

# SUR LES PROPRIÉTÉS MÉCANIQUES ET THERMIQUES DES ÉCOULEMENTS TURBULENTS AU VOISINAGE DES PAROIS CHAUFFÉES

PAR  
C. BOCQUILLON \*

La méthode d'étude de la structure des écoulements turbulents définis par des conditions aux frontières stationnaires, proposée par le professeur Fortier [1], peut être étendue à l'étude des transferts thermiques en ajoutant aux équations dynamiques l'équation thermique.

Le but de cette étude est de montrer la nature différente du transfert de quantité de mouvement et de chaleur. Les « diffusivités » mécanique et thermique, dont le rapport est en général considéré comme constant, ont des structures, près de la paroi, différentes, ce qui conduit à un rapport variable s'annulant avec la distance à la paroi.

Nous allons tout d'abord rappeler les propriétés essentielles des écoulements turbulents :

L'expérience montre que lorsque certains paramètres sans dimension dépassent des valeurs critiques, un écoulement qui était stationnaire prend un caractère aléatoire bien que les conditions aux limites restent indépendantes du temps. L'écoulement est turbulent. Les écoulements turbulents ne gardent que des propriétés statistiques.

Considérons un ensemble de  $N$  installations identiques qui sont mises en route simultanément et de façon identique.

Les  $N$  écoulements vont être différents, mais ils gardent tous des caractères communs qui sont les caractères de cet écoulement turbulent.

## Première hypothèse :

### Les équations de Navier.

Considérons une de ces  $N$  expériences. Les vitesses dans cet écoulement ne sont pas aléatoires, mais le champ en est parfaitement défini. Ces vitesses sont des fonctions continues et continuellement dérivables. Les vitesses de déformation et les tensions sont telles que l'hypothèse de Navier est vérifiée. On peut donc considérer comme valable d'appliquer pour cette expérience les équations de Navier aux vitesses instantanées.

\* Professeur à l'Ecole Supérieure d'Ingénieurs de Beyrouth (Liban), détaché du Centre de Recherches et d'Essais de Chatou.

## Deuxième hypothèse :

### Universalité à la paroi.

L'expérience montre que toutes les grandeurs mesurées près des parois sont indépendantes des conditions lointaines, c'est-à-dire qu'il est possible de se fixer des conditions d'écoulement particulières pour obtenir une solution plus générale.

## A — Développement d'une solution.

Nous allons nous fixer un problème particulier :

Soit deux plaques planes parallèles lisses de dimensions infinies, l'une chauffée uniformément en moyenne avec un flux de chaleur  $\overline{\varphi_0}$ , l'autre refroidie uniformément de telle sorte que le bilan thermique soit nul. Un fluide de propriétés physiques :  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $C_p$  constantes s'écoule entre les plaques avec une vitesse moyenne  $\overline{V}$  sous l'effet d'un gradient de pression moyen  $\overline{\text{grad } p}$ .

Les équations du mouvement sont régies par les équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{D}{Dt} (\vec{U}) = -\overline{\text{grad } p} + \text{Div} (\mu \overline{\text{Grad } \vec{U}}) \\ \text{div } \vec{U} = 0 \\ \rho C_p \frac{D\theta}{Dt} = \text{div} (\lambda \overline{\text{grad } \theta}) + \mu \Phi \end{array} \right.$$

$\Phi$  étant la fonction de dissipation.

En général, on néglige la fonction de dissipation dans l'équation thermique. Cela est incorrect pour une analyse à la paroi, puisque nous savons que cette fonction est maximale à cette paroi.

Les équations dynamiques étant indépendantes de l'équation thermique, nous pouvons chercher la solution thermique comme une addition de deux solutions thermiques particulières associées à la même solution dynamique.

Posons :

$$\theta = \theta_1 + \theta_2$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \text{I} & \left\{ \begin{aligned} \rho C_p \frac{D\theta_1}{Dt} &= \text{div} (\lambda \overrightarrow{\text{grad}} \theta_1) + \mu \Phi; \\ \text{et un flux de paroi } \varepsilon &\text{ sur les deux parois.} \end{aligned} \right. \\
 \text{II} & \left\{ \begin{aligned} \rho C_p \frac{D\theta_2}{Dt} &= \text{div} (\lambda \overrightarrow{\text{grad}} \theta_2); \\ \text{avec les flux } \overline{\varphi_0} - \varepsilon &\text{ sur la paroi 1,} \\ &\quad -\overline{\varphi_0} - \varepsilon \text{ sur la paroi 2.} \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

La première solution représente le système avec un flux de paroi évacuant exactement la chaleur produite par dissipation.

