NOUVELLE MÉTHODE D'APPLICATION DE QUELQUES FONCTIONS DE LA VARIABLE COMPLEXE AUX CALCULS DES SOUS-PRESSIONS AGISSANT SOUS LES OUVRAGES DE RETENUE

PAR BORIS S. BROWZIN *

Introduction

Les constructions de barrages et centrales, — dans les lits de fleuves et rivières de plaines, avec fondations reposant sur les dépôts quaternaires, alluviaux ou glaciaires, ou même sur des argiles anciennes, bref, sur des sols, soit compressibles, soit perméables, — ont nécessité des études du comportement de ces sols sous l'effet de charges considérables avec des résultantes fort inclinées du vecteur de la force de gravité. Les deux aspects du problème, — les tassements des sols compressibles et les filtrations dans les sols perméables, ainsi que le problème encore plus complexe qui se pose en présence de sol compressible et perméable en même temps, — attirent l'attention des hydrauliciens depuis la construction d'ouvrages de retenue de grande envergure, dans des vallées très larges et peu profondes de pays de plaines, comme ceux du Middle West américain et du bassin grandiose du Mississipi, ou bien dans celui de la Volga et d'autres rivières de la plate-forme russe, ainsi que dans les vallées des grands fleuves de l'Europe occidentale, à partir des années 20 de ce siècle.

Le problème relatif aux méthodes de calcul des tassements des sols argileux n'est pas encore entièrement résolu, même après l'apparition des œuvres de Florin, comprenant l'exposé fameux de nouvelles théories et méthodes rassemblées dans sa monographie [1] parue 25 ans après les premiers efforts faits dans ce domaine, et devenue classique depuis ce temps, par Frölich et Terzaghi dans les années 30 [2].

Le développement des idées et des méthodes, ainsi que de leurs applications, dans la théorie de filtration, a eu plus de succès et a amené à plus de solutions analytiques rigoureuses permettant de nombreuses applications dans le génie, que la théorie des tassements. Les problèmes capitaux de calculs de sous-pressions dans des conditions les plus variées, après environ 40 ans d'efforts, ont trouvé leur solution à nos jours.

Forchheimer [3], dans son article de 1886, a établi, apparemment le premier, les équations différentielles de filtration en forme générale, qui représentent la description complète du phénomène; il a indiqué plus tard comment les équations se traduisent en forme graphique.

Indépendamment, Boussinesq [4], en 1904 a établi les équations de filtration et a trouvé des solutions pour un nombre de problèmes complexes d'écoulements transitoires à surface libre.

Pavlovskii [5], dans sa volumineuse monographie, parue en 1922, et devenue classique, mais découverte apparemment, en dehors de son pays, seulement dans les années 50, a établi des méthodes générales de solutions de problèmes à deux dimensions d'écoulement des eaux filtrantes au-dessous des ouvrages de retenue. En appliquant des transformations conformes effectuées par quelques fonctions de la variable complexe, il a trouvé les solutions d'un grand nombre de problèmes fon-

* Professeur à l'Université Catholique d'Amérique à Washington, D.C.

Article published by SHF and available at http://www.shf-lhb.org or http://dx.doi.org/10.1051/lhb/1964045

damentaux, se rapportant aux barrages situés sur des couches perméables, à profondeur finie et infinie, avec un et deux rideaux étanches à disposition non symétrique, et avec trois rideaux symétriques et se rapportant aux ouvrages avec surfaces de contact avec le sol composé de lignes brisées. Cependant, les solutions de Pavlovskii, étant fondamentales, étaient limitées aux cas particuliers, qui ne correspondaient pas nécessairement aux ouvrages de génie dans la pratique de l'ingénieur. Les méthodes qu'il a découvertes représentent un intérêt plus considérable que les solutions particulières qu'il a obtenues en surmontant, cependant, de grandes difficultés mathématiques.

Les méthodes de cet auteur ont servi de base de départ pour un grand nombre de chercheurs, depuis que les travaux de construction de barrages sur sol ont débuté à partir des années 20 et 30 et ont pris de l'ampleur, surtout dans les années 40 et 50.

Ne mentionnant que les grandes centrales et les barrages sur la Volga, tous construits sur des sols, et des barrages dans le Middle West américain, où nous pouvons citer l'exemple modeste du barrage de Petenwel en Wisconsin, nous voyons que la nécessité de développer des méthodes de calculs des sous-pressions était grande. De nouvelles solutions pour des cas particuliers, obtenues par les élèves de Pavlovskii et par d'autres [6] ont augmenté les possibilités d'application de solutions rigoureuses d'équations d'écoulement sous pression dans les sols aux études des ouvrages. Cependant, la multitude de solutions n'avançait pas le problème d'avoir une méthode générale et suffisamment exacte de calculs de sous-pressions ainsi que de vitesse de sortie.

Indépendamment de Pavlovskii, Dachler [7] publie en 1937 sa monographie, qui est devenue très connue, où il répète un nombre de solutions de Pavlovskii, sans avoir pris connaissance de son traité de 1922, ainsi que Rosbach [8], qui, la même année que Dachler, publie un ouvrage dans lequel il traite des problèmes du même genre. Muskat [9], dans sa monographie savante et de grande valeur de 1937, étudie, parmi d'autres, les mêmes problèmes. Plus de détails sur l'histoire du développement de ces théories, ainsi qu'une bibliographie étendue, peuvent être trouvés dans l'ouvrage [10].

La fonction dzéta

Avant d'exposer les nouvelles méthodes d'applications très étendues de cette fonction bien connue, nous ferons un bref rappel de la dérivation de la fonction dzéta, que nous appelons ainsi pour simplifier la sémantique; ensuite nous énoncerons son rôle opérateur.

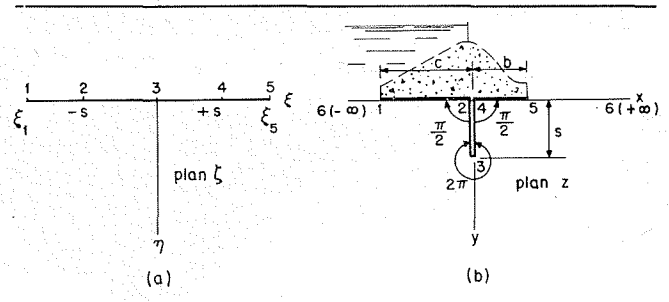
L'intégrale de Schwarz et Christoffel :

$$z = \int_0^{\zeta} (\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1} (\zeta - a_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (\zeta - a_n)^{\alpha_n - 1} d\zeta + B \qquad (1)$$

permet de trouver la fonction $z = f(\zeta)$ qui, en certaines conditions, transforme la moitié positive du plan $\xi\eta$ ($\zeta = \xi + i\eta$) dans un polygone situé dans le plan xy ($z = x + iy$). Cette intégrale est applicable à la transformation de la moitié inférieure (fig.1 *a*) du plan ζ — dzéta ($\zeta = \xi + i\eta$), dans un polygone défini par les points 2, 3, 4 et ∞, et situé dans le plan z ($z = x + iy$) (fig. 1 *b*) *.

Suivant cette figure, les angles du polygone seront :

$$\frac{\pi}{2},\ 2\pi,\ \frac{\pi}{2} \text{ et } 0$$



1/ Transformation du semi-plan ζ, dans le polygone qui contient le rideau étanche *s*, dans le plan *z*.
Transformation of the ζ half-plane in the polygon containing the watertight curtain s in the z-plane.

et les valeurs correspondantes de α seront :

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}, \qquad \alpha_3 = 2, \qquad \alpha_4 = \frac{1}{2} \text{ et } \alpha_6 = 0 \qquad (2)$$

Tenant compte que dans l'intégrale (1), trois constantes parmi les valeurs de a_1 à a_n (abscisses de points dans le plan ζ qui correspondent aux apex du polygone dans le plan z), peuvent être choisies arbitrairement, nous admettons :

$$a_2 = -s, \qquad a_3 = 0, \qquad \text{et } a_4 = s \qquad (3)$$

En introduisant les valeurs de α (2) et les valeurs de a (3) dans la formule (1), nous obtenons :

$$z = A \int_0^{\zeta} (\zeta + s)^{-(1/2)} (\zeta - 0) (\zeta - s)^{-(1/2)} d\zeta + B,$$

ou

$$z = A \int_0^{\zeta} \frac{\zeta d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - s^2}} + B \qquad (4)$$

d'où :

$$z = A \sqrt{\zeta^2 - s^2} + B \qquad (5)$$

Pour calculer les constantes A et B, nous nous servirons de la correspondance entre les coordonnées représentant les points 4 et 3 dans les deux plans :

— au point 4, $z = 0$ et $\zeta = s$, donc $B = 0$;

— au point 3, $z = is$ et $\zeta = 0$, d'où :

$$is = A \sqrt{-s^2} = iAs \qquad \text{et } A = 1$$

* Le profil d'un barrage-déversoir est tracé en pointillé sur la figure 1 *b*.

