ABAQUES POUR LE CALCUL DU RESSAUT CLASSIQUE DANS UN CANAL HORIZONTAL DE TOUTES FORMES

Application à des cas particuliers

PAR L. LEVIN * ET J. SICARD **

I. — Notations employées

S = impulsion de la veine pour une section donnée;

Q = débit du canal;

σ = surface de la section du canal;

h = hauteur d'eau dans le canal;

$$\mathcal{F}_c = \frac{Q^2}{g\sigma_c{}^2 h_c} = \frac{\sigma_c}{h_c\,(\partial\sigma/\partial h)_c}$$ = facteur cinétique ou nombre de Reech-Froude à l'état critique;

$$\theta = \frac{\sigma}{\sigma_c}$$ = facteur de remplissage;

$$\Phi = \int_0^h \frac{\sigma}{\sigma_c}\frac{dh}{h_c}$$ = facteur d'inertie de la section;

p = paramètre de la parabole pour profils parabolique et biparabolique;

α_1, α_2 = pente des berges dans les profils triangulaire et trapézoïdal;

$$m = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2}{2};$$

B = largeur au fond pour les profils rectangulaire et trapézoïdal;

$$a = \frac{Bh}{m}$$ pour le profil trapézoïdal.

* Chef du Département Recherches de la Sté B.V.S. - Chargé de Cours à l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne.
** De l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne.

INDICES

$_c$ caractérise l'écoulement critique;
$_{\mathrm{I}}$ caractérise la section en amont du ressaut;
$_{\mathrm{II}}$ caractérise la section en aval du ressaut.

II. — Rappel de l'équation du ressaut

Le fond du canal étant horizontal et si l'on néglige les frottements dus à la rugosité, l'équation du ressaut s'écrit :

$$S_{II} - S_I = 0$$

En négligeant les coefficients correctifs dus à la répartition non uniforme de la vitesse et à la courbure des filets dans une section, on a :

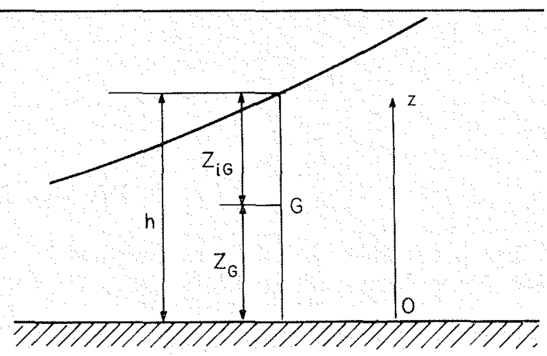
$$S = \frac{Q^2}{g\sigma} + \sigma Z_{iG}$$

σ = surface de la section;

Z_{iG} = hauteur d'eau au-dessus du centre de gravité de la section.

D'après la figure 1 on a :

$$Z_{iG} = h - Z_G$$



1/

La définition du centre de gravité donne :

$$Z_G = \frac{1}{\sigma} \int_0^h z d\sigma = \frac{1}{\sigma} \left[h\sigma - \int_0^h \sigma dh \right]$$

d'où :

$$S = \frac{Q^2}{g\sigma} + \int_0^h \sigma dh$$

l'équation du ressaut s'écrit alors :

$$\frac{Q^2}{g} \frac{1}{\sigma_{II}} + \int_0^{h_{II}} \sigma dh = \frac{Q^2}{g} \frac{1}{\sigma_I} + \int_0^{h_I} \sigma dh \quad (1)$$

III. — Equation homogène

En divisant (1) par $h_c \times \sigma_c$, h_c et σ_c étant la hauteur d'eau et la surface de la section pour l'écoulement critique, on obtient :

$$\frac{Q^2}{g\sigma_c{}^2 h_c} \frac{\sigma_c}{\sigma_{II}} + \int_0^{h_{II}} \frac{\sigma}{\sigma_c} \frac{dh}{h_c} = \frac{Q^2}{g\sigma_c{}^2 h_c} \frac{\sigma_c}{\sigma_I} + \int_0^{h_I} \frac{\sigma}{\sigma_c} \frac{dh}{h_c}$$