La deuxième solution lorsque  $\varepsilon = 0$  représente la solution asymptotique lorsque le flux devient infini.

La correction due à la solution I est très faible pour les flux usuels. Aussi allons-nous la négliger dans une première étude.

**Mise en équation du problème.**

Prenons une origine sur l'une des plaques.

Ox parallèle à V, Oy normal à la plaque et orienté vers l'autre plaque, Oz complétant le trièdre.

Dans ce système les équations de Navier sont :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial u} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} &= \nu \Delta u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \text{et deux analogues} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial u\theta}{\partial x} + \frac{\partial v\theta}{\partial y} + \frac{\partial w\theta}{\partial z} &= \frac{\nu}{\mathcal{F}} \Delta \theta \end{aligned} \right.$$

avec :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

les conditions aux limites sont :

$$\left\{ \begin{aligned} \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= \overline{\tau_0} \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} &= \frac{dp}{dx} \end{aligned} \right.$$

les conditions initiales s'expriment par la stationnarité : La dérivée temporelle d'une grandeur moyenne est nulle.

Posons :

$$u_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$$

Transformons les équations en prenant comme unités :

- de vitesse :  $u_*$ ;
- de longueur :  $\nu/u_*$ ;
- de temps :  $\nu/u_*^2$ ;
- de température :  $\overline{\varphi_0}/\rho C_p u_*$ .

Le gradient de pression imposé prend la forme :

$$\frac{(dp/dx) \nu}{\rho u_*^3} = \frac{1}{\mathcal{R}_0}$$

par analogie avec l'inverse d'un nombre de Reynolds.

Les équations indéfinies du mouvement deviennent :

$$\text{(I)} \left\{ \begin{aligned} A_+ &= \frac{\partial u_+}{\partial t_+} + \frac{\partial u_+^2}{\partial x_+} + \frac{\partial u_+ v_+}{\partial y_+} + \\ &\quad \frac{\partial u_+ w_+}{\partial z_+} - \Delta u_+ = -\frac{1}{\mathcal{R}_0} - \frac{\partial p_+}{\partial x_+} \\ B_+ &= \frac{\partial v_+}{\partial t_+} + \frac{\partial u_+ v_+}{\partial x_+} + \frac{\partial v_+^2}{\partial y_+} + \\ &\quad \frac{\partial v_+ w_+}{\partial z_+} - \Delta v_+ = -\frac{\partial p_+}{\partial y_+} \\ C_+ &= \frac{\partial w_+}{\partial t_+} + \frac{\partial u_+ w_+}{\partial x_+} + \frac{\partial v_+ w_+}{\partial y_+} + \\ &\quad \frac{\partial w_+^2}{\partial z_+} - \Delta w_+ = -\frac{\partial p_+}{\partial z_+} \\ D_+ &= \frac{\partial \theta_+}{\partial t_+} + \frac{\partial u_+ \theta_+}{\partial x_+} + \frac{\partial v_+ \theta_+}{\partial y_+} + \\ &\quad \frac{\partial w_+ \theta_+}{\partial z_+} - \frac{1}{\mathcal{F}} \Delta \theta_+ = 0 \end{aligned} \right.$$

Les conditions aux limites sont :

$$\text{(I')} \left\{ \begin{aligned} (u_+)_0 = (v_+)_0 = (w_+)_0 = (\theta_+)_0 &= 0 \\ \left( \frac{\partial \bar{u}_+}{\partial y_+} \right)_{y=0} &= 1 \\ \left( \frac{\partial \theta_+}{\partial y_+} \right)_{y=0} &= \mathcal{F} \end{aligned} \right.$$

Nous ferons, avec le professeur Fortier, des développements de Mac Laurin des fonctions  $u, v, w$ , au voisinage de  $y = 0$  :

Soit :

$$\left\{ \begin{aligned} u_+ &= a_1 y_+ + a_2 \frac{y_+^2}{2!} + \dots + a_n \frac{y_+^n}{n!} + \dots \\ v_+ &= b_1 y_+ + b_2 \frac{y_+^2}{2!} + \dots + b_n \frac{y_+^n}{n!} + \dots \\ w_+ &= c_1 y_+ + c_2 \frac{y_+^2}{2!} + \dots + c_n \frac{y_+^n}{n!} + \dots \\ \theta_+ &= d_1 y_+ + d_2 \frac{y_+^2}{2!} + \dots + d_n \frac{y_+^n}{n!} + \dots \end{aligned} \right.$$

Les  $a_i, b_i, c_i, d_i$  sont des fonctions continues et continuellement dérivables des  $x, z, t$ .

