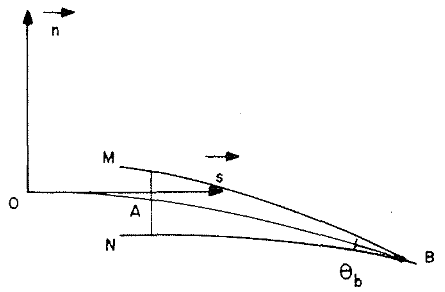
SUR L'AMPLITUDE DE LA HOULE ÉMISE PAR UNE SOURCE PONCTUELLE ISOTROPE DANS UN DOMAINE DE PROFONDEUR VARIABLE

PAR
P. GAILLARD *

Introduction

La recherche de l'extension au cas d'un domaine plan de profondeur variable des formules de Kirchoff, qui traduisent sous forme mathématique le principe de Huygens en profondeur constante **, nous a conduit à étudier l'évolution de l'amplitude de la houle émise par une source ponctuelle fictive le long d'un rayon d'onde issu de ce point.

On sait que si la pente des fonds est suffisamment faible pour que le flux d'énergie transmis entre deux rayons d'onde voisins BM, BN, se conserve sans dissipation ni effet de réflexion sur le fond, l'amplitude A_a de la houle au point A se déduit de l'écartement local σ_a de ces rayons au moyen de la relation (fig. 1) :



1/

* Ingénieur à la SO.GR.E.A.H., Grenoble.

** Le lecteur trouvera dans [1] un exposé détaillé sur l'application de ces formules au calcul sur ordinateur de la diffraction de la houle en profondeur constante.

$$A_a = \left(\frac{2\,K\theta_b}{\delta c_{ga}\sigma_a}\right)^{1/2} \qquad (1)$$

où : K est le flux d'énergie transmis par unité d'angle;
θ_b l'angle formé à l'origine B par les deux rayons d'onde;
δ le poids spécifique de l'eau;
c_{ga} la célérité de groupe de la houle au point A.

Le double problème que nous avons été amené à résoudre est le suivant : étant donné successivement deux sources fluctuantes, isotropes et d'égale intensité aux points A et B, y a-t-il une relation de réciprocité :

a) entre la valeur σ_a relative à la source B considérée seule et la valeur σ_b relative à la source A?

b) entre leurs dérivées $\dot{\sigma}_a$ et $\dot{\sigma}_b$ suivant le rayon d'onde AB?

Dans la formule (1) σ_a et σ_b sont pris en valeur absolue : dans ce qui suit, ils seront définis algébriquement en introduisant un système de coordonnées curvilignes $(0_s, 0_n)$ dont les axes sont respectivement tangent et normal au rayon d'onde AB en un point arbitraire 0 (fig. 1). W. H. Munk et R. S. Arthur ont démontré dans [2] que, pour des conditions initiales arbitraires, l'écartement de deux rayons d'onde voisins $\sigma(s)$, à l'abscisse curviligne s, est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{\sigma} + p(s)\,\dot{\sigma} + q(s)\,\sigma = 0 \qquad (2)$$

où :

$\dot{\sigma}$, $\ddot{\sigma}$ désignent les dérivées première et seconde de σ par rapport à s;

$$p(s) = -\frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial s} ;$$

$$q(s) = \frac{1}{c}\frac{\partial^2 c}{\partial n^2} ;$$

c désigne ici la célérité de phase de la houle considérée.

Les coefficients $p(s)$ et $q(s)$ sont des fonctions de s déterminées une fois effectué le tracé du rayon d'onde *. L'équation (2) va nous permettre de répondre aux deux questions posées.

Relation entre σ_a et σ_b

Les valeurs $-\sigma_a$ et σ_b peuvent être considérées comme les valeurs particulières :

$$\sigma_1(b) = \sigma_b \qquad \sigma_2(a) = -\sigma_a \tag{3}$$

des solutions $\sigma_1(s)$ et $\sigma_2(s)$ de l'équation (2) associées aux conditions aux limites :

$$\begin{array}{ll} \sigma_1(a) = 0 & \sigma_2(b) = 0 \\ \dot{\sigma}_1(a) = \theta_a & \dot{\sigma}_2(b) = \theta_b \end{array} \tag{4}$$

où a et b désignent les abscisses curvilignes des points A et B. Avec le système d'axes adopté, σ_a est positif lorsque θ_b est lui-même positif et sous réserve qu'il n'y ait aucun croisement des rayons d'onde entre A et B.