Soit, en posant :

$$\mathcal{F}_c = \frac{Q^2}{g\sigma_c{}^2 h_c}\,; \qquad \theta = \frac{\sigma}{\sigma_c}, \qquad \Phi = \int_0^h \frac{\sigma}{\sigma_c} \frac{dh}{h_c}$$

$$\frac{\mathcal{F}_c}{\theta_I} + \Phi_I = \frac{\mathcal{F}_c}{\theta_{II}} + \Phi_{II}$$

ce qui s'écrit sous la forme de déterminant :

$$\begin{vmatrix} 0 & \mathcal{F}_c & 1 \\ \theta_I & -(\theta_I . \Phi_I) & 1 \\ \theta_{II} & -(\theta_{II} . \Phi_{II}) & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

C'est l'équation homogène d'une droite (D). Elle passe par les points :

$$x_{F_c} = 0 \qquad y_{F_c} = \mathcal{F}_c$$

et

$$x_r = \theta\,(r) \qquad y_r = -\,\theta\,(r)\,\Phi\,(r)$$

en posant :

$$r = \frac{h}{h_c}$$

Les facteurs $\mathcal{F}_c$, θ, Φ sont sans dimensions.

La hauteur critique étant définie par $(\partial S/\partial h) = 0$, en éliminant Q^2/g entre $\mathcal{F}_c$ et $\partial S/\partial h$, on obtient :

$$\mathcal{F}_c = \frac{\sigma_c}{h_c\,(\partial\sigma/\partial h)_c}$$

IV. — Abaque

Les propriétés ci-dessus permettent la construction d'un abaque d'emploi facile.

La courbe (C) d'équation $(x_r\,y_r)$ étant tracée et graduée en fonction de r, l'intersection de (D) avec (C) donne un couple de valeurs r_I et r_{II}, solution de l'équation (2) pour l'écoulement défini par $\mathcal{F}_c$; la droite (D) étant issue du point $(0, \mathcal{F}_c)$.

REMARQUE :

Une transformation affine de la forme :

$$x' = kx \qquad y' = py + lx$$

k, l et p étant des constantes,
ne modifie pas les propriétés ci-dessus et permet d'avoir un abaque d'un emploi plus commode.

V. — Application aux différentes formes de canaux

1. PROFIL RECTANGULAIRE (fig. 2) :

On a $\sigma = Bh$ d'où :

$$\mathcal{F}_c = 1 \qquad x_r = r \qquad y_r = -\frac{1}{2} r^2$$

2. PROFIL PARABOLIQUE (fig. 3) :

Si p est le paramètre de la parabole, on a :

$$y^2 = 2\,pz$$

soit :

$$\sigma = \frac{4}{3} \sqrt{2\,p}\; h^{3/2}$$

d'où :

$$\mathcal{F}_c = \frac{2}{3} \qquad x_r = r^{3/2} \qquad y_r = -\frac{2}{5} r^4$$

3. PROFIL TRIANGULAIRE (fig. 4) :

On a :

$$\sigma = mh^2 \qquad \text{avec } m = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2}{2}$$

d'où :

$$\mathcal{F}_c = \frac{1}{2} \qquad x_r = r^2 \qquad y_r = -\frac{1}{2} r^5$$

4. PROFIL BIPARABOLIQUE (fig. 5) :

Si p est le paramètre de la parabole, on a :

$$z^2 = 2\,py$$

soit :

$$\sigma = \frac{1}{3\,p} h^3$$

d'où :

$$\mathcal{F}_c = \frac{1}{3} \qquad x_r = r^3 \qquad y_r = -\frac{1}{4} r^7$$

5. PROFIL TRAPÉZOÏDAL (fig. 6) :

En posant :

$$m = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2}{2}$$

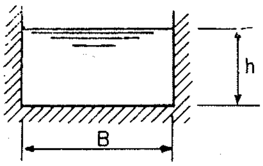
on a :

$$\sigma = Bh + mh^2 \qquad \text{avec } a = \frac{B}{mh_c}$$

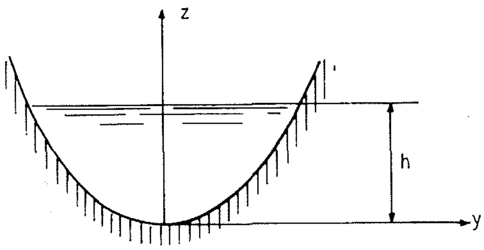
on a :