* Il faut tenir compte cependant que leur étanchéité n'est pas absolue et que leur perméabilité peut atteindre des valeurs qui correspondent à 20 % du débit total de filtration en certaines conditions.

La formule (5) devient :

$$z = \sqrt{\zeta^2 - s^2} \qquad (6)$$

Notre but cependant est la transformation du plan z, qui représente le champ d'écoulement sous barrages en une ligne étanche verticale, s (réalisée par un rideau de palplanches par exemple) * dans le plan semi-infini ζ, exempt de voies d'infiltration verticales. Donc, d'après (6), nous obtenons :

$$\zeta = \sqrt{z^2 + s^2} \qquad (7)$$

Sous cette forme, la fonction ζ, qui transforme le champ d'infiltration sous un barrage en un rideau étanche dans le champ d'infiltration sous un barrage sans rideau, a été obtenue par Pavlovskii dans son traité de 1922 [5] réédité en 1956 (t. II p. 111).

A la fonction ζ correspondent les valeurs réelles de :

$$\xi > 0 \qquad \text{quand } x > 0$$

et :

$$\xi < 0 \qquad \text{quand } x < 0$$

et les valeurs imaginaires de :

$$\eta > 0 \qquad \text{quand } y > 0;$$

Seules, les valeurs positives de η et de y représentent des conditions physiques du problème, puisque ce n'est que dans la partie positive (au-dessous des axes horizontaux) que les écoulements se produisent.

Le plan ζ représente ainsi la transformation conforme du plan z effectuée par la fonction ζ (7). Les points 1 ($x = -c$) et 5 ($x = b$) du plan z se transforment par conséquent, à l'aide de la même fonction (7) en les points 1 et 5 du plan ζ :

$$\xi_1 = -\sqrt{c^2 + s^2} \qquad \text{et } \xi = \sqrt{b^2 + s^2} \qquad (8)$$

donc $|\xi_1| > |\xi_5|$, puisque $|c| > |b|$ et les points 1 et 5 dans ce plan ne sont pas symétriques par rapport à l'origine des coordonnées.

La fonction $\overline{\zeta}$

Après la transformation conforme du plan z avec le rideau étanche dans le plan ζ sans rideau, nous transformerons ce dernier plan ζ en un autre, que nous appelons $\overline{\zeta}$ ($\overline{\zeta} = \overline{\xi} + i\overline{\eta}$), dans lequel les points extrêmes du barrage seront situés à une distance égale à l'unité de l'origine :

$$|\overline{\xi}_1| = |\overline{\xi}_5| = |1| \qquad (9)$$

Pour atteindre ce but, une transformation linéaire sera nécessaire :

$$\overline{\zeta} = a_1\zeta + a_2 \qquad (10)$$

Les coefficients a_1 et a_2 seront déterminés par la condition imposée (9) pour les points extrêmes du barrage, 1 et 5 :

$$\begin{aligned} \overline{\zeta}_1 &= -1 \qquad \text{et } \overline{\zeta}_5 = 1 \\ \zeta_1 &= \xi_1 \qquad \text{et } \zeta_5 = \xi_5 \end{aligned} \qquad (11)$$

En introduisant les valeurs données par (11) dans l'expression de la fonction $\overline{\zeta}$ (10), nous obtenons deux équations pour déterminer les coefficients a_1 et a_2 :

$$-1 = a_1\xi_1 + a_2 \qquad \text{et } 1 = a_1\xi_5 + a_2 \qquad (12)$$

Après avoir fait le calcul et introduit a_1 et a_2 dans la formule (10), nous obtenons la fonction $\overline{\zeta}$ qui effectue la transformation conforme du plan ζ dans le plan $\overline{\zeta}$:

$$\overline{\zeta} = \frac{2(\zeta - \xi_5)}{\xi_5 - \xi_1} + 1 \qquad (13)$$

Si le dernier point est $n = i$, l'indice 5 sera changé en indice i.

Donc, après cette seconde transformation, nous arrivons à remplacer le champ des écoulements sous un barrage à rideau étanche par un champ d'écoulement symétrique sous un barrage plat (sans rideau). La solution analytique pour ce dernier cas est bien connue d'après plusieurs sources, par exemple d'après la publication originale [5]. En transformant le champ des écoulements $\overline{\zeta}$ dans le *rectangle de base*, suivant l'expression de l'auteur, nous obtenons les formules pour les caractéristiques de l'écoulement sous un barrage à base horizontale (plat et sans rideau), c'est-à-dire les pressions et les vitesses.

Elles peuvent être exprimées par le potentiel complexe :

$$\omega = \varphi + i\psi \qquad (14\,a)$$

dont la solution, pour un barrage plat et symétrique, est donnée par la formule :

$$\omega = \frac{kH}{\pi} \arccos \overline{\zeta} \qquad (14\,b)$$

Le calcul de sous-pression est nécessaire dans les points situés sur la ligne de contact du barrage avec les sols où la fonction de l'écoulement $\psi = 0$; le potentiel des vitesses étant en général $\varphi = kh$, où k est le coefficient de Darcy (de perméabilité) et h la pression. En substituant les valeurs de ω, φ et ψ, et $\overline{\zeta} = \overline{\xi} + i0$ dans la formule (14 b) nous obtenons :

$$h = \frac{H}{\pi} \arccos \overline{\xi} \qquad (14\,c)$$

En admettant une chute unitaire sur le barrage, $H = 1$, nous obtenons les sous-pressions spécifiques :

$$\overline{h} = \frac{1}{\pi} \arccos \overline{\xi} \qquad (14)$$

La sous-pression est, en fin de compte, une fonction de z :

$$\overline{h} = f_1\{f_2[f_3(z)]\} \qquad (15)$$

où f_1, f_2 et f_3 se calculent par les formules (14), (13) et (7) respectivement.

Pour calculer la sous-presion, la transformation du champ des écoulements z dans le champ $\overline{\zeta}$ peut être effectuée graphiquement.

Transformation conforme du plan z en plan $\overline{\zeta}$ par procédés graphiques

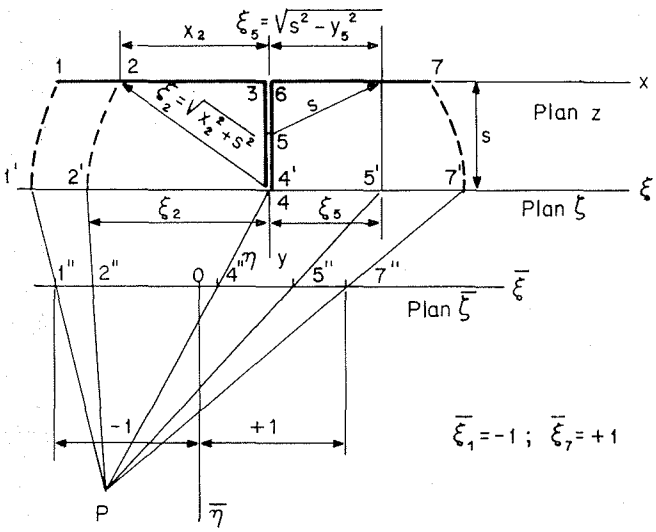
Nous transformerons, à titre d'exemple, le contour souterrain du barrage représenté dans le plan z (fig. 2) dans le plan $\overline{\zeta}$ d'après Fil'chakov [12].

