LE NOMBRE DE RICHARDSON ET LES CRITÈRES DE STABILITÉ DES ÉCOULEMENTS STRATIFIÉS

PAR
L. MANDELBROT *

Introduction

Nous avons été amenés à nous occuper de tels écoulements à propos de l'étude du mécanisme de refroidissement des eaux de circulation d'un condenseur au moyen d'un plan d'eau libre. Nous avons rencontré un effet de gradient de densité, d'une part, dans la couche d'air voisine du sol, qui règne sur le phénomène de refroidissement évaporatif, d'autre part, dans