$$\mathcal{F}_c = \frac{a+1}{a+2}\,; \qquad x_r = \frac{ar + r^2}{a+1}\,;$$

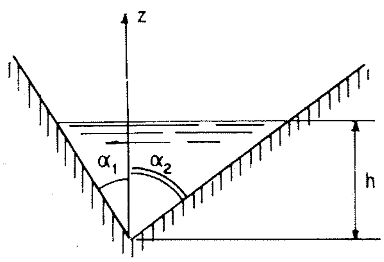
$$y_r = -\,\frac{r^3\,(a+r)\,(3\,a + 2\,r)}{b\,(a+1)^2}$$



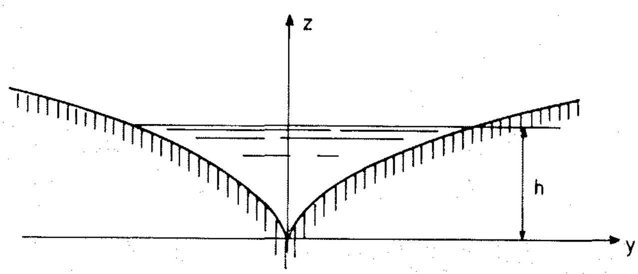
2/



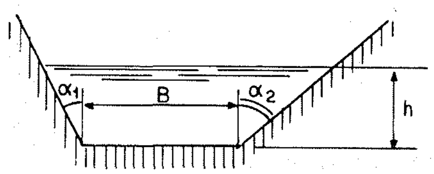
3/



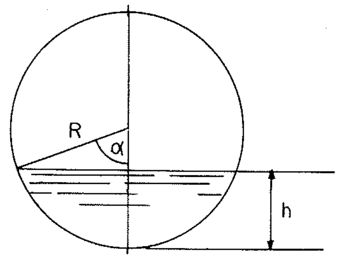
4/



5/



6/



7/

6. Profil circulaire (fig. 7) :

Deux cas peuvent se produire : amont et aval à ciel ouvert ou amont à ciel ouvert et aval en charge.

a) *Amont et aval à ciel ouvert :*

$$h = \mathrm{R}\,(1 - \cos\alpha) \qquad \sigma = \mathrm{R}^2\,(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)$$

on en déduit :

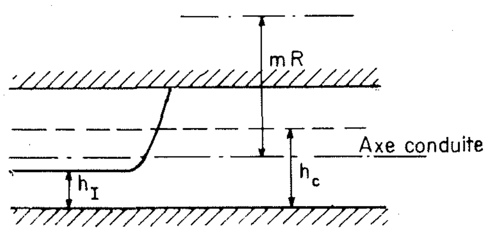
$$\mathcal{F}_c = \frac{\alpha_c - \sin\alpha_c\cos\alpha_c}{2\sin\alpha_c\,(1 - \cos\alpha_c)}$$

$$x_r = \frac{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{\alpha_c - \sin\alpha_c\cos\alpha_c}$$

$$y_r = -\frac{(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)[\sin\alpha - (\sin^3\alpha/3)\,\alpha - 2\cos\alpha]}{(\alpha_c - \sin\alpha_c\cos\alpha_c)^2\,(1 - \cos\alpha_c)}$$

L'angle α_c, correspondant au régime critique, est fonction du nombre $\mathrm{N} = (\mathrm{Q}^2/g\mathrm{R}^5)$.

b) *Aval en charge* (fig. 8) :



8/

A l'aval la quantité de mouvement de la veine est alors :

$$\mathrm{S} = \frac{\mathrm{Q}^2}{g\sigma_{\mathrm{II}}} + \sigma_{\mathrm{II}}\,p$$

avec :

$$\sigma_{\mathrm{II}} = \pi\mathrm{R}^2 \qquad p = m\mathrm{R}$$

m = nombre sans dimension.