Les points situés sur l'axe x ($z = x$) se transforment dans le plan ζ par la formule (7) :

$$\zeta = \xi = \sqrt{s^2 + x^2}, \tag{15}$$

et ceux de l'axe y ($z = iy$) par :

$$\text{ou :} \quad \begin{aligned} \zeta = \xi &= \sqrt{s^2 - y^2}, \quad \text{si } y \leq s \\ \zeta = i\eta &= i\sqrt{y^2 - s^2}, \quad \text{si } y \geq s \end{aligned} \tag{16}$$



2/ Procédé graphique pour la double transformation conforme.
Graphical double conformal transformation procedure.

En plaçant les axes x, y et ξ, η comme il est montré dans le dessin, nous obtenons pour le point 2 situé sur l'axe x, un point correspondant 2′ sur l'axe ξ en procédant comme on le voit d'après le dessin; et pour le point 5 sur l'axe y, nous obtenons le point correspondant 5′ sur l'axe ξ. Tout le contour se développe de la même façon, en une ligne de 1′ à 7′ sur l'axe ξ.

En choisissant un pôle arbitraire P, nous traçons entre les droites 1′ P et 7′ P une ligne parallèle à l'axe ξ qui nous servira d'axe $\overline{\xi}$. En divisant la distance entre les points 1″ et 7″ par deux, nous obtenons le point O origine des coordonnées du plan $\overline{\zeta}$. Les intersections telles que 1″, 2″, 5″ et 7″ représentent les points du contour transformé dans le plan $\overline{\zeta}$. La distance $|1''\,O| = |O\,7''|$ est prise pour unité. Les distances entre autres points sur l'axe ξ sont mesurées suivant la même échelle. La construction graphique ainsi achevée représente, par la ligne 1″7″ renfermant les points intermédiaires, la transformation conforme de la base du barrage à mur étanche du plan z dans le plan $\overline{\zeta}$ où elle devient plate et symétrique. Cette transformation correspond à celle qui résulterait de l'application des formules (7) et (13).

Le contour souterrain du barrage étant transformé, la solution pour le barrage plat s'applique à ce barrage transformé. Un exemple de calculs servira à expliquer l'application de la méthode.

Admettons la longueur 1 — 3 égale à 13,0 m, celle de 6 — 7 égale à 9,0 m et la longueur $s = 6{,}0$ m. Admettons que le point 2 est situé à :

$$z_2 = x_2 = -9{,}0 \text{ m},$$

si l'origine des coordonnées est au point 3 (ou 6).

La transformation du point 2 du plan z dans le plan ζ s'effectue par la formule (7) :

$$\zeta = \xi_2 = -\sqrt{(9{,}0)^2 + (6{,}0)^2} = -10{,}82 \text{ m}$$

Le signe est moins parce que le point 2′ doit se trouver à gauche de l'axe η.

La seconde transformation s'effectue par la formule (13) :

$$\overline{\zeta}_2 = \frac{2(\zeta - \xi_1)}{\xi_7 - \xi_1} + 1$$

$$\overline{\zeta}_2 = \overline{\xi}_2 = \frac{2(-10{,}82 - 9{,}0)}{9{,}0 - (13{,}0)} + 1 = 0{,}80$$

La surpression spécifique se calcule par la formule (14) :

$$\overline{h} = \frac{1}{\pi} \arccos 0{,}80 = 0{,}795$$

En admettant une chute de 100 m, sur le barrage, la sous-pression au point 2 sera de 79,5 m.

La détermination graphique donne le même résultat.

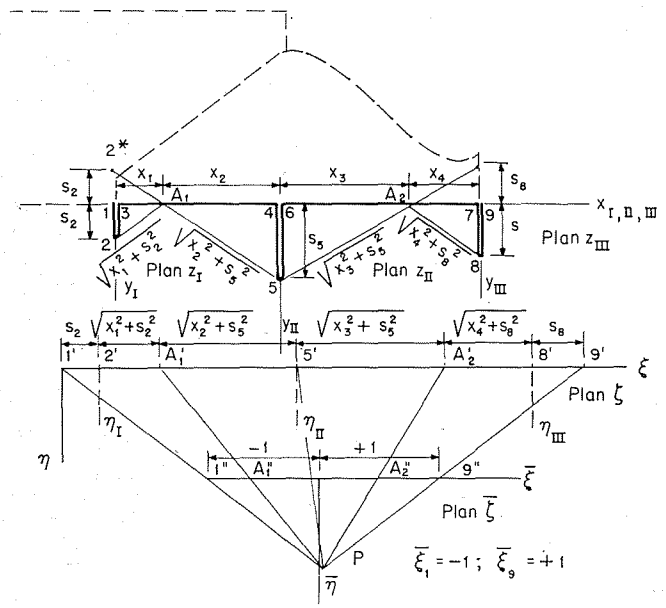
Application nouvelle aux barrages à plusieurs rideaux étanches, avec base située à la surface du sol

Suivant les recherches de Fil'chakov [12], les transformations conformes effectuées par les formules (7) et (13), ou par le procédé graphique qui leur correspond et que nous venons d'expliquer, sont applicables à la transformation de contour souterrain (ligne de contact avec le sol) de barrages situés sur des couches perméables infiniment profondes, à rideau étanche multiple, quand on peut négliger la profondeur de la base par rapport à la surface du sol et admettre que la base se trouve à la surface.

Nous divisons d'abord (fig. 3) les distances entre les rideaux étanches proportionnellement aux profondeurs de ces derniers, par exemple en traçant la ligne 2*5 ou la longueur 1 à 2 = 1 à 2*.

Le point A_1 divise ainsi la longueur de 1 à 4 proportionnellement aux profondeurs s_2 et s_5. Le point A_2 divise de la même façon la ligne de 6 à 7.

La transformation conforme qui s'effectue par la fonction ζ (15 et 16) et ensuite par la fonction $\overline{\zeta}$ (13), s'applique maintenant indépendamment aux trois zones (plan z_I, plan z_{II}, plan z_{III}) du champ des



3/ Transformation d'un contour à plusieurs palplanches.
Transformation of a profile with multiple seet-piling.

écoulements bordé par les lignes du contour souterrain du barrage, telles que 1 2 3 A_1, ensuite A_1 4 5 6 A_2 et finalement A_2 7 8 9. Le procédé graphique correspondant est expliqué dans la même figure 3. La ligne de 1 à A_1 du contour souterrain se développe par la transformation conforme en la ligne 1′ à A'_1 de l'axe ξ, ainsi que A_1 à A_2 en la ligne A'_1 à A'_2 du même axe ξ et enfin la ligne A_2 à 9 en A'_2 à 9′. Le contour entier est développé, en appliquant cette méthode, en une ligne de 1′ à 9′ située sur l'axe ξ du plan ζ. La transformation suivante s'effectue ensuite en choisissant un pôle P situé arbitrairement en dessous de l'axe ξ de même façon, comme dans le cas de rideau unique (fig. 2). La ligne 1′ à 9′ de l'axe ξ (fig. 3) devient la ligne 1″ à 9″ sur l'axe $\overline{\xi}$ du plan $\overline{\zeta}$. Il est commode de choisir la distance 1″ à 9″, puisqu'elle est arbitraire, égale à 2 et de placer l'axe $\overline{\eta}$ du même plan au milieu de cette ligne; ainsi l'abscisse du point 1″ devient — 1 et celle du point $9''_1 + 1$. Tous les points intermédiaires entre 1″ et 9″ qui correspondent aux points situés entre 1 et 9 du barrage se placent sur l'axe $\overline{\xi}$ du plan $\overline{\zeta}$. Les deux transformations successives amènent donc le contour donné (de 1 à 9) dans les plans z_I, z_{II} et z_{III} à un contour (de 1″ à 9″) qui représente une droite symétrique à l'origine des coordonnées dans le plan $\overline{\zeta}$. C'est un contour d'un barrage plat (sans rideau étanche) et symétrique, équivalent au contour du barrage donné. La solution, suivant (15), pour un barrage plat est donc applicable au contour souterrain représenté par la ligne 1″ à 9″.