L'élimination de la pression entre les trois premières équations conduit à :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial A_+}{\partial y_+} &= \frac{\partial B_+}{\partial x_+} \\ \frac{\partial C_+}{\partial y_+} &= \frac{\partial B_+}{\partial z_+} \end{aligned} \right.$$

qui en moyenne nous donnent :

$$\frac{\partial \bar{A}_+}{\partial y_+} = \frac{\partial \bar{C}_+}{\partial y_+} = 0$$

Soit en appelant  $A_n, C_n, D_n$ , les termes de rang  $n$  en  $y_+$  des développements des  $A_+, C_+, D_+$ ,

$$\bar{A}_n = \bar{C}_n = \bar{D}_n = 0$$

Considérant les expressions de  $A_{+n}$ ,  $C_{+n}$  et  $D_{+n}$  :

$$(II) \left\{ \begin{aligned} A_n &= \frac{\partial a_n}{\partial t} + C_n^i \frac{\partial a_i a_{n-i}}{\partial x} \\ &+ C_{n+1}^i a_i b_{n+1+i} + C_n^i \frac{\partial a_i c_{n-i}}{\partial z} - \frac{\partial^2 a_n}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 a_n}{\partial z^2} - a_{n+2} \\ C_n &= \frac{\partial c_n}{\partial t} + C_n^i \frac{\partial c_i d_{n-i}}{\partial x} \\ &+ C_{n+1}^i c_i b_{n+1+i} + C_n^i \frac{\partial c_i c_{n-i}}{\partial z} - \frac{\partial^2 c_n}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 c_n}{\partial z^2} - c_{n+2} \\ D_n &= \frac{\partial d_n}{\partial t} + C_n^i \frac{\partial d_i a_{n-i}}{\partial x} \\ &+ C_{n+1}^i d_i b_{n+1+i} + C_n^i \frac{\partial d_i c_{n-i}}{\partial z} - \frac{1}{\mathcal{R}} \frac{\partial^2 d_n}{\partial x^2} - \frac{1}{\mathcal{R}} \frac{\partial^2 d_n}{\partial z^2} - \frac{1}{\mathcal{R}} d_{n+2} \end{aligned} \right.$$

Il vient en moyenne en tenant compte de :

$$\frac{\partial -}{\partial t} = \frac{\partial -}{\partial x} = \frac{\partial -}{\partial z} = 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{a}_{n+2} &= C_{n+1}^i \overline{a_i b_{n+1-i}} \\ \bar{c}_{n+2} &= C_{n+1}^i \overline{c_i b_{n+1-i}} \\ \bar{d}_{n+2} &= \mathcal{R} C_{n+1}^i \overline{d_i b_{n+1-i}} \end{aligned} \right.$$

Or, l'équation de continuité s'écrit :

$$b_{n+1} + \frac{\partial a_n}{\partial x} + \frac{\partial c_n}{\partial z} = 0$$

Soit :

$$(II) \left\{ \begin{aligned} \bar{a}_{n+2} &= -C_{n+1}^i \left( \overline{a_i \frac{\partial a_{n-i}}{\partial x}} + \overline{a_i \frac{\partial c_{n-i}}{\partial z}} \right) \\ \bar{c}_{n+2} &= -C_{n+1}^i \left( \overline{c_i \frac{\partial c_{n-i}}{\partial z}} + \overline{c_i \frac{\partial a_{n-i}}{\partial x}} \right) \\ \bar{d}_{n+2} &= -C_{n+1}^i \mathcal{R} \left( \overline{d_i \frac{\partial a_{n-i}}{\partial x}} + \overline{d_i \frac{\partial c_{n-i}}{\partial z}} \right) \end{aligned} \right.$$

Les moments du type :

$$a_i \frac{\partial c_{n-i}}{\partial x}$$

sont nuls. En effet ils ont pour expression :

$$\frac{1}{N} \sum_0^n c_i \frac{\partial a_{n-i}}{\partial x}$$

portant sur nos N installations.

Considérons le nombre N d'installations présentant la valeur :

$$\frac{\partial a_{n-i}}{\partial x} = k$$

à  $\delta k$  près et la valeur  $c_i$  à  $\delta c_i$  près. Par raison de symétrie il en existe sensiblement le même nombre présentant la valeur  $-c_i$  à  $\delta c_i$  près. Le moment :

$$c_i \frac{\partial a_{n-i}}{\partial x}$$

tend donc vers zéro quand N tend vers l'infini.

Les moments du type :

$$a_i \frac{\partial c_{n-i}}{\partial z}$$

ne semblent pas devoir être nécessairement nuls. C'est pourtant une hypothèse implicite couramment faite. L'étude de la turbulence « plane » dans un système bidimensionnel est pratique courante, sans justification.