D'où :

$$x_{r_{\mathrm{II}}} = \frac{\pi}{\alpha_c - \sin\alpha_c\cos\alpha_c}$$

$$y_{r_{\mathrm{II}}} = -\frac{m\pi^2}{(\alpha_c - \sin\alpha_c\cos\alpha_c)^2\,(1 - \cos\alpha_c)}$$

ce sont les équations de la courbe (c) pour $\alpha > \pi$.

VI. — Abaques

L'emploi des abaques est des plus simples : les hauteurs conjuguées r_{I} et r_{II} sont obtenues par intersection de la droite (D) issue du point $(0, \mathcal{F}_c)$ correspondant avec la courbe (C).

EXEMPLES :

1. Canal triangulaire (abaque n° 1); on a :

$$\mathcal{F}_c = (1/2).$$

Pour $r_{\mathrm{I}} = 0{,}54$, on a immédiatement $r_{\mathrm{II}} = 1{,}56$; d'où :

$$\frac{h_{\mathrm{II}}}{h_{\mathrm{I}}} = \frac{1{,}56}{0{,}54} = 2{,}9$$

2. Profil trapézoïdal (abaque n° 2); on a :

$$B = 2 \quad \mathrm{m}$$

$$m = 0{,}8 \quad \mathrm{m}$$

$$h_c = 1{,}25 \ \mathrm{m}$$

$$h_{\mathrm{II}} = 3 \quad \mathrm{m}$$

on trouve :

$$r_{\mathrm{II}} = \frac{h_{\mathrm{II}}}{h_c} = \frac{3}{1{,}25} = 2{,}4$$

$$a = \frac{B}{m h_c} = \frac{2}{0{,}8 \times 1{,}25} = 2$$

$$\mathcal{F}_c = \frac{a+1}{a+2} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

L'abaque n° 2 donne immédiatement : $r_1 = 0{,}3$:

$$h_{\mathrm{I}} = r_{\mathrm{I}} h_c = 0{,}3 \times 1{,}25 = 0{,}375 \ \mathrm{m}$$

3. Profil circulaire (voir abaques n^os 3, 4 et 5); on a :

$R = 1{,}85$ m $\qquad Q = 12{,}5\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s} \qquad \alpha_{\mathrm{I}} = 60^{\circ}$

Il nous faut maintenant déterminer deux grandeurs :

— le demi-angle au centre α_c de l'abaque n° 4;
— le facteur cinétique $\mathcal{F}_c$ de l'abaque n° 5.

On calcule pour cela :

$$N = \frac{Q^2}{g R^5} = \frac{12{,}5^2}{9{,}81 . 1{,}85^5} = 0{,}73$$

L'abaque n° 4 donne :