Nous introduisons la nouvelle inconnue :

$$\tau(s) = \sigma(s)\, e^{1/2 \int_0^s p(u)du} = \sigma(s)\left(\frac{c(s)}{c(O)}\right)^{-1/2} \tag{5}$$

où $c(s)$ représente la célérité de phase à l'abscisse s.

L'équation (2) devient ainsi :

$$\ddot{\tau} + k(s)\,\tau = 0 \tag{6}$$

avec :

$$k(s) = q(s) - \frac{1}{4}[p(s)]^2 - \frac{1}{2}\dot{p}(s)$$

Les fonctions $\sigma_1(s)$ et $\sigma_2(s)$ sont remplacées par les solutions $\tau_1(s)$ et $\tau_2(s)$ de l'équation (6) associées aux conditions aux limites :

$$\begin{array}{ll} \tau_1(a) = 0 & \tau_2(b) = 0 \\ \dot{\tau}_1(a) = \theta_a\gamma_a^{-1/2} & \dot{\tau}_2(b) = \theta_b\gamma_b^{-1/2} \end{array} \tag{7}$$

où :

$$\begin{array}{l} \gamma_a = e^{-\int_0^a p(s)ds} = \dfrac{c_a}{c_0} \\ \gamma_b = e^{-\int_0^b p(s)ds} = \dfrac{c_b}{c_0} \end{array} \tag{8}$$

* Le lecteur trouvera dans [2] l'expression de $p(s)$ et $q(s)$ relative à d'autres systèmes de coordonnées.

c_0, c_a, c_b désignent la valeur de la célérité de phase aux points O, A et B.

Si l'on désigne par F(s) et G(s), deux solutions particulièrement indépendantes de l'équation (6), la solution générale de cette équation est du type :

$$\tau(s) = \lambda F(s) + \mu G(s) \tag{9}$$

où : λ et μ sont deux constantes déterminées par les conditions aux limites.

On trouve ainsi, pour expression de $\tau_1(s)$ et $\tau_2(s)$:

$$\begin{array}{l} \tau_1(s) = \theta_a\gamma_a^{-1/2}\left\{\dfrac{G(a)\,F(s) - F(a)\,G(s)}{G(a)\,\dot{F}(a) - F(a)\,\dot{G}(a)}\right\} \\ \tau_2(s) = \theta_b\gamma_b^{-1/2}\left\{\dfrac{G(b)\,F(s) - F(b)\,G(s)}{G(b)\,\dot{F}(b) - F(b)\,\dot{G}(b)}\right\} \end{array} \tag{10}$$

Les grandeurs σ_a et σ_b s'en déduisent par les formules :

$$\begin{array}{l} \sigma_b = \tau_1(b)\,\gamma_b^{1/2} \\ \sigma_a = -\tau_2(a)\,\gamma_a^{1/2} \end{array} \tag{11}$$

Considérons à présent l'intégrale :

$$\dot{I} = \int_a^b [G(s)\,\ddot{F}(s) - F(s)\,\ddot{G}(s)]\,ds \tag{12}$$

Une intégration par parties conduit à l'expression :

$$\dot{I} = [G(b)\,\dot{F}(b) - F(b)\,\dot{G}(b)] - [G(a)\,\dot{F}(a) - F(a)\,\dot{F}(a)] \tag{13}$$

qui représente la différence des dénominateurs entre crochets figurant dans (10). La substitution dans (12) des expressions de $\ddot{F}(s)$ et $\ddot{G}(s)$ déduites de (6) montre immédiatement que $\dot{I}$ est nul. Il résulte de cette propriété que :

$$\frac{\tau_1(b)}{\tau_2(a)} = -\frac{\theta_a\gamma_a^{-1/2}}{\theta_b\gamma_b^{-1/2}} \tag{14}$$

et, sous une forme symétrique, que :

$$\frac{\sigma_b\theta_b}{c_b} = \frac{\sigma_a\theta_a}{c_a} \tag{15}$$

On déduit également des relations (1), (8) et (15), l'expression :

$$A_a = \left[\frac{2\,K\theta_a c_b}{\delta . c_{ga}\,|\sigma_b|\,c_a}\right]^{1/2} \tag{16}$$