La vérification d'une telle annulation serait chose simple. En effet, si tous les moments de ce type sont nuls, la corrélation  $\overline{U_A W_B}$  entre deux points est nulle, et réciproquement.

Ce résultat nous paraît bien improbable. Nous l'admettrons cependant en attendant des précisions d'ordre expérimental.

Dans cette hypothèse il vient :

$$(III) \left\{ \begin{aligned} \bar{a}_{n+2} &= -C_{n+1}^i \overline{a_i \frac{\partial a_{n-i}}{\partial x}} \\ \bar{c}_{n+2} &= -C_{n+1}^i c_i \frac{\partial c_{n-i}}{\partial x} \\ \bar{d}_{n+2} &= -C_{n+1}^i \mathcal{R} \left( \overline{d_i \frac{\partial a_{n-i}}{\partial x}} + \overline{d_i \frac{\partial c_{n-i}}{\partial z}} \right) \end{aligned} \right.$$

**Conditions aux limites.**

Les conditions aux limites s'expriment par :

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{a}_1 &= 1 \\ \bar{a}_2 &= \frac{1}{\mathcal{R}_0} \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} \bar{b}_1 &= 0 \\ \bar{b}_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} \bar{c}_1 &= 0 \\ \bar{c}_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} \bar{d}_1 &= \mathcal{R} \\ \bar{d}_2 &= 0 \end{aligned} \right.$$

Les fonctions  $a_1, d_2, c_1, c_2$  étant données, on peut calculer tous les termes dynamiques.

Si, de plus,  $d_1$  et  $d_2$  sont donnés, on peut calculer tous les termes thermiques. Ces fonctions ne sont pas quelconques puisqu'il nous reste à exprimer les conditions sur l'autre frontière. Mais elles possèdent des propriétés caractéristiques.

**Calcul des premiers termes.**

Nous allons calculer les premiers termes jusqu'au sixième ordre.

Nous avons :

$$\bar{a}_n = -C_{n-1}^i a_i \frac{\partial a_{n-2-i}}{\partial x}$$

Le  $a$  de plus haut degré nécessaire pour le calcul de  $\bar{a}_n$  est obtenu avec  $i=1$ . C'est donc  $a_{n-3}$ . Les seuls termes à calculer pour avoir le sixième ordre sont donc  $a_3, c_3, d_3$ .

$a_n$  est obtenu par l'équation :

$$A_{n-2} = \frac{\partial B_{n-3}}{\partial x}$$

avec :

$$B_{n-3} = \frac{\partial A_{n-4}}{\partial x} - \frac{\partial C_{n-4}}{\partial z}$$

Donc  $a_3$  est obtenu par :

$$A_1 = 0$$

Soit :

$$\frac{\partial a_1}{\partial t} + C_2^1 a_1 b_1 - \frac{\partial^2 a_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 a_1}{\partial z^2} - a_3 = 0$$

Comme  $b_1 = 0$  :

$$a_3 = \frac{\partial a_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 a_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 a_1}{\partial z^2}$$

de même :

$$\begin{cases} c_3 = \frac{\partial c_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 c_1}{\partial z^2} \\ d_3 = \frac{\partial d_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 d_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 d_1}{\partial z^2} \end{cases}$$

D'où pour les valeurs moyennes :

$$\bar{a}_3 = \bar{c}_3 = \bar{d}_3 = 0$$

**Termes du quatrième ordre.**

$$\begin{cases} a_4 = -3 a_1 \frac{\partial a_1}{\partial x} = -\frac{3}{2} \frac{\partial (a_1^2)}{\partial x} = 0 \\ c_4 = -3 c_1 \frac{\partial c_1}{\partial x} = -\frac{3}{2} \frac{\partial (c_1^2)}{\partial x} = 0 \\ d_4 = -3 \mathfrak{F} d_1 \frac{\partial a_1}{\partial x} \end{cases}$$

Ce dernier terme est *a priori* non nul, même si  $\mathfrak{F} = 1$ .

**Termes du cinquième ordre.**

$$\begin{cases} \bar{a}_5 = -\left(4 a_1 \frac{\partial a_2}{\partial x} + 6 a_2 \frac{\partial a_1}{\partial x}\right) = 2 a_1 \frac{\partial a_2}{\partial x} \\ \bar{c}_5 = 2 c_1 \frac{\partial c_2}{\partial x} \\ \bar{d}_5 = -\mathfrak{F} \left(4 d_1 \frac{\partial a_2}{\partial x} + 6 d_2 \frac{\partial a_1}{\partial x}\right) \end{cases}$$

Tous ces termes sont *a priori* non nuls.