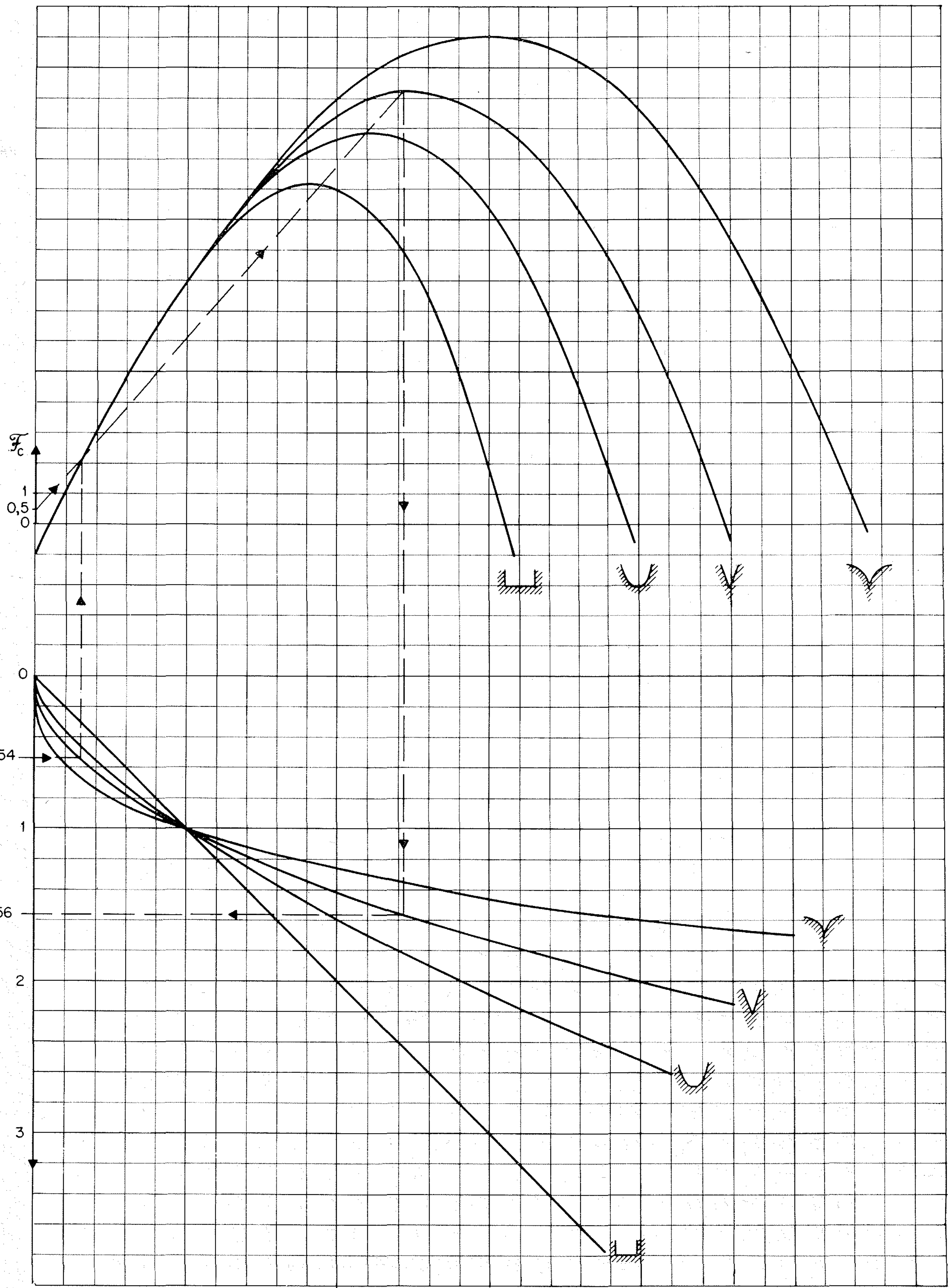
$$\alpha_c = 90^{\circ}$$

L'abaque n° 5 donne :