La méthode de calculs des sous-pressions appliquée aux barrages à rideau étanche multiple, que nous venons d'exposer, sera rendue plus claire dans les détails nécessaires pour les applications, par un exemple numérique.

Nous représenterons les résultats de la transformation conforme des points 1 à 9 (fig. 3) du plan z dans le plan ζ et de la transformation des points 1 à 9 de ce plan dans le plan $\overline{\zeta}$, ainsi que le résultat des calculs de la sous-pression dans le tableau I.

Nous situons l'origine des coordonnées du plan z pour la partie centrale du barrage (de A_1 à A_2) au point 4 (ou 6). Nous cherchons à établir ensuite l'origine des coordonnées du plan ζ pour la même partie. En appliquant la formule (7) au point 5 ($z = O + is$), nous obtenons :

$$\zeta = \sqrt{(is_5)^2 + s_5^2} = O \qquad (17)$$

Suivant ce résultat et en appelant 5′ le point dans le plan ζ correspondant au point 5 dans le plan z, nous plaçons le point 5′ à l'origine des coordonnées.

Nous calculons maintenant la position du point A_1 ($z = -10{,}0 + iO = -10{,}0$) dans le plan ζ, en tenant compte de $s_5 = 5{,}0$, suivant (7).

$$\zeta = \sqrt{(-10{,}0)^2 + (5{,}0)^2} = 11{,}15 \qquad (18)$$

Puisque $y = O$, $\zeta = \xi = 11{,}15$.

Le point A_1 représente la jonction de la partie du contour souterrain de 1 à A_1 avec celle de A_1 à A_2. Nous appliquerons la transformation conforme par la fonction ζ (7) aux points de la partie gauche (de 1 à A_1) du contour souterrain. L'écoulement au-dessous de cette partie du barrage est considéré comme n'étant pas influencé par les conditions existant entre les points A_1 et A_2, de même que l'écoulement entre ces deux derniers points est considéré comme exempt des influences causées par la partie gauche. Les mêmes hypothèses s'appliquent, bien entendu, à la partie droite (de A_2 à 9) du contour en relation avec la partie centrale (A_1 à A_2).

En tenant compte de ces considérations, l'origine des coordonnées du plan z de la partie gauche se situe au point 1 (ou 3). L'origine du plan ζ pour la même partie en appliquant (7) au point z sera en :

$$\zeta = \sqrt{(is_2)^2 + s_2^2} = 0 \qquad (19)$$

et le point A_1 ($z = 5{,}0 + iO = 5{,}0$) dans ce système de coordonnées sera en :

$$\zeta - \xi = \sqrt{(5{,}0)^2 + (2{,}5)^2} = 5{,}60 \qquad (20)$$

Suivant les mêmes considérations, la valeur de ζ correspondant au point 1 sera :

$$\zeta = \xi = \sqrt{O + (2{,}5)^2} = -2{,}50 \qquad (21)$$

Ainsi, le contour de 1 à A_1 est développé sur une seule ligne, qui est l'axe des abscisses, ξ, du plan ζ. En se servant du point commun A_1, le contour A_1 à A_2 sera développé sur la continuation de la ligne des abscisses ξ au-delà du point A'_1. De même, la partie droite du contour (de A_2 à 9) sera développée sur la même droite (l'axe ξ) au-delà du point A'_2.

Il est commode d'établir une origine commune des coordonnées pour les trois parties du contour. Nous le placerons au point 1″ et calculerons de nouvelles valeurs pour les abscisses ξ. Donc, pour les points calculés nous obtenons :

$$\xi_1 = 0$$
$$\xi_2 = 2{,}50$$
$$\xi_{A_1} = 2{,}50 + 5{,}60 = 8{,}10$$
$$\xi_5 = 8{,}10 + 11{,}15 = 19{,}25,$$

et ainsi de suite.

Nous adopterons comme origine commune des coordonnées du plan z, pour les trois parties du barrage, le point 4 (ou 6) dont nous nous sommes déjà servis pour la partie centrale. Les valeurs des abscisses x du plan commun z et celles des abscisses ξ du plan commun ζ figurent dans le tableau I.

La seconde transformation, celle du plan ζ dans le plan $\overline{\zeta}$, qui s'effectue par la fonction $\overline{\zeta}$ (13), sera illustrée par le calcul de l'abscisse du point 4″, correspondant aux points 4 et 4′ ($\zeta = \xi = 14{,}30$) dans les plans z et ζ respectivement :

$$\overline{\zeta}_4 = \frac{2\,(\zeta - \xi_9)}{\xi_9 - \xi_1} + 1;$$

$$\overline{\zeta}_4 = \frac{2\,(14{,}30 - 34{,}30)}{34{,}30} + 1 = -0{,}166.$$

Cette valeur figure dans la colonne 4 du tableau I. La même valeur peut être obtenue graphiquement (fig. 3).

Enfin, pour obtenir la sous-pression spécifique au point 4, nous appliquerons la formule (14) se rapportant au barrage à base plate :

$$\overline{h}_4 = \frac{1}{\pi} \arccos(-0{,}166) = 0{,}553$$

Si la chute sur le barrage était par exemple 100 m, la sous-pression au point 4 serait 55,3 m.

Le calcul de la sous-pression agissant à un point arbitraire situé sur la base du barrage, tel que B ($z = -6{,}2 + i0 = -6{,}2_1$), s'effectue de même façon, comme celui se rapportant aux points A_1 ou A_2 (fig. 3). La fonction ζ suivant (7) qui transforme B dans le point B′ sera :

$$\zeta = \xi = \sqrt{(-6{,}2)^2 + (5{,}0)^2} = -7{,}96$$

L'abscisse du point B′, dans le même plan (ζ) mais dans le système de coordonnées avec origine au point 1′ sera :

$$\xi_B = \xi_5 - 7{,}96 = 19{,}25 - 7{,}96 = 11{,}29$$

La position du point B″ dans le plan $\overline{\zeta}$ se calcule d'après (13) :

$$\overline{\xi}_B = \frac{2\,(11{,}29 - 34{,}30)}{34{,}30} + 1 = -0{,}340$$

La sous-pression spécifique, d'après (14), au point B de la base du barrage, sera :

$$\overline{h}_B = \frac{1}{\pi} \arccos(-0{,}340) + 1 = -0{,}610$$

ou bien la sous-pression totale, au même point B, pour 100 m de chute sur le barrage, sera 61,0 m.

Le degré d'exactitude de la méthode de calcul ressort de la comparaison des valeurs de h avec celles de h_t, ces dernières étant rigoureuses, obtenues d'après la méthode des transformations conformes successives.

On voit que les valeurs de $\overline{h}$ diffèrent de celles de $\overline{h}_t$ de moins de 1 % à partir du point 1 a au point 5, qu'elles diffèrent de 2 à 4 % entre les points 6 et 7, et ce n'est qu'au point 8 qu'elles atteignent environ 5 %. Donc, pour les buts du génie civil l'exactitude est très satisfaisante.

Barrages à plusieurs rideaux étanches avec base située au-dessous de la surface du sol

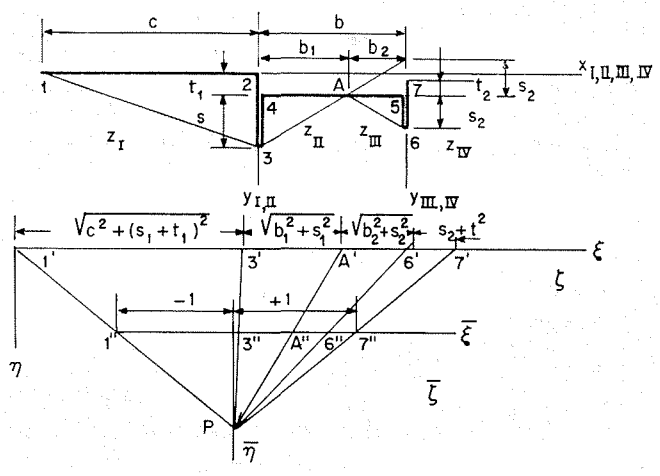
La nouvelle méthode que nous venons d'exposer dans la section précédente s'applique aux barrages avec base située à une certaine profondeur au-dessous de la surface du sol, avec la même exactitude qu'aux barrages situés à la surface, si la distance entre les rideaux étanches est égale ou dépasse la somme des longueurs de ces rideaux, situations généralement rencontrées dans la pratique. Dans le cas contraire, d'autres méthodes, plus laborieuses, doivent être envisagées.