**Termes du sixième ordre.**

$$\bar{a}_6 = -\left(5 a_1 \frac{\partial a_3}{\partial x} + 10 a_2 \frac{\partial a_2}{\partial x} + 10 a_3 \frac{\partial a_1}{\partial x}\right) = 5 a_1 \frac{\partial a_3}{\partial x}$$

en remplaçant  $a_3$  :

$$\bar{a}_6 = 5 a_1 \frac{\partial^2 a_1}{\partial t \partial x} - 5 a_1 \frac{\partial^3 a_1}{\partial x^3} - 5 a_1 \frac{\partial^3 a_1}{\partial x \partial z^2}$$

Or, nous avons les relations :

$$\begin{cases} a_1 \frac{\partial^3 a_1}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left( a_1 \frac{\partial^2 a_1}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial a_1}{\partial x} \right)^2 \text{ nul en moyenne} \\ a_1 \frac{\partial^3 a_1}{\partial u \partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left( a_1 \frac{\partial^2 a_1}{\partial x \partial z} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial a_1}{\partial z} \right)^2 \text{ nul en moyenne} \\ \frac{\partial a}{\partial x} \left( a_1 \frac{\partial a_1}{\partial t} \right) = a_1 \frac{\partial^2 a_1}{\partial x \partial t} + \frac{\partial a_1}{\partial x} \frac{\partial a_1}{\partial t} \text{ nul en moyenne} \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} \bar{a}_6 = -5 \frac{\partial a_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial a_1}{\partial t} \\ \bar{c}_6 = -5 \frac{\partial c_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial c_1}{\partial t} \end{cases}$$

Si nous admettons la relation :

$$\frac{\partial a_1}{\partial x} = \frac{1}{\bar{U}} \frac{\partial a_1}{\partial t}$$

Nous voyons que :

$$\begin{cases} \bar{a}_6 = 0 \\ \bar{c}_6 = 0 \end{cases}$$

L'expression de  $d_6$  ne se simplifiant pas n'est pas donnée.

Nous voyons donc qu'ainsi que l'indique le professeur Fortier, le premier terme non nul du développement de  $u$ , après les termes  $y$  et  $y^2$  est du cinquième degré. Mais de plus dans le développement de  $\theta$ , le premier terme non nul est du quatrième degré.

Les profils des vitesses et des températures s'écrivent :

$$(IV) \begin{cases} \bar{u}_+ = y_+ + \frac{1}{\mathcal{R}_0} \frac{y_+^2}{2} + \bar{a}_5 \frac{y_+^5}{5!} \\ \bar{\theta}_+ = \mathfrak{F} y_+ + \bar{d}_4 \frac{y_+^4}{4!} \end{cases}$$

Nous voyons que dans le profil de vitesse apparaît un terme dépendant du nombre de Reynolds. L'existence d'un tel terme est mise en évidence dans les mesures de profils de vitesse; ainsi que le souligne Hinze dans son étude de l'ensemble des profils existants [2].

La différence entre profils de vitesse et de température (même à  $\mathfrak{F} = 1$ ) est importante pour l'analyse des diffusivités.

**B — Application à l'étude des diffusivités.**

**1. Définition des grandeurs fictives turbulentes.**

Il est habituel de définir des grandeurs turbulentes rendant les équations moyennes identiques aux équations laminaires. Ces grandeurs ne sont pas des propriétés physiques, mais des grandeurs de calcul. On définit ainsi la « viscosité turbulente »  $\nu_t$ , la « conductivité turbulente »  $\lambda_t$ .

L'analyse des équations de Navier écrites en moyenne nous donne :

$$\begin{cases} \overline{\rho u'v'} = \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \\ \overline{\rho C_p \theta'v'} = \lambda_t \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \theta} \end{cases}$$

A partir de ces grandeurs on peut définir un « nombre de Prandtl turbulent ».

$$\mathfrak{F}_t = \frac{\mu_t C_p}{\lambda_t}$$

**2. Calcul des grandeurs turbulentes à partir des développements.**

En ne gardant que les premiers termes des développements :

$$(V) \begin{cases} \frac{\mu_t}{\mu} = \frac{\overline{u'_+ v'_+}}{\overline{\partial u_+ / \partial y_+}} \sim \bar{a}_5 \frac{y_+^4}{4!} \left( 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} y_+ \right) \\ \frac{\lambda_t}{\lambda} = \mathfrak{F} \frac{\overline{\theta'_+ v'_+}}{\overline{\partial \theta_+ / \partial y_+}} \sim \frac{1}{\mathfrak{F}} \bar{d}_4 \frac{y_+^3}{3!} \end{cases}$$

D'où il vient :

$$(V) \quad \boxed{\mathcal{E}_t = \mathcal{E} \frac{\overline{a_5}}{4 d_4} y_+}$$

Les méthodes employant le Prandtl turbulent admettent en général comme hypothèse de travail que le Prandtl turbulent ne dépend pas du Prandtl moléculaire, ni de la position du point dans la section (Spalding).