Dérivées $\dot{\sigma}_a$ et $\dot{\sigma}_b$

Il n'existe pas entre $\dot{\sigma}_a$ et $\dot{\sigma}_b$ de relation de réciprocité comparable à (15); en effet, par un procédé de calcul analogue au précédent, on établit que :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\dot{\sigma}_a}{\sigma_a} &= \frac{\dot{\tau}_2(a)}{\tau_2(a)} - \frac{1}{2}p(a);\\ \frac{\dot{\sigma}_b}{\sigma_b} &= \frac{\dot{\tau}_1(b)}{\tau_1(b)} - \frac{1}{2}p(b)\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

avec, en se référant à (10) :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\dot{\tau}_1(b)}{\tau_1(b)} &= \left[\frac{G(a)\,\dot{F}(b) - F(a)\,\dot{G}(b)}{G(a)\,F(b) - F(a)\,G(b)}\right]\\ \frac{\dot{\tau}_2(a)}{\tau_2(a)} &= \left[\frac{G(b)\,\dot{F}(a) - F(b)\,\dot{G}(a)}{G(b)\,F(a) - F(b)\,G(a)}\right]\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

En intégrant par parties l'intégrale :

$$\dot{I} = \int_a^b [G(b+a-s)\,\ddot{F}(s) - F(b+a-s)\,\ddot{G}(s)]\,ds \quad (19)$$

on obtient la différence des numérateurs figurant aux seconds membres de (18) :

$$\dot{I} = [G(a)\,\dot{F}(b) - F(a)\,\dot{G}(b)] - [G(b)\,\dot{F}(a) - F(b)\,\dot{G}(a)] \quad (20)$$

En utilisant l'équation (6), on peut donner à cette intégrale la forme suivante :

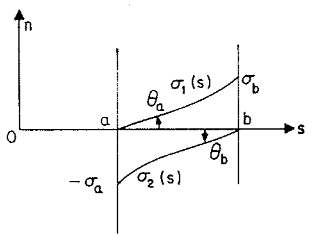
$$\dot{I} = \int_a^b [F(b+a-s)\,G(s) - F(s)\,G(b+a-s)]\,k(s)\,ds \quad (21)$$

ou :

$$\dot{I} = \int_a^b F(b+a-s)\,G(s)\,[k(s) - k(b+a-s)]\,ds$$

qui, généralement, n'est pas nulle en profondeur variable.

On peut, par contre, établir une correspondance simple entre σ_a et la valeur au point B de la fonction $\varpi_1(s)$ définie comme la solution de l'équation (2) associée aux conditions aux limites (fig. 3) :



2/

$$\varpi_1(a) = l_a\theta_a \qquad \dot{\varpi}_1(a) = 0 \quad (22)$$

où l_a est une longueur arbitraire, mais petite, pour que l'évolution de l'écartement des rayons d'onde correspondants soit justiciable de l'équation différentielle (2).

Si H (s) et K (s) désignent deux solutions particulières de (2), on montre aisément que la solution générale de cette équation est de la forme :

$$\left.\begin{aligned}&\sigma(s) = \alpha(s)\,\sigma(a) + \beta(s)\,\dot{\sigma}(a)\\ &\text{où :}\\ &\alpha(s) = \left[\frac{\dot{K}(a)\,H(s) - \dot{H}(a)\,K(s)}{\dot{K}(a)\,H(a) - \dot{H}(a)\,K(a)}\right]\\ &\beta(s) = \left[\frac{H(a)\,K(s) - K(a)\,H(s)}{\dot{K}(a)\,H(a) - \dot{H}(a)\,K(a)}\right]\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

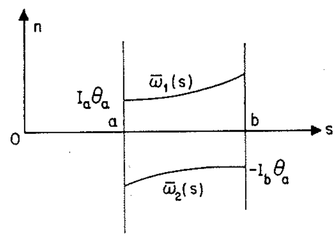
Il résulte des définitions de $\sigma_1(s)$, $\sigma_2(s)$ et $\varpi(s)$ que :

$$\begin{aligned}0 &= -\alpha(b)\,\sigma_a + \beta(b)\,\dot{\sigma}_a\\ \sigma_b &= \beta(b)\,\theta_a \qquad (24)\\ \varpi_1(b) &= \alpha(b)\,l_a\theta_a\end{aligned}$$

d'où l'on tire la relation :

$$\frac{\dot{\sigma}_a}{\sigma_a} = \frac{\varpi_1(b)}{\sigma_b l_a} \quad (25)$$

En introduisant la solution $\varpi_2(s)$ de l'équation (2) relative aux conditions aux limites (fig. 3) :



3/

$$\left.\begin{aligned}\varpi_2(b) &= -l_b\theta_b\\ \dot{\varpi}_2(b) &= 0\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

On établit de manière analogue la relation inverse :

$$\frac{\dot{\sigma}_b}{\sigma_b} = \frac{\varpi_2(a)}{\sigma_a l_b} \quad (27)$$