Le calcul des sous-pressions sera expliqué par un exemple (fig. 4), celui d'un barrage à deux rideaux étanches; mais les mêmes procédés s'appliquent aux ouvrages à plusieurs rideaux.

Le point A, qui partage la ligne du contour souterrain en deux parties, divise la ligne de 4 à 5 proportionnellement aux longueurs s_1 et s_2, comme dans le calcul des barrages situés à la surface. Grâce à la profondeur t, la ligne 1-2-3-4-A représente la base d'un barrage qui n'est pas symétrique, donc la transformation par la fonction ζ (17) n'est pas

Tableau I

Notation	Désignation des points situés dans le plan z (fig. 3)										
	1	2	3	A_1	4	5	6	A_2	7	8	9
x	— 15,0	— 15,0	— 15,0	— 10,0	— 0,0	0	+ 0,0	6,7	10,0	10,0	10,0
y	0	2,5	0	0	0	5,0	0	0	0	2,5	0
ξ	0	2,50	5,00	8,10	14,30	19,25	24,25	27,65	29,30	31,80	34,30
$\overline{\xi}$	— 1,000	— 0,854	— 0,708	— 0,528	— 0,166	0,122	0,414	0,612	0,708	0,854	1,000
$\overline{h}$	1,000	0,826	0,750	0,677	0,553	0,461	0,364	0,290	0,253	0,174	0,000
$\overline{h}_t$	1,000	0,826	0,750	—	0,551	0,460	0,356	—	0,243	0,165	0,000



4/ Barrage situé au-dessous de la surface du sol.
A dam below ground surface level.

applicable. Cependant, des calculs de vérification par des méthodes plus précises ont démontré que la partie 1-2-3 du contour souterrain peut être considérée comme l'aile gauche d'un barrage symétrique, avec un rideau étanche de longueur $s = t_1 + s_1$ ainsi que la partie 3-4-A comme l'aile droite d'un autre avec un rideau de profondeur $s = s_1$. Les transformations par la fonction ζ (17) s'appliquent alors à chaque aile séparément et d'une façon analogue aux procédés déjà appliqués aux barrages situés à la surface du sol (fig. 3 et tabl. I). Les mêmes considérations sont valables pour la partie A-5-6 du barrage, ainsi que pour la partie 6-7. L'erreur dans le calcul de la sous-pression spécifique $\overline{h}$, pour l'exemple de la figure 4, avec les dimensions relatives :

$$s_1 + t_1 = 1;\ c = 3;\ b = 2;\ s_1 = 0{,}75;$$

$$s_2 = 0{,}50;\ t_1 = 0{,}25 \text{ et } t_2 = 0{,}20,$$

atteint environ 4 % au point 5; pour les autres points, l'erreur est inférieure à 2 %. Donc le résultat est aussi satisfaisant que dans le calcul de barrages situés à la surface du sol.

Barrages avec contours souterrains arbitraires

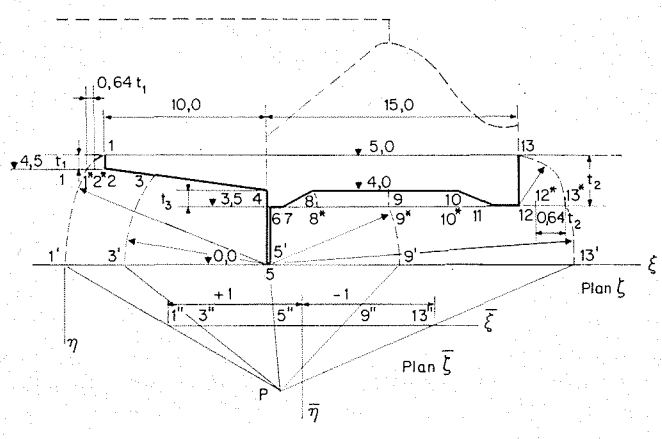
Les contours souterrains des configurations arbitraires qui forment la ligne de contact entre l'ouvrage de retenue et le sol peuvent être transformés en appliquant la même fonction ζ (7) pour *des parties* du contour et en amenant le profil entier à une droite dans le plan $\overline{\zeta}$, avec une exactitude largement suffisante pour le calcul des sous-pressions.

Un profil très courant de fondation d'un ouvrage de retenue est représenté dans la figure 5. Le niveau du sol se trouve à la cote 5,0 m. Nous remplaçons d'abord le contour de la fondation située à droite du rideau de palplanches (ligne 4-5) par un rectangle représentant une fondation d'épaisseur uniforme avec la base à la cote 3,5 m, en traçant une droite du point 7 au point 11.

Nous projetons ensuite le point 8 sur cette droite en traçant un arc de cercle avec un rayon égal à la distance 7-8 à partir du centre situé au point 7. De la même façon, nous projetons le point 10 sur la droite 7-11. Nous projetons ensuite les autres points situés sur la ligne 8-10 à gauche de son milieu marqué par le point 9, en traçant des arcs avec centre au point 7, et nous projetons ceux situés à droite du point 9 par des arcs de cercle avec le centre au point 11. Ainsi, nous obtenons un contour souterrain formé par la ligne 6-12-13. Le point 9 est descendu verticalement sur la même droite.

La partie de la fondation située à gauche du rideau de palplanches avec une base en pente représentée par la ligne 2-4, tenant compte de la faible inclinaison, ne sera pas projetée sur une droite horizontale, comme a été projetée la base de l'ouvrage située à droite du rideau de palplanches.

Le contour souterrain considéré dans ce stade de calcul est représenté par la ligne brisée telle que 1-2-4-5-6-12-13, les points 1 et 13 étant situés au niveau du sol (cote 5,0 m).



5/ Barrage avec un profil arbitraire.
A dam with an arbitrary cross-section.

La transformation conforme du plan z dans le plan ζ des extrémités de l'ouvrage, qui a une épaisseur non négligeable telle que 1-2 et 12-13, ne peut pas être effectuée pour obtenir une droite dans l'axe par la fonction ζ (7). Une autre fonction de la variable complexe doit être appliquée dans ce but. Cette fonction, que nous n'introduisons pas ici, fait déplacer les points situés sur la base de l'ouvrage aux environs des angles (tels que 2 ou 12) vers l'extérieur. Ce déplacement des points vers l'extérieur diminue rapidement quand on s'éloigne des angles vers le milieu. Donc, pour les buts pratiques, il suffit de ne tenir compte que du déplacement des points (comme 2 ou 12) situés dans les angles eux-mêmes. Nous projetons le point 13 sur le prolongement vers la droite de la ligne 6-12 en traçant un arc de cercle de rayon 12-13 à partir du centre situé au point 12; nous obtenons ainsi le point 13′. A gauche du point 13′ nous mesurons une distance égale à :

$$l = 0{,}64\ t \qquad (22)$$

et obtenons le point 12′ où t est l'épaisseur de la fondation égale à la distance entre points 12 et 13. Nous appliquons la même formule pour obtenir la position du point 2′.

Dans l'exemple (fig. 5), la distance 12-13 sera égale à :

$$l = 0{,}64\,(5{,}00 - 3{,}50) = 0{,}96 \text{ m}$$

Finalement, nous obtenons un contour de barrage tel que :

$$1^*\text{-}2^*\text{-}3\text{-}4\text{-}5\text{-}6\text{-}7\text{-}8^*\text{-}9^*\text{-}10^*\text{-}11\text{-}12^*\text{-}13^*$$

qui remplace et qui est équivalent à celui du barrage donné, et qui est situé dans le plan de la variable z.