Nous voyons que près de la paroi ces hypothèses sont complètement erronées.

### C — Vérification expérimentale.

#### 1. Viscosité turbulente.

La forme de  $\mu_t/\mu$  en  $y_+^4$  est assez connue, puisque les dernières formes de profils de vitesse vérifient ce critère appelé critère d'Elrod [3].

Les profils de Van Driest (1956), Deissler (1955) Spalding (1961) vérifient la condition d'un terme en  $y_+^5$  dans le profil des vitesses.

Il suffit en effet de remarquer qu'en première approximation,  $u_+ \sim y_+$ .

Nous avons choisi le dernier en date, celui de Spalding [4] :

$$y_+ = u_+ + A \left[ \frac{\exp Bu_+ - 1 - Bu_+}{-\frac{1}{2}(Bu_+)^2 - \frac{1}{6}(Bu_+)^3 - \frac{1}{24}(Bu_+)^4} \right]$$

qui nous donne :

$$\frac{\mu_t}{\mu} \sim AB^5 \frac{y_+^4}{4!}$$

avec :

$$A = 0,1108 \quad B = 0,4$$

il vient :

$$\boxed{\frac{\mu_t}{\mu} = 5 \cdot 10^{-5} y_+^4}$$

#### 2. Conductivité turbulente.

La forme en  $y_+^3$  de  $\lambda_t/\lambda$  n'a jamais été mise en évidence. Nous avons repris les points fournis par Sleicher [5] qui fournit  $\epsilon_{H/\nu}$  jusqu'à  $y_+ = 3$ .

$\epsilon_{H}$  est défini par :

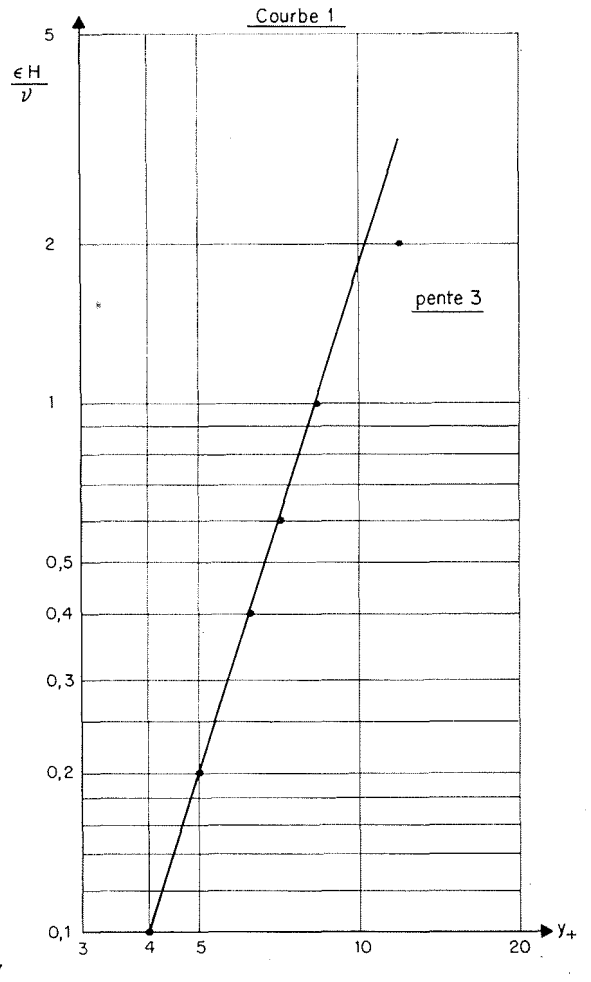
$$\lambda_t = \epsilon_{H\rho} C_p$$

d'où :

$$\frac{\lambda_t}{\lambda} = \mathcal{E} \frac{\epsilon_H}{\nu}$$

Nous avons reporté sur du papier logarithmique les points de Sleicher de  $y_+ = 4$  à  $y_+ = 10$  et nous avons trouvé une pente voisine de 3. Dans cette zone  $\epsilon_{H/\nu}$  est bien représentée par :

$$\frac{\epsilon_H}{\nu} = 1,6 \cdot 10^{-3} y_+^3 \text{ (courbe 1)}$$



1/

soit, avec de l'air ( $\mathcal{E} = 0,71$ ) :

$$\boxed{\frac{\lambda_t}{\lambda} = 1,1 \cdot 10^{-3} y_+^3}$$

#### 3. Nombre de Prandtl turbulent.

Le nombre de Prandtl turbulent a été recalculé à partir des mesures de Corcoran [6] et de Sleicher. Dans la région près de la paroi nous avons distingué deux zones :