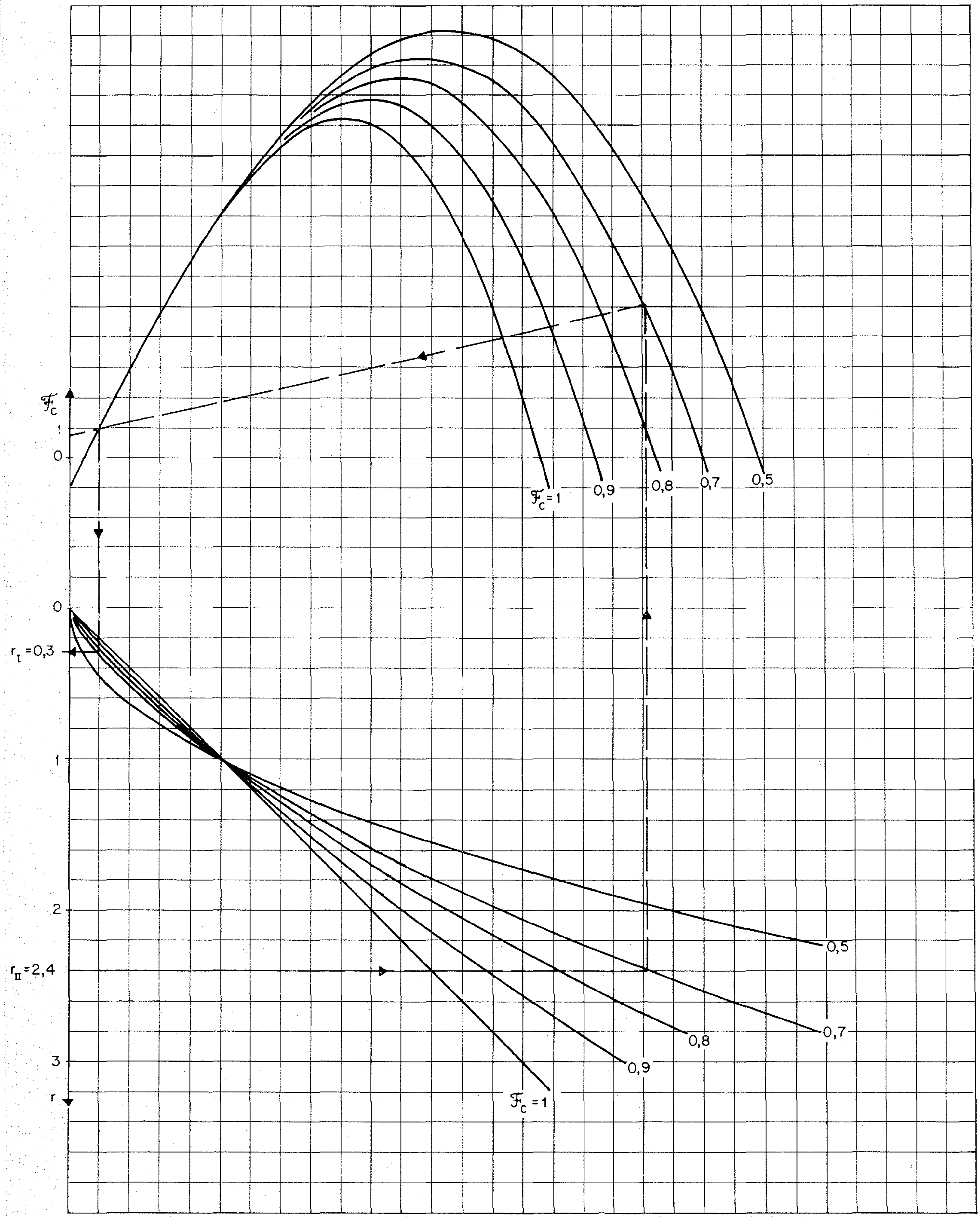
$$\mathcal{F}_c = 0{,}79$$

Avec ces deux valeurs, l'abaque n° 3 donne finalement (suivre les flèches) :