Nous le transformons dans le plan ζ par la fonction (7) comme nous l'avons fait précédemment, par exemple suivant la figure 4, et ensuite dans le plan $\overline{\zeta}$ à l'aide de la fonction (13). Les constructions graphiques correspondantes sont montrées dans la figure 5.

Dans le tableau II sont inscrites les valeurs des abscisses $\overline{\xi}$ qui correspondent aux points du contour transformé dans le plan ζ, ainsi que les valeurs de sous-pression spécifique.

A titre d'exemple, nous calculerons la valeur de la sous-pression agissant au point 9 situé à 7,5 m à droite du rideau de palplanches qui ont une profondeur de 3,5 au-dessous de la projection de ce point sur l'horizontale 7-11.

D'après (7) :

$$\zeta = \xi = \sqrt{(7{,}5)^2 + (3{,}5)^2} = 8{,}29 \text{ m}$$

La distance de 1′ à 5′ sur l'axe ξ d'après la même formule :

$$\xi = \sqrt{(10{,}5)^2 + (4{,}5)^2} = 11{,}43 \text{ m}$$

L'ordonnée du point 9′, en tenant compte que l'origine des coordonnées du plan ζ se trouve au point 1, est :

$$\xi_9 = 8{,}29 + 11{,}43 = 19{,}72 \text{ m}$$

La distance de 5 à 13′ sur l'axe ξ :

$$\xi = \sqrt{(16{,}5)^2 + (3{,}5)^2} = 16{,}89 \text{ m}$$

L'ordonnée du point 13′ dans le plan ζ :

$$\xi_{13} = 11{,}43 + 16{,}89 = 28{,}32 \text{ m}$$

L'ordonnée du point 9′ dans le plan $\overline{\zeta}$ suivant (13) :

$$\zeta_9 = \xi_9 = \frac{2\,(19{,}72 - 28{,}32)}{28{,}32 - 0} + 1 = 0{,}392$$

La sous-pression spécifique d'après (14) sera :

$$\overline{h}_9 = \frac{1}{\pi} \arccos\,(0{,}392) = 0{,}372$$

Les valeurs de $\overline{\xi}_9$ et de $\overline{h}_9$ figurent dans la colonne 9 du tableau II.

Dans la troisième ligne du même tableau sont inscrites les valeurs de $\overline{h}_t$, de sous-pressions spécifiques théoriques, calculées rigoureusement avec trois décimales, suivant la méthode des transformations successives. La comparaison des valeurs $\overline{h}$ des sous-pressions calculées d'après la méthode approchée, avec celle de h_t des sous-pressions théoriques exactes, démontre que la plus grande différence entre les valeurs correspondantes s'observe au point 10, où elle est de 3,7 %; en tous les autres points, elle est au-dessous de 3 % et aux points 2, 3 et de 5 à 9, elle est au-dessous de 1 %; elle n'atteint 1 % qu'au point 7; donc l'exactitude est parfaite et dépasse celle généralement nécessaire dans les calculs du génie civil.

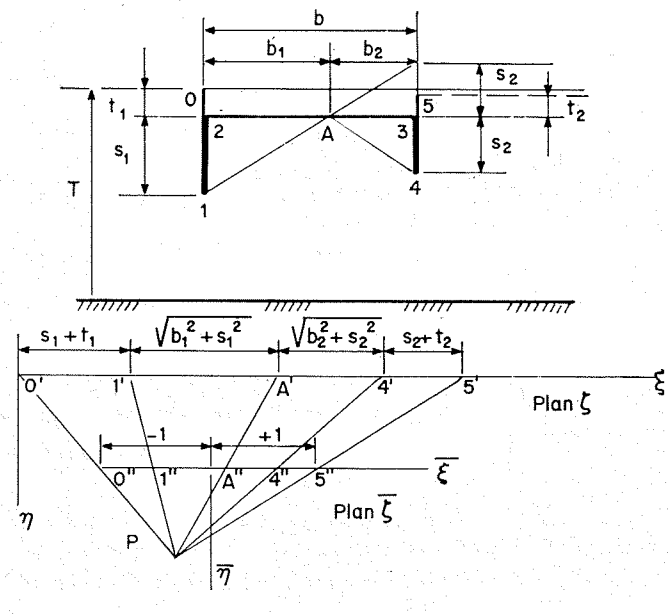
Barrages situés sur des couches perméables de profondeurs limitées

Les méthodes de calcul des sous-pressions agissant sous les ouvrages de retenue — situés sur des couches perméables de grandes profondeurs, et considérées en vue des calculs comme étant infiniment profondes — sont applicables, avec quelques modifications qui tiennent compte de l'épaisseur des couches perméables, aux ouvrages reposant sur des couches à profondeurs réduites.

Nous traiterons, à titre d'exemple, une fondation d'ouvrage avec deux rideaux de palplanches (étanches), de longueurs s_1 et s_2 (fig. 6), dont les dimensions en termes relatifs sont les suivantes :

$$b = 2{,}00;\ t_1 = 0{,}25;\ s_1 = 0{,}75;$$

$$t_2 = 0{,}20;\ s_2 = 0{,}50,\ \text{T} = \text{soit } \infty,\ \text{soit } 2{,}00$$



6/ Barrages situés sur une couche perméable de profondeur limitée.
Dams on a pervious layer of limited depth.

La transformation du contour souterrain de 0 à 5 dans les plans ζ et $\overline{\zeta}$ s'effectue, comme il est montré dans la figure 6, successivement d'après les méthodes déjà exposées. Puisque nous transformons dans le

Tableau II

Notation	Désignation des points situés dans le plan z (fig. 5)												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\overline{\xi}$	— 1,000	— 0,979	— 0,653	— 0,472	— 0,193	0,053	0,057	0,081	0,392	0,782	0,863	0,932	1,000
$\overline{h}$	1,000	0,935	0,726	0,657	0,562	0,483	0,482	0,474	0,372	0,214	0,169	0,118	0,000
$\overline{h}_t$	1,000	0,935	0,730	0,665	0,566	0,479	0,477	0,471	0,373	0,222	0,173	0,120	0,000

plan $\overline{\zeta}$ non seulement le contour souterrain de l'ouvrage, mais en principe tout le champ z de l'écoulement, nous devons transformer aussi, dans le même plan, en appliquant les fonctions ζ (7) et $\overline{\zeta}$ (13), la ligne de roches imperméables qui sert de lit à la couche perméable.

En admettant que la ligne de la roche est horizontale (en cas de forte inclinaison de la surface des roches, d'autres méthodes doivent être appliquées), son équation dans le plan z est :

$$y = \mathrm{T} \tag{23}$$

Nous transformons cette droite à l'aide de la fonction ζ (7) dans le plan ζ, où elle devient une courbe s'approchant, en s'éloignant du rideau étanche, asymétriquement d'une droite horizontale :

$$\eta = \mathrm{T} \tag{24}$$

La courbe est d'autant plus faible que la profondeur T est grande. Il est légitime, pour des buts pratiques, d'introduire une approximation en remplaçant cette courbe par une droite, laquelle, dans le plan $\overline{\zeta}$, sera exprimée par l'équation :

$$\overline{\eta} = \overline{\mathrm{T}} \tag{25}$$

La transformation de $\eta = \mathrm{T}$ du plan ζ en $\overline{\eta} = \overline{\mathrm{T}}$ dans le plan $\overline{\zeta}$ s'effectue par la formule :

$$\overline{\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{T} + \sqrt{\mathrm{T}^2 - s_m{}^2}}{\lambda} \tag{26}$$

où s_m est la plus grande distance verticale de la fondation $s_m = t_1 + s_1$ (fig. 6) et $\lambda = \xi_0 - \xi_5$ pour le même exemple. λ représente la longueur du contour souterrain transformé dans le plan ζ. La formule (26) assure une exactitude suffisante, comme on le verra d'après un exemple numérique, jusqu'à des valeurs $\mathrm{T} \geqslant 2\, s_m$. Dans des situations assez rares — quand les palplanches traversent plus de la moitié de la couche perméable, mais n'arrivent pas à la surface des roches et laissent un passage libre aux écoulements entre l'extrémité inférieure du rideau et le lit imperméable —, d'autres méthodes de calcul, par exemple de transformations conformes successives, doivent être appliquées.