Applications

Les relations qui viennent d'être établies présentent de l'intérêt dans l'application du principe de Huygens au calcul de la propagation de la houle dans les zones portuaires de profondeur variable où les phénomènes de diffraction ne peuvent être négligés. Le calcul de l'amplitude de la houle en un point donné A, à partir des caractéristiques des sources fluctuantes B réparties sur une ligne fermée arbitraire (Γ) entourant ce point, comporte en principe deux phases distinctes :

a) le tracé à partir du point A des rayons d'onde provenant des sources réparties sur (Γ) connaissant la courbure ρ :

$$\rho = -\frac{1}{c} \overrightarrow{\text{grad}}\,(c) \,.\, \vec{n} \tag{8}$$

ainsi que la détermination corrélative des coefficients $p(s)$ et $q(s)$;

b) le calcul le long de chaque rayon d'onde de la solution $\sigma_2(s)$ de l'équation (2) associée aux conditions (4) imposées sur la frontière (Γ).

En pratique, les calculs sont effectués en décomposant le rayon d'onde en arcs circulaires de longueur finie Δs. Sur ordinateur, la méthode qui vient d'être décrite exige que soient tabulées au cours de la phase (*a*), les valeurs de $p(s)$ et $q(s)$ calculées en progressant de A vers B; ces coefficients sont ensuite exploités dans le sens inverse au cours de la phase (*b*).

La relation (16) permet de substituer au calcul de $\sigma_2(s)$ celui de $\sigma_1(s)$ et en conséquence, d'exécuter simultanément les deux phases de calcul : ainsi l'exploitation immédiate des coefficients $p(s)$ et $q(s)$ au cours de chaque pas de calcul Δs, n'exige plus leur tabulation.

Lorsque les réflexions sur des ouvrages portuaires sont possibles, le calcul de $\dot{\sigma}_2(s)$ est nécessaire; en substituant à ce calcul, celui de $\sigma_1(s)$ et de $\varpi_1(s)$, la relation (25) présente un avantage analogue.

Références

[1] F. Biesel et R. Ranson. — Calculs de diffraction de la houle. *Congrès de l'A.I.R.H.*, Dubrovnik, 1961.

[2] W. H. Munk et R. S. Arthur. — Wave intensity along a refracted ray. Gravity waves. *Nat. Bur. Standards*, Circular 521, 1952.

Abstract
On the amplitude of waves generated by an isotropic point source in a region of varying depth

by P. Gaillard *

Waves generated by a hypothetical point source are investigated with a view to the application of Huygens's principle to computer calculations of waves in harbour areas in which the depth of water varies. Two useful reciprocity relationships for the calculation of wave amplitude at any point and its derivative along a given direction are demonstrated.

It is known that the wave amplitude A_a at a point A can be deduced from the local distance σ_a between two adjoining wave radii originating from source B by relation (1), where K is the energy flux transmitted per unit angle, δ the specific gravity of water, C_{ga} the group wave celerity at A, and θ the angle between the two wave radii at B. The quantity σ_a is the value at A of the solution $\sigma_2(s)$ of differential equation (2) associated with boundary conditions (3) and (4). In this equation, s is the curvilinear abscissa along wave radius AB, n the ordinate along a line normal to the same wave radius at an arbitrary point, and c the corresponding phase celerity.

By considering two isotropic fluctuating sources of equal intensity at points A and B successively, it is shown that:—

1. The quantities σ_a with respect to source B considered by itself and σ_b with respect to source A are connected by relationship (15), in which c_a and c_b are the respective phase celerities at these two points;
2. The values of the derivatives with respect to s, σ'_a and σ'_b do not generally satisfy any analogous relationship. By means of relationship (25), however, σ'_a can be found from the previous quantities and the solution $\varpi_1(s)$ of equation (2) subject to conditions (22).

The normal procedure for calculating the wave amplitude at point A from the known characteristics of fluctuating sources such as B distributed along an arbitrary line (Γ) surrounding this point would require the following:—

a) A first phase involving the determination of the wave radii from point A, knowing their curvature due to bed variations, and the calculation and memory-storage of coefficients $p(s)$ and $q(s)$;

b) A second phase involving the calculation of σ_a by determining $\sigma_2(s)$ in a direction opposite to the direction of progression.

With relationship (15), the calculation can be carried out by simultaneously determining the wave radii and finding the integral $\sigma_1(s)$ of equation (2) associated with boundary conditions (3) and (4).

$\sigma'_2(s)$ has to be calculated where waves are likely to reflect back from structures in the harbour; if $\sigma_1(s)$ and $\varpi_1(s)$ are calculated instead, a similar advantage is gained by using relationship (25).

* Engineer at SO.GR.E.A.H., Grenoble.