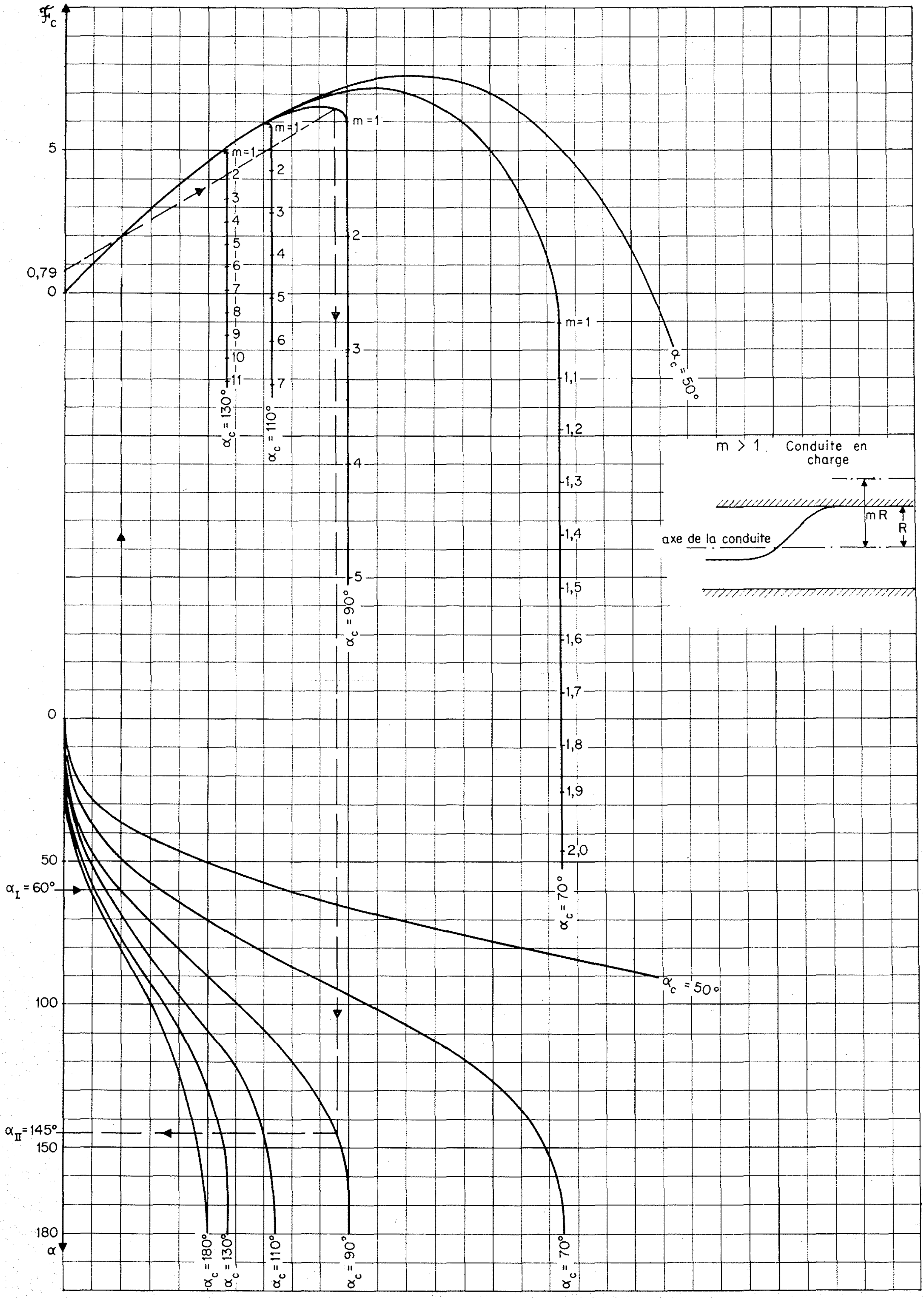
$$\alpha_{\mathrm{II}} = 145^{\circ}$$



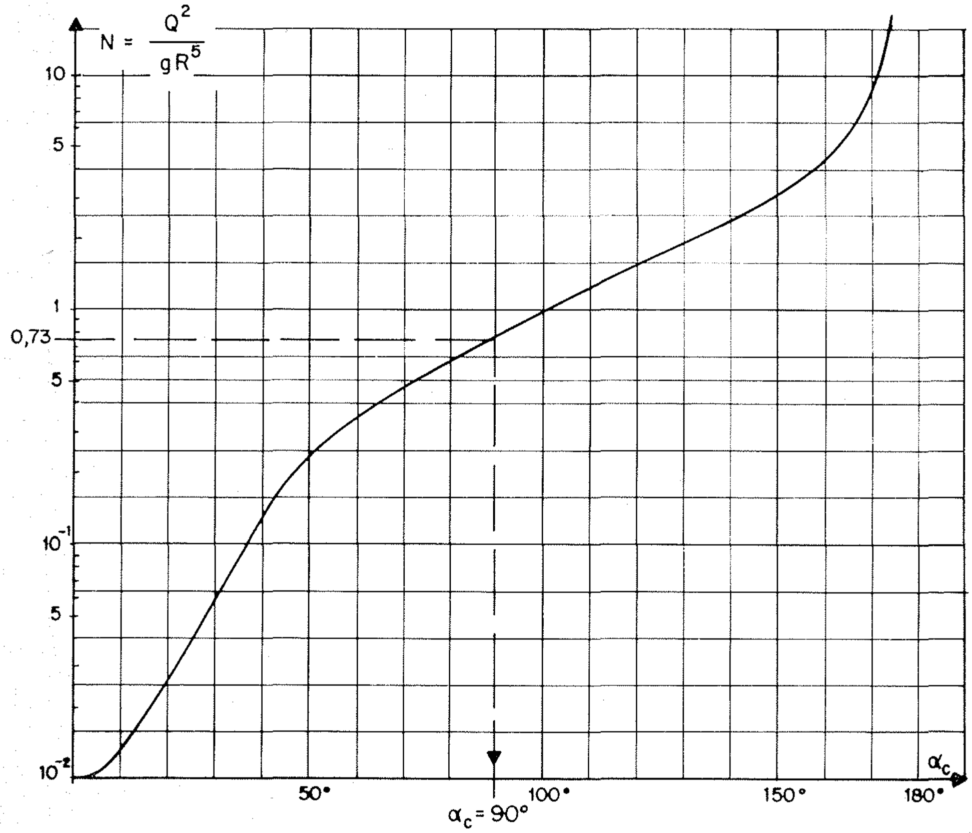
Abaque 1/ Profil « exponentiel ». *Exponential section.*