Nous montrons dans le tableau III, première ligne, les valeurs calculées de la fonction $\overline{\xi}$ comme nous l'avons fait dans d'autres exemples. En seconde ligne, pour des buts de comparaison, nous calculons les sous-pressions spécifiques $\overline{h}$, en supposant que la couche perméable est infiniment profonde, comme auparavant d'après la formule (14).

En troisième ligne, nous calculons les sous-pressions $\overline{h}$, en tenant compte que la profondeur de la couche perméable est :

$$\mathrm{T} = b = 2{,}00$$

La solution analytique pour l'écoulement sous un barrage plat (avec base reposant sur la surface) dans une couche perméable d'épaisseur limitée, demande des transformations conformes (ouvrages 5 et 11) autres que celle que nous avions utilisée pour expliquer la solution pour un écoulement dans le sol perméable à profondeur infinie. En particulier, il est nécessaire, dans une des étapes du développement de la théorie, de transformer la partie positive du champ de la variable complexe dans un rectangle. On sait que cette transformation conforme se réalise par l'application de l'intégrale elliptique du premier genre :

$$\mathrm{F}(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} \tag{27}$$

où α, l'amplitude, se détermine avec nos notations d'après la formule :

$$\sin \alpha = \frac{1}{k} \operatorname{th} \frac{\pi \overline{\xi}}{2\,\overline{\mathrm{T}}} \tag{28}$$

où k, le module, est égal à :

$$k = \operatorname{th} \frac{\pi}{2\,\overline{\mathrm{T}}} \tag{29}$$

les valeurs de $\overline{\xi}$ et $\overline{\mathrm{T}}$ étant connues d'après les calculs précédents.

Pour formuler l'expression que nous cherchons, pour les sous-pressions spécifiques $\overline{h}$ agissant sous l'ouvrage à base plate, situé sur la surface d'une couche perméable de profondeur limitée, il nous faut encore calculer l'intégrale elliptique *complète* du premier genre :

$$\mathrm{K} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} \tag{30}$$

Avec les formules (21) à (30), l'expression analytique exacte pour la sous-pression spécifique agissant sous le barrage sera :

$$\overline{h} = \frac{\mathrm{K} - \mathrm{F}(\alpha)}{2\,\mathrm{K}} \tag{31}$$

TABLEAU III

NOTATION	DÉSIGNATION DES POINTS SITUÉS DANS LE PLAN z (fig. 6)					
	1	2	B	3	4	Note
$\overline{\xi}$	— 0,507	— 0,138	— 0,062	0,409	0,655	pour $T = \infty$
$\overline{h}$	0,669	0,544	0,520	0,366	0,273	»
$\overline{h}$	0,690	0,551	0,523	0,348	0,249	pour $T = b = 2$
$\overline{h}_t$	0,696	0,544	—	0,341	0,237	»

Après que la valeur de T transformée dans le plan $\overline{\zeta}$, où cette valeur devient $\overline{T}$, est déterminée (26), la sous-pression spécifique, $\overline{h}$, se calcule très rapidement (31) à l'aide des tableaux des intégrales elliptiques du premier genre, qui sert à déterminer F (α) (27) et K (30) en fonction de α et k, qui eux-mêmes se calculent d'après (28) et (29) à l'aide des tableaux contenant les tangentes hyperboliques.

Nous déterminerons, à titre d'exemple, la sous-pression spécifique au point 3 (fig. 6) qui figure dans le tableau III.

La plus grande distance verticale dans le contour du barrage est :

$$s_m = s_1 + t_1 \qquad \text{ou} \quad s_m = 1{,}0$$

La longueur transformée du contour est :

$$\lambda = \xi_5 = 4{,}06$$

en même unité que celle du plan z.

La profondeur de la couche perméable transformée dans le plan $\overline{\zeta}$ sera (26) :

$$\overline{T} = \frac{2 + \sqrt{(2)^2 - 1}}{4{,}06} = 0{,}92$$

Le module k sera (29) :

$$k = \text{th}\,\frac{3{,}14}{2 \times 0{,}92} = 0{,}936$$

L'amplitude α sera (28) :

$$\alpha = \text{arc sin}\,\frac{1}{k}\,\text{th}\,\frac{3{,}14 \times 0{,}409}{2 \times 0{,}92} = 40{,}2°$$

D'après α et k, l'intégrale (27) suivant les tableaux est :

$$F(\alpha) = 0{,}757$$

et l'intégrale (30) suivant les tableaux est :

$$K = 2{,}48$$

En introduisant les valeurs des intégrales elliptiques (27 et 30) dans la formule (31), nous obtenons :

$$\overline{h} = \frac{2{,}48 - 0{,}757}{2 \times 2{,}48} = 3{,}48$$

Cette valeur figure en troisième ligne, colonne 3 du tableau III. La comparaison des sous-pressions exercées sur le fond du barrage situé sur une couche de profondeur limitée ($T = b = 2$, ligne 3), avec celles qui agissent sur un barrage reposant sur une couche perméable infiniment profonde ($T = \infty$, ligne 2), démontre que l'influence des roches assises, même assez approchées de la surface, se manifeste relativement peu sur la distribution des sous-pressions. En réalité, la plus grande différence n'est que de 10 % environ.

L'exactitude de la méthode se vérifie en comparant les sous-pressions $\overline{h}$ calculées dans l'exemple, avec celles déterminées par une méthode qui donne les valeurs théoriques rigoureuses (dernière ligne du tableau) $\overline{h}_t$. La plus grande différence entre les valeurs en comparaison se manifeste au point 4 où elle s'approche de 5 %. En tous les autres points, elle est égale ou elle est inférieure à 2 %, exactitude très suffisante pour les études de barrages.

Conclusion

Les méthodes exposées permettent d'effectuer les calculs de sous-pressions agissant au-dessous des barrages et d'autres constructions hydrauliques les plus diverses, avec une exactitude de 2 à 3 %, et généralement même plus grande, sauf dans les calculs se rapportant aux points particuliers situés dans les angles rentrants constitués par la base et le *dernier* rideau de palplanches, tels que les points 7 (fig. 3) ou 5 (fig. 4), et seulement à condition que l'ouvrage soit assez long; dans les cas cités, l'exactitude descend à 4 % et 4,1 % respectivement; elle peut diminuer cependant à ces points particuliers jusqu'à environ 6 % dans des ouvrages munis de plus de trois rideaux de palplanches, cas d'ailleurs exceptionnel dans la pratique. Au point inférieur du dernier rideau étanche, situé à l'aval de l'ouvrage (point 8, fig. 3, par exemple), l'exactitude des calculs de la sous-pression est du même ordre qu'aux points tels que 7 et 5 déjà cités; elle est de 5,2 % au point 8 (fig. 3). Donc, en toutes circonstances, dans la pratique courante, les erreurs atteignent environ 5 %, et cela seulement en des points particuliers; par conséquent, l'exactitude des calculs est suffisante, même en ces points, et elle est très grande dans tous les autres, s'approchant à 2-3 % des résultats des calculs par les méthodes analytiques rigoureuses, chiffres déjà mentionnés.

Un autre avantage des méthodes exposées est leur simplicité. Elles permettent, en ne se servant que de la règle à calcul et des tableaux de fonctions hyperboliques ainsi que de ceux des intégrales elliptiques généralement disponibles, de calculer les sous-pressions en n'importe quel nombre de points situés sur le contour souterrain des ouvrages de retenue et elles permettent donc de construire ensuite le diagramme total de la sous-pression. Le procédé graphique appliqué à une échelle suffisamment grande permet d'effectuer les calculs encore plus rapidement et avec la même exactitude qu'à la règle. Son application est particulièrement avantageuse dans les études comparées des différentes solutions possibles de la réalisation d'ouvrages,

quand un grand nombre de calculs est nécessaire. Le mérite relatif de différentes dispositions, de longueur et du nombre de rideaux étanches, ainsi que de longueur et de profondeur de l'ouvrage, ressort rapidement de l'étude par le procédé graphique.