- pour  $100 > y_+ > 25$  nous avons transformé les courbes de Corcoran et Sleicher en  $y u_+/\nu$  au lieu de  $y/\mathcal{R}$ . Nous voyons que cela conduit à une courbe unique aux erreurs près (courbe 2);
- pour  $10 > y > 4$ . Nous avons repris les valeurs de Sleicher de  $\epsilon_{H/\nu}$ , mais nous avons utilisé pour  $\epsilon_{M/\nu}$  les valeurs fournies par la formule de Spalding et non celle de Rannie qui ne vérifie pas le critère d'Elrod.

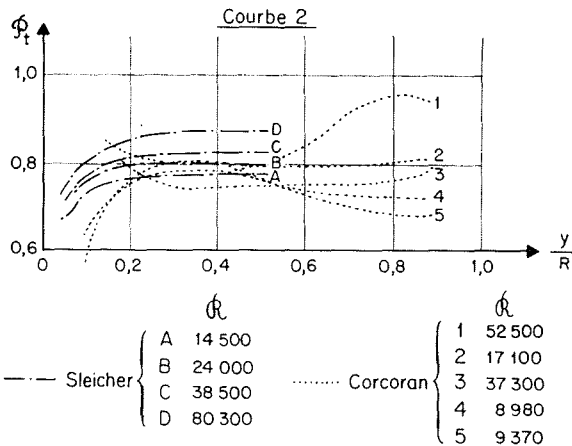
$y_+$	$\epsilon_{M/\nu}$	$\epsilon_{H/\nu}$	$\mathcal{E}_t$
10	0,51	1,25	0,4
8	0,21	0,8	0,26
6	0,066	0,35	0,19
5	0,03	0,2	0,15
4	0,013	0,09	0,14
3	0,004	0,03	0,13

## C. BOCQUILLON

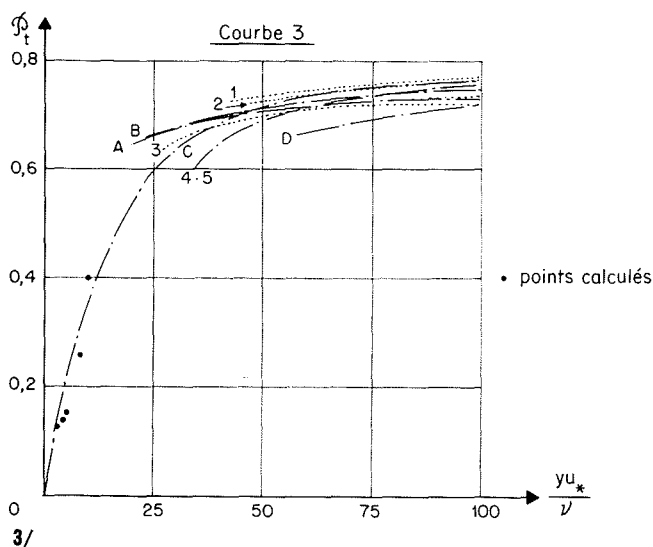
Nous avons porté les points qui montrent une décroissance vers 0 avec tangente à l'origine (courbe 3).

Nous avons :

$$\mathcal{P}_t = 0,03 y_+$$



2/



3/

## D — Conclusion.

L'analyse des équations de Navier au moyen de développements de Mac Laurin est une méthode puissante d'approche des phénomènes au voisinage des parois.

Elle apporte des précisions sur le profil des vitesses. Un terme dépendant du nombre de Reynolds s'introduit dans ce profil, et doit être ajouté au profil universel. Lors de l'utilisation de la méthode d'intégration de Spalding par exemple, il est nécessaire d'ajouter ce terme si le nombre de Reynolds est faible.

Deuxièmement, les hypothèses qui étaient faites sur le nombre de Prandtl turbulent étaient erronées. Celui-ci loin d'être constant varie proportionnellement à  $y_+$  près des parois.

Les vérifications expérimentales proposées sont grossières et prêtent à critiques. Mais elles ont l'avantage de montrer que ces essais qui tendaient à prouver la constance du nombre de « Prandtl turbulent » peuvent très bien prouver le contraire.