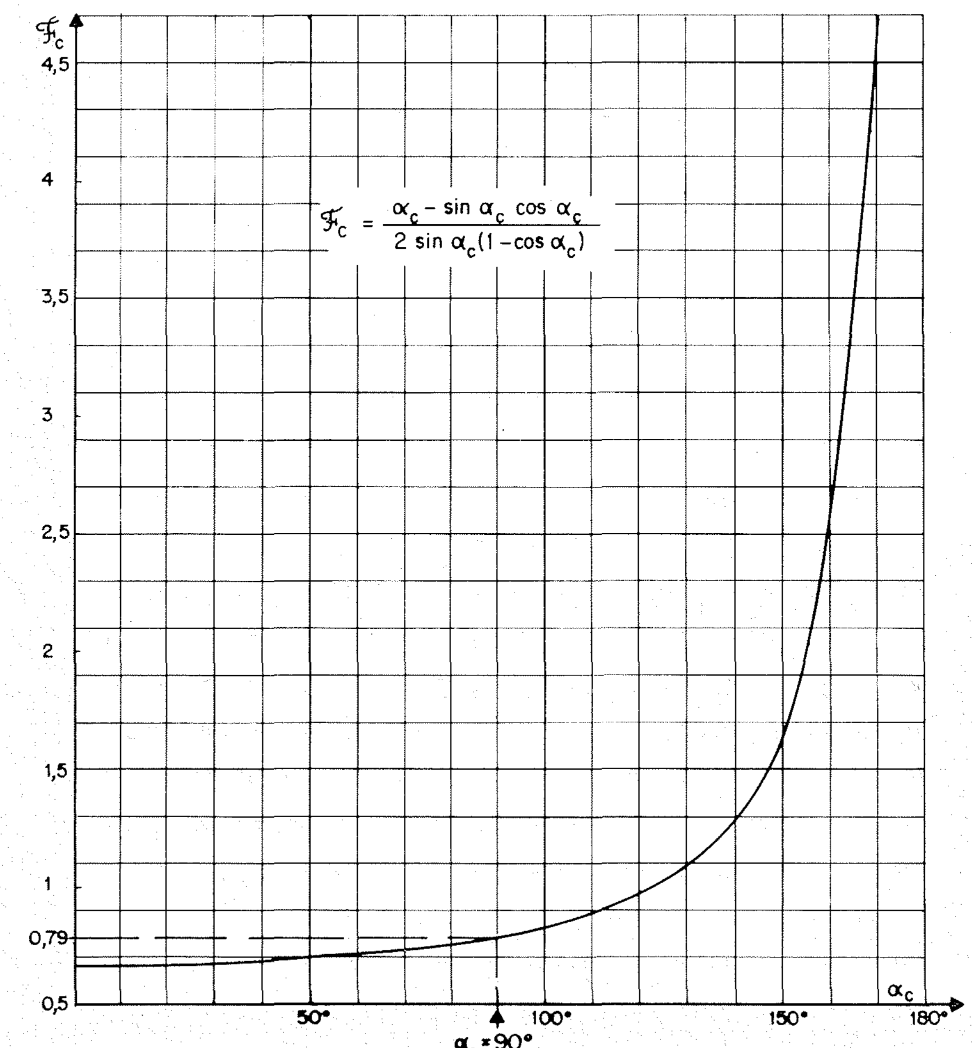
Abaque 2/
Profil trapézoïdal. *Trapezoidal section.*



Abaque 3/ Profil circulaire. *Circular section.*



Abaque 4/ Canal à profil circulaire. *Circular-section canal.*



Abaque 5/ Profil circulaire. *Circular section.*