Après que les sous-pressions ont été calculées en un nombre suffisant de points, le réseau de lignes équipotentielles et de lignes des écoulements peut être tracé en utilisant les valeurs connues des sous-pressions aux points situés sur le contour souterrain du barrage; cependant, le tracé d'un tel réseau n'est plus impératif, puisque son but principal est la détermination de la sous-pression. Le réseau peut être nécessaire, toutefois, pour déterminer les débits d'écoulements sous les barrages, ainsi que pour déterminer les vitesses en certains points. Les vitesses de sortie à l'aval de l'ouvrage, qui doivent surtout être connues, peuvent être cependant déterminées sans avoir recours au réseau, en calculant les gradients de sous-pression au voisinage de la sortie, aux points extrêmes en aval de l'ouvrage, puisque les sous-pressions elles-mêmes sont connues.

Les méthodes exposées sont applicables aux cas des terrains anisotropes, tels que ceux ayant les propriétés de filtration (exprimée par le coefficient de Darcy) différentes en direction horizontale et verticale. Le contour souterrain doit être transformé au préalable suivant les deux valeurs du coefficient de Darcy, comme il est par exemple expliqué dans l'ouvrage [13]. En cas de couches perméables fortement stratifiées et irrégulières, comme sont par exemple les dépôts morainiques, les méthodes analytiques rigoureuses ou approchées ne sont plus applicables et les sous-pressions ne peuvent être déterminées qu'à l'aide de l'analogie électro-hydrodynamique utilisée déjà par Pavlovskii en 1922 [5].

Les solutions analytiques rigoureuses qui forment la base des méthodes exposées sont dues au même auteur et datent de la même époque [5], en particulier la solution du problème de l'écoulement de filtration sous un barrage reposant sur des couches perméables de profondeur infinie et muni d'un rideau étanche asymétrique, ainsi que la solution du même problème en présence de roches imperméables au-dessous de la couche perméable.

Les nouvelles méthodes, que nous exposons en commençant, avec le sous-titre « Transformations conformes par procédés graphiques » appartiennent entièrement à Fil'chakov [12], dont le grand mérite a été, en introduisant des approximations, d'adopter les méthodes analytiques rigoureuses pour les études des sous-pressions dans les situations les plus diverses, et d'avoir vérifié l'exactitude des calculs exécutés suivant ces méthodes avec ceux résultant des solutions exactes. Nous nous sommes servis de son ouvrage en deux volumes pour exposer l'essentiel des méthodes et pour offrir aux lecteurs le moyen de pouvoir faire les calculs, pour les situations variées rencontrées dans les études des ouvrages hydrauliques de retenues, par ces méthodes nouvelles. Pour faire comprendre les méthodes, nous avons dû avoir recours aux exemples de l'ouvrage cité [12], en augmentant les détails numériques et en faisant appel à l'usage de tableaux de fonctions généralement disponibles, au lieu de faire référence aux tableaux spéciaux non accessibles, indiqués par l'auteur, ou à certains nomogrammes, qui ne sont pas essentiels pour appliquer les méthodes.

Bibliographie sommaire

[1] Florin (A. V.). — Osnovy mekhaniki gruntov (Fondements de la mécanique des sols), t. 1, 2. *Gosizdat,* Moskva, 1961.

[2] Terzaghi (K.) and Frölich (O. K.). — Theory der Setzung von Tonschichten. *F. Deuticke,* Vienna, 1936. (Théorie des tassements des couches argileuses, *Dunod,* Paris, 1939.)

[3] Forchheimer (P.). — Über die Ergiebigkeit von Brunnenanlagen und Sickerschlitzen. *Zeit. des Architekten u. Ingenieur-Vereins zu Hannover,* Bd. 32, S. 539-564, 1886.

[4] Boussinesq (J.). — Equations générales du mouvement des nappes d'eau infiltrées dans le sol. *Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences,* vol. 139, p. 387-391, 1904, et autres ouvrages.

[5] Pavlovskii (N. N.). — Teoriia dvizheniia gruntovykh vod pod gidrotekhnicheskimi sooruzheniiami i ee osnovnye prilozheniaia (Théorie des écoulements de filtration au-dessous des constructions hydrauliques et ses applications fondamentales), 752 p., St. Petersburg. 1922.

[6] Polubarinova-Kochina (P. Ia.). — Teoriia dvizheniia gruntovykh vod (Théorie des écoulements de filtration), 676 p., Moskva, 1952.

[7] Dachler (R.). — Grundwasserströmung. *Verlag Julius Springer,* Wien, 1936.

[8] Rosbach (H. F.). — Über Grundwasserströmungen. *Ingenieur-Archiv,* Bd. 7, S. 41-51, S. 342-351.

[9] Muskat (M.). — The flow of homogeneous fluids through porous media. *McGraw Hill,* N. Y. and London, 1937.

[10] Browzin (B. S.). — Nichtstationäre Sickenströmungen in homogenen Erddämmen und Erdkörpen, 239 p. *T.H.*. Aachen, 1961.

[11] Pavlovskii (N. N.). — Sobranie sochinenii (Collection d'œuvres), 351 p., *AN,* S.S.S.R., 1956.

[12] Fil'chakov (P. F.). — Teoriia fil'tratzii pod gidrotekhnicheskimi sooruzheniiami (Théorie des écoulements de filtration au-dessous des constructions hydrauliques), 2 vol. 564 p., tomes 1 et 2, *AN,* S.S.S.R., Kiev, 1960.

[13] Taylor (D. W.). — Fondamentals of Soil Mechanics. *John Willey and Sons,* N.Y., 1960.

Boris S. BROWZIN

Abstract

A new method for the application of a few complex variable functions to the calculation of uplift affecting dam structures

by B. S. Browzin *

The integral of Schwarz and Christoffel is used to find the complex variable function which transforms the positive half plane into a polygon with one point located in the infinity. The polygon represents the field of flow under a dam with one non-symmetrical cutoff built on an infinitely deep layer of pervious soil. The half plane represents a field of flow in similar conditions but without cutoff. By regrouping the members of the transforming function, the polygon can be transformed into a half plane with the dam located non-symmetrically about the origin of coordinates. A second transformation brings it to a symmetrical position.

Since the solution for a symmetrical dam without cutoff is known, this solution can be used for the case of flow under a dam with cutoff by calculating conjugated points by use of the transforming formula. This method is due to Pavlovskii and is exposed in his treaty of 1922 (5, 11). The two transformations, the first, from the cutoff case to a non-symmetrical dam and the second, to a similar symmetrical dam can easily be made for the bottom line of the dam by calculation as well as by a simple graphical procedure.

The new application of Pavlovskii method, which is due to Fil'chakov, consists of the use of the transforming function, derived for a simple cutoff case, for the analysis of multi-cutoff dams and of dams with the base located below the ground line, i.e., of dams with any arbitrary shape of the underground profile including an impervious layer located at a given depth. The underground profile is first divided into several sections, each containing one cutoff and a common point with adjacent sections. The conform transformation of each section is made separately. Special nomographs may be used. However, the writer found it more practical to use the commonly available tables of hyperbolic functions and that of elliptical integrals, which he illustrates by numerical examples.

The accuracy of the new method in calculating the uplift acting in particular points of the dam foundation profile is in general greater than 2 to 3 per cent; only in single points, for example, in re-entrant angles it decreases to 5 per cent, but the accuracy in calculating the total up lift must be estimated as insuring an accuracy of a least 3 per cent.

The numerical values of the uplift calculated in various points of the dam can serve as departing points for the construction of the flow net. However, the flow net is of relatively minor interest when the uplift is already calculated.

The gradient of escaping velocities can also be determined from the calculations provided by the method.

---

* Professor at the Catholic University of America, Washington, D.C.