Dans une zone aussi voisine de la paroi, il semble plus correct de se fier aux calculs qu'aux mesures expérimentales. En tout état de cause, une vérification expérimentale très fine serait nécessaire.

## Bibliographie.

- [1] FORTIER. — Sur les propriétés des écoulements turbulents définis par des conditions aux frontières stationnaires. *La Houille Blanche* n° 3, mai-juin 1963, 241-253.
- [2] HINZE. — Turbulent pipe flow. *Colloque du C.N.R.S.*, Marseille, septembre 1961, 129.
- [3] ELROD. — Note on the turbulent shear stress near a wall. *Journal of Aero. Sci.*, vol. 24, 1957, 468-469.
- [4] SPALDING. — A single formule for the law of the wall. *Trans. A.S.M.E.*, E 81, 455 (1961).
- [5] SLEICHER. — Experimental velocity and temperature profiles for air in turbulent pipe flow. *Trans. A.S.M.E.*, E 80, avril 1958, 693-702.
- [6] CORCORAN. — Temperature gradient in turbulent gas streams. *Ind. Eng. Chem.*, 44, 1952, 410-430.

## Abstract

### Mechanical and thermal properties of turbulent flows near heated walls

by C. Bocquillon \*

Some interesting information can be obtained on mechanical and thermal flow properties by studying the structure of turbulent flows near walls with the aid of Mac Laurin expansions starting from a point at the wall.

The validity of the Navier equations for the usual turbulent flow cases has been established beyond doubt. All the relationships at the wall show that there is a single average solution with which the special case of flow between two planes can be investigated.

The dynamic solution for a fluid of constant physical properties is independent of the thermal solution. The latter can be broken down into elementary solutions and the dissipation and transfer terms thus separated.

#### Turbulent flow between heated and cooled flat plates with opposite mean fluxes.

The following assumptions were made for the calculations: validity of the Navier equations, negligible thermal effect of dissipation, mean flow independent of  $z$ , zero velocity at the wall.

The indefinite equations of motion (system I) and the boundary conditions (system I') are expressed non-dimensionally by relating velocity to  $u_*$ , length to  $\nu/u_*$ , time to  $\nu/u_*^2$  and temperature to  $\varphi_0/\rho C_p u_*$ .

The functions  $u_+$ ,  $v_+$ ,  $w_+$  and  $\theta_+$  are expanded as a Mac Laurin series starting from  $y_+ = 0$ . The instantaneous coefficients for the expansions (system II) are found by eliminating pressure and then identifying each term, whereupon the mean value of these coefficients can be found (system III).

An additional assumption has to be made regarding the correlation between the velocity components  $u$  and  $w$  at two points in order to be able to proceed with the calculation. If this correlation is assumed to be so small as to be negligible, the mean coefficients assume a simplified form (system III'). A certain number of mean coefficients can then be calculated, as follow:

$$\begin{array}{cccccc} \overline{a_1} = 0 & \overline{a_2} = 1/\mathcal{R}_* & \overline{a_3} = 0 & \overline{a_4} \cong 0 & \overline{a_5} \neq 0 & \overline{a_6} = 0 \\ \overline{c_1} = 0 & \overline{c_2} = 0 & \overline{c_3} = 0 & \overline{c_4} = 0^* & \overline{c_5} \neq 0 & \overline{c_6} = 0 \\ \overline{d_1} = \mathcal{E} & \overline{d_2} = 0 & \overline{d_3} = 0 & \overline{d_4} \neq 0 & \overline{d_5} \neq 0 & \dots\dots \end{array}$$

Velocity and temperature profiles can then be defined in clear terms (system IV). The thermal and dynamic profiles differ even at very high Reynolds numbers and a Prandtl number equal to 1.

**Diffusivity study.**

Expressions for the turbulence factors generally termed 'turbulent viscosity' ( $\mu_t$ ), 'turbulent conductivity' ( $\lambda_t$ ) and 'turbulent Prandtl number' ( $\mu_t C_p / \lambda_t$ ) can be obtained from the above coefficients.

The equivalence of these factors near the walls shows that  $y_+^4$  increases for  $\mu_t$ ,  $y_+^3$  for  $\lambda_t$  and  $y_+$  for  $\mathcal{E}_t$  (system V).

An experimental verification can be attempted from the conventional velocity profile formulations and Sleicher and Corcoran's experimental data. Its results show fairly satisfactory agreement, but measurement accuracy is too poor to allow any reliable conclusions to be drawn. The suggested theoretical data could only be verified satisfactorily if direct measurement of the correlations near the walls were possible.

---

\* Professor at the Ecole Supérieure d'Ingénieurs, Beyrouth, Lebanon, seconded by the Centre de Recherches et d'Etudes de Chatou.