LES ÉCOULEMENTS EN MILIEU POREUX ET L'HYPOTHÈSE DE DUPUIT

PAR
J. ZAOUI *

Dans les études d'écoulements en milieu poreux, on utilise fréquemment l'hypothèse de Dupuit qui consiste à admettre que la répartition des pressions est hydrostatique sur toute verticale. Cette hypothèse permet de ramener l'étude d'un écoulement tridimensionnel à l'étude d'un problème plan, et d'appliquer à celui-ci des méthodes de calcul extrêmement fécondes, en particulier la théorie du potentiel. Depuis la démonstration de Tcharnyi **, on sait *** qu'il existe des écoulements pour lesquels les débits sont identiques, que l'hypothèse de Dupuit soit vérifiée ou non.

Nous nous proposons d'examiner dans cette étude les deux points suivants :

1° L'hypothèse de Dupuit étant adoptée, quelles sont les conséquences qui peuvent en être tirées?

2° L'hypothèse de Dupuit étant écartée, existe-t-il des écoulements, autres que ceux déjà connus, dont les débits peuvent être calculés rigoureusement?

I. — Hypothèses générales et relation fondamentale.

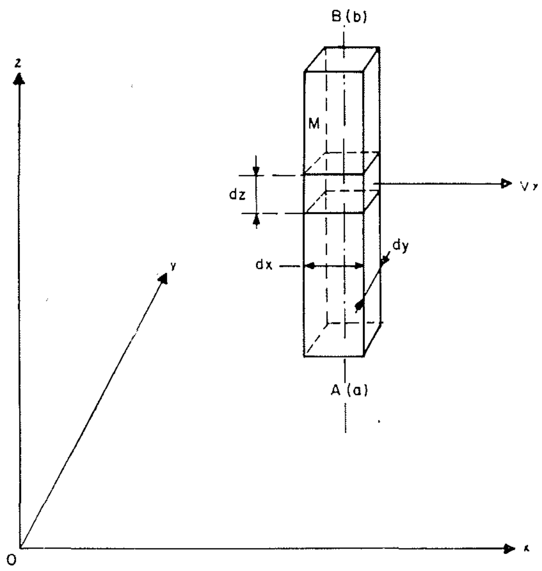
On choisit dans le milieu poreux un domaine continu D, saturé en fluide, dans lequel la loi de Darcy s'applique en tout point. On admet que toute verticale ne coupe les limites du domaine qu'en deux points A et B au plus.

L'espace étant ramené à un trièdre trirectangle $Oxyz$, on considère une verticale dont le segment AB appartient à D. On entoure AB par un prisme élémentaire vertical de base dx, dy et on découpe dans ce prisme un parallélépipède de hauteur dz entourant le point M de cote z.

On pose :

$$\Phi = \frac{p}{\omega} \qquad (1)$$

p = pression au point M;
ω = poids spécifique du fluide au point M.



1/

La loi de Darcy donne :

$$V_x = - K_x \cdot \frac{\partial(\Phi + z)}{\partial x} = - K_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad (2)$$

où :

V_x désigne la vitesse apparente du fluide dans la direction Ox;

K_x la perméabilité dans la même direction.

Le débit qui traverse la face dy, dz du parallélépipède élémentaire s'écrit :

$$dq_x = - K_x \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} \, dy \, dz \qquad (3)$$

* Ingénieur à la SO.GR.E.A.H., Grenoble.
** I. A. Tcharnyi. Démonstration rigoureuse de la formule de Dupuit pour un écoulement à surface libre avec surface de suintement. *C. R. de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S.*, n° 6, 1951.
*** J. Brillant. Le débit des écoulements en terrain perméable limité par un substratum horizontal étanche. *Le Génie Civil*, 1er mars 1956.

et le débit qui traverse la face correspondante du prisme, du point A de cote a au point B de cote b a pour valeur :

$$q_x = -\, dy \int_a^b K_x . \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, dz \qquad (4)$$

C'est cette relation fondamentale que nous allons utiliser.

II. — Adoption de l'hypothèse de Dupuit.

On admet que la charge :

$$H = \frac{p}{\omega} + z \qquad (5)$$

le long d'un segment vertical quelconque tel que AB *est constante.*

Ceci entraîne :

1° $\frac{\partial H}{\partial z} = 0$: les composantes verticales des vitesses sont nulles; (6)

2° $\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ ne dépendent pas de z. (7)

La relation (4) devient :

$$q_x = -\, dy \frac{\partial \Phi}{\partial x} \int_a^b K_x dz \qquad (8)$$

$$= -\, dy \frac{\partial \Phi}{\partial x} (b - a) . \overline{K}_x \qquad (9)$$

en appelant $\overline{K}_x$ la valeur moyenne de la perméabilité K_x le long du segment AB.

On désigne par *transmissivité* * du terrain dans la direction Ox, le produit :

$$T_x = (b - a)\, \overline{K}_x \qquad (10)$$

Conséquence :

Si l'on se contente d'évaluer les débits horizontaux tels que q_x, les perméabilités horizontales du terrain n'interviennent plus que dans le terme plus général de transmissivité. Quant aux perméabilités verticales, elles n'interviennent pas dans l'équation dynamique.

Application :

Supposons qu'en régime permanent et en absence de singularités, l'écoulement dans le domaine D soit conservatif, on obtiendra :

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} dx = -\, dx\, dy \frac{\partial}{\partial x}\left(T_x . \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) \qquad (11)$$

$$\frac{\partial q_y}{\partial y} dy = -\, dx\, dy \frac{\partial}{\partial y}\left(T_y . \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) \qquad (12)$$

d'où l'équation représentative de l'écoulement :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T_x \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(T_y \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = 0 \qquad (13)$$

* La transmissivité est habituellement définie en milieu homogène, mais l'extension qui en est faite est toute naturelle.

Cas particuliers de l'équation (13) :

1. Nappes d'épaisseur constante.

— *Terrains stratifiés :*

Si la formation aquifère est composée de la superposition de couches homogènes d'épaisseur constante, mais dont la perméabilité varie d'une couche à l'autre, on aboutit à l'équation classique de Laplace :

$$\boxed{\Delta \Phi = 0} \qquad (14)$$

— *Terrains homogènes à grande échelle :*

Si la formation aquifère est localement hétérogène, mais que l'on ait statistiquement :

$$\overline{K}_x = \overline{K}_y = \text{constante,}$$

on retrouve l'équation de Laplace.

On peut noter que, dans ces deux cas, la forme de la nappe est indifférente.

2. Nappes à surface libre limitées par un substratum imperméable horizontal.

Si la formation aquifère est homogène à grande échelle, on trouve une fonction potentielle :

$$\boxed{\Delta\, [(b - a)^2] = 0} \qquad (15)$$

On peut conclure, de cet examen rapide des conséquences de l'hypothèse de Dupuit, que la mise en évidence d'une fonction harmonique n'est pas l'apanage des milieux homogènes et isotropes, mais qu'il peut exister de telles fonctions si les terrains sont stratifiés ou homogènes à grande échelle.

III. — Cas général.

On introduit la fonction auxiliaire :

$$U_x = \int_a^b K_x . \Phi dz \qquad (16)$$

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} = \int_a^b K_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} dz + \int_a^b \Phi . \frac{\partial K_x}{\partial x} dz + [K_x \Phi]_B . \frac{\partial b}{\partial x} - [K_x \Phi]_A . \frac{\partial a}{\partial x} \qquad (17)$$

d'où :

$$q_x = -\, dy \left\{ \frac{\partial U_x}{\partial x} - \int_a^b \Phi . \frac{\partial K_x}{\partial x} dz - [K_x \Phi]_B . \frac{\partial b}{\partial x} + [K_x \Phi]_A . \frac{\partial a}{\partial x} \right\} \qquad (18)$$

On va se limiter aux situations où la relation (18) se simplifie tant soit peu.

Première hypothèse restrictive.

La perméabilité K_x ne dépend pas de x.

L'intégrale figurant dans la relation (18) disparaît.

Remarques :

— Si l'on choisit pour limite supérieure ou inférieure du domaine un plan horizontal :

$$\frac{\partial b}{\partial x} = 0 \text{ ou } \frac{\partial a}{\partial x} = 0$$

le terme $[K_x\Phi]_B.(\partial b/\partial x)$ ou, alternativement, le terme $[K_x\Phi]_A.(\partial a/\partial x)$ disparaissent à leur tour;

— si l'on peut choisir une limite supérieure dans laquelle la pression est constante, on peut prendre celle-ci comme origine des pressions, d'où $\Phi_B = 0$ et le terme $[K_x\Phi]_B.(\partial b/\partial x)$ s'annule. Ce cas englobe, en particulier, les écoulements à surface libre où règne la pression atmosphérique.

Seconde hypothèse restrictive.

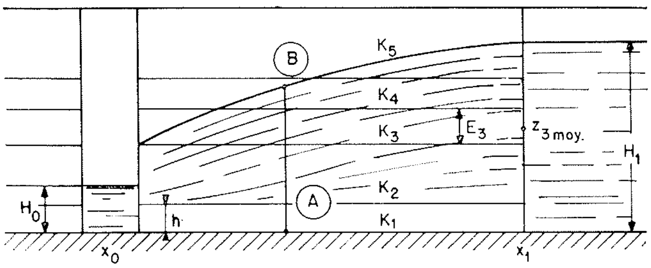
Le domaine choisi est limité supérieurement par un plan horizontal ou par une surface à pression nulle.

La relation (18) devient alors :

$$q_x = - dy \left\{ \frac{\partial U_x}{\partial x} + [K_x\Phi]_A . \frac{\partial a}{\partial x} \right\} \qquad (19)$$

On va maintenant appliquer cette relation à deux cas particuliers pour lesquels il est possible de pousser le calcul plus loin.

IV. — Milieux horizontalement stratifiés.



2/

On suppose que le milieu poreux est constitué d'une série de couches horizontales homogènes. Si l'on prend pour limite inférieure de la nappe un plan horizontal, la relation (19) devient :

$$q_x = - dy \frac{\partial U_x}{\partial x} \qquad (20)$$

d'où :

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} dx = - dx\, dy \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} \qquad (21)$$

On obtiendrait de la même façon :

$$\frac{\partial q_y}{\partial y} dy = - dx\, dy \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} \qquad (22)$$

En écoulement permanent et conservatif, l'équation représentative s'écrit :

$$\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} = 0 \qquad (23)$$

Si l'on admet que la perméabilité horizontale ne dépend pas de la direction, on obtient :

$$U_x = U_y = U \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta U = 0} \qquad (24)$$

Une nouvelle fonction harmonique a été mise en évidence :

$$U(x, y) = \int_a^b K(z)\, \Phi\, dz \qquad (25)$$

Application :

A titre d'exemple simple, on a traité le problème de la tranchée (écoulement permanent) schématisé par la figure 2. Le potentiel U ne dépend plus de y : il reste donc que U est une fonction linéaire de x.

Le débit par mètre de largeur a pour valeur :

$$q_x = \frac{U_1 - U_0}{x_1 - x_0} \qquad (26)$$

Or, aux points $x = x_0$ et $x = x_1$ les potentiels U_0 et U_1 se calculent facilement :

Dans le cas de la figure, par exemple :

$$U_0 = \frac{1}{2} [K_1 . H_0^2 - (H_0 - h)^2 (K_1 - K_2)]$$

car le long de la ligne de suintement, $\Phi = 0$ (27)

$$U_1 = H_1 . \sum_1^n E_i K_i - \sum_1^n K_i E_i Z_{i\,moy}$$

K_i, E_i et $Z_{i\,moy}$ désignent respectivement la perméabilité, l'épaisseur et la cote moyenne de la partie mouillée de la couche d'indice i.

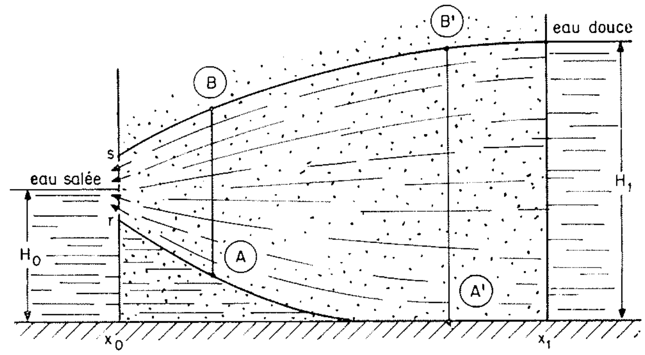
Remarques :

— On vérifie rapidement qu'en milieu homogène $K_1 = K_2 = \ldots = K$, on obtient la formule de Dupuit :

$$q_x = \frac{K}{2(x_1 - x_0)} (H_1^2 - H_0^2) \qquad (28)$$

— On a choisi l'exemple le plus simple, mais il est évident que le résultat se généralise par utilisation des propriétés des écoulements à potentiel (adjonction de puits ponctuels, d'infiltration uniforme, etc.).

V. — Nappe douce flottant sur une nappe salée.



3/

A cause des différences de densité, et en l'absence de diffusion, on observe en régime permanent une *interface* qui sépare la nappe d'eau douce en mouvement du coin d'eau salée au repos. Dans celui-ci, la pression est hydrostatique, d'où :

$$\frac{p_A}{\omega_s} = H_0 - a \quad \text{et} \quad \Phi_A = \frac{p_A}{\omega_d} = \frac{\omega_s}{\omega_d} (H_0 - a) \qquad (29)$$

L'assise imperméable étant prise pour origine des cotes, H_0 représente la cote de l'eau salée dans le réservoir aval; ω_s et ω_d sont les densités respectives de l'eau salée et de l'eau douce.

Si l'on reprend l'équation (19), en y remplaçant Φ_A par sa valeur, on trouve :

$$q_x = -dy \, . \frac{\partial \Omega}{\partial x} \tag{30}$$

en posant :

$$\Omega = U_x - \frac{1}{2} (K_x)_A \frac{\omega_s}{\omega_d} (H_0 - a)^2 \tag{31}$$

En rapprochant l'équation (30) de la relation (20), on constate qu'en adoptant les mêmes hypothèses, on aboutit à la relation :

$$\boxed{\Delta\Omega = 0} \tag{32}$$

d'où la nouvelle fonction potentielle dans ce cas particulier :

$$\Omega(x, y) = \int_a^b K(z) \, \Phi \, dz - \frac{K(a)}{2} \frac{\omega_s}{\omega_d} (H_0 - a)^2 \tag{33}$$

On voit immédiatement que ce potentiel s'étend à une zone telle que A'B', car le terme :

$$\frac{K(0)}{2} \frac{\omega_s}{\omega_d} . H_0^2 \text{ est une constante.}$$

La relation (33) est valable en milieu homogène ou horizontalement stratifié.

APPLICATION :

Dans le cas schématisé par la figure 3 (écoulement plan permanent), on trouve, comme précédemment :

$$q_x = \frac{\Omega_1 - \Omega_0}{x_1 - x_0} \tag{34}$$

Ω_1 se calcule sans difficulté, mais le calcul de Ω_0 fait intervenir la zone de suintement et la zone de résurgence au-dessous du réservoir d'eau salée.

Le long de la zone de suintement, Φ est nul, donc :

$$\Omega_0 = \int_r^{H_0} K(z) \, . \frac{\omega_s}{\omega_d} (H_0 - z) \, dz - \frac{K(r)}{2} \frac{\omega_s}{\omega_d} (H_0 - r)^2 \tag{35}$$

r désignant la cote du point extrême de la zone de résurgence.

— Si la perméabilité varie le long de la zone de résurgence, le calcul de Ω_0 n'est pas possible au moyen des seules considérations qui précèdent;

— Si la perméabilité est constante le long de la zone de résurgence, on trouve que le potentiel Ω_0 est nul, et il est alors possible de calculer q_x.

En milieu poreux homogène, on trouve la formule particulièrement simple :

$$\boxed{q_x = \frac{K}{2(x_1 - x_0)} \left(H_1^2 - \frac{\omega_s}{\omega_d} H_0^2 \right)} \tag{36}$$

REMARQUE :

La formule (36) s'applique à condition que :

$$\omega_d H_1 \geqslant \omega_s H_0 \tag{37}$$

Sinon, il y aura un écoulement d'eau salée vers le réservoir d'eau douce et les conditions d'application des formules précédentes ne sont plus satisfaites.

Il est à noter que dans le cas limite où :

$$\omega_d H_1 = \omega_s H_0,$$

la zone de résurgence n'existe plus; il subsiste néanmoins un débit d'eau douce égal à :

$$\boxed{q_x = \frac{K H_0^2}{2(x_1 - x_0)} \frac{\omega_s}{\omega_d} \left(\frac{\omega_s}{\omega_d} - 1 \right)} \tag{38}$$

qui s'écoule entièrement par la zone de suintement.

Conclusion.

Si l'on se contente d'évaluer les débits qui s'écoulent horizontalement dans une nappe d'eau, l'adoption de l'hypothèse de Dupuit entraîne les conséquences suivantes :

— l'équation dynamique globale s'exprime uniquement en fonction de la transmissivité du terrain : les hypothèses d'homogénéité et d'isotropie deviennent superflues;

— si la nappe est d'épaisseur constante et si le milieu poreux est stratifié ou homogène à grande échelle, la transmissivité reste invariable; la forme de la nappe n'intervient plus dans l'équation dynamique. Dans le cas d'une nappe à surface libre reposant sur un substratum imperméable, le carré de l'épaisseur de la nappe est une fonction harmonique, que le terrain soit homogène localement ou statistiquement.

Dans un milieu poreux horizontalement stratifié, on peut mettre en évidence, dans certaines conditions, un potentiel qui permet de calculer de façon rigoureuse les débits échangés dans un système hydraulique (tranchée, batterie de puits. etc.) sans qu'il soit nécessaire de faire appel à l'hypothèse de Dupuit.

Un potentiel comparable existe dans le problème des nappes douces flottant sur de l'eau salée au repos.

Abstract

Flow in porous media and Dupuit's hypothesis

by J. Zaoui *

Dupuit's hypothesis is frequently adopted in studying flows in a natural porous media and this simplification is usually justified in view of the size of the water tables studied, where the depth is slight compared to the area.

It is first shown that this hypothesis can under certain conditions provide a means of calculating the horizontal flow rates, especially as far as wells and other structures are concerned, when the wather-bearing formation is composed of ground which is stratified or homogeneous on a large scale. The usual hypothesis of homogeneous conditions and isotropy is therefore often superfluous.

The author continues by showing, in the case of media with horizontal strata or aquifers of fresh over salt water, that the horizontal flows can be calculated with strict accuracy, ignoring Dupuit's hypothesis when the boundary conditions permit.

Practically speaking, therefore, for both these cases the discharge/recession relationships for structures can be defined without the need to carry out the extremely complex operation of determining all the flow characteristics.

* Engineer at the SO.GR.E.A.H., Grenoble.