained by integrating the second Navier-Stokes equation under some simplifying assumptions are given in equations 2,1; 5 and 6. Essentially the following assumptions were made :

1. Negligible average vertical velocity components;
2. Uniform velocity distribution at the drain opening.

In equation 2,1 the variable moment of momentum depends on the initial moment of momentum  $v'_\varphi r'$ , its value at the drain diameter  $v_\varphi r_e$ , and a dimensionless parameter  $A = Q_e / (2 \pi \cdot h \cdot \nu)$  ( $Q_e = \text{discharge}$ ,  $h = \text{water depth}$ ,  $\nu = \text{viscosity}$ ).

#### The free water surface

The first Navier-Stokes equation (eq. 1) can be integrated under the same assumptions as above. Two relations, for the area  $r \geq r_e$  and  $r \leq r_e$  were found by which the water surface profile can be determined. For  $r \geq r_e$  and  $A > 10$  the following expression can be used :

$$h = H - \frac{v_r^2}{2g} - \frac{g(1 - e^{-(A/2)})^2}{2g} \quad (1,4)$$

(where H = specific energy head).

Some of the simplifying assumptions made here do not hold good where  $A < 10$ . Since small A-values are of minor importance, no further improvements are necessary. For  $r \leq r_e$  the integration is not possible in a closed form. The non-integrable expression is expanded into a series and integrated member by member (eq. 11,1; 11,2 and 11,3). The summation  $\Sigma$  of the very slowly converging and alternating series is made graphically. Figure 2 shows characteristic  $r/r_e$ -curves of  $\Sigma$  against A. As the final solution, the equation for the free surface in the area  $r \leq r_e$  is given by :

$$h = h_0 - \frac{v_r^2}{2g} + \frac{v_\varphi^2}{g(1 - e^{-(A/2)})^2} \Sigma \quad (1,4)$$

with the ordinate  $h_0$  at the axis of the drain.

\* Chief Engineer at Theodor Rehbock-Flusslaboratorium der Technischen Hochschule Karlsruhe.

## G. HOLTORFF

One can state that in the limiting cases  $A = 0$  and  $A = \infty$  the theoretical results become identical with the valid laws. In order to check both equations 1,4 for finite  $A$ -values the results were tested by experimental curves and were found to agree fairly well.

### The conditions of similarity.

From the parameters determining the shape of the free surface the following system of dimensionless combinations can be deduced :

$$\begin{aligned} \text{for } r \geq r_e \quad \frac{H-h}{r_e} &= f\left(\frac{r'}{r_e}; \mathcal{F}_{\text{rot}r'}\right) \\ \text{for } r \leq r_e \quad \frac{h-h_0}{r_e} &= f\left(\frac{r'}{r}; \mathcal{F}_{\text{rot}r_e}; \mathcal{R}_{\text{rad}r_e}\right) \quad (15,2) \\ \text{with } \mathcal{F}_{\text{rot}r'} &= \frac{v'_{\varphi}{}^2}{gr'}, \quad \mathcal{F}_{\text{rot}r_e} = \frac{v_{\varphi e}{}^2}{g \cdot r_e} \quad \text{and} \quad \mathcal{R}_{\text{rad}r_e} = \frac{v_{r_e} - r_e}{v} = A \end{aligned}$$

With this relationship, and considering equation 1,4 and some substantiated suppositions, one obtains the equations :

$$\begin{aligned} \text{for } r \leq r_e \quad \frac{h-h_0}{r_e} &= \frac{r_e^2}{2r^2} \mathcal{F}_{\text{rot}r_e} \\ \text{for } r \geq r_e \quad \frac{h-h_0}{r_e} &= \mathcal{F}_{\text{rot}r_e} \sum \left( \mathcal{R}_{\text{rad}r_e}; \frac{r}{r_e} \right) \quad (15,5) \end{aligned}$$

as both the condition of similarity and equation of the free surface, respectively. The difficulty for experimental hydraulic research results from the existence of two different conditions (for  $r \geq r_e$  and  $r \leq r_e$ ) for the same experimental task. How to solve this difficulty is different in each case. However, it may be seen from the above equation for  $r \leq r_e$  that the radial velocities are essentially greater than is expected according Froude's law. This fact tends to agree with experience of other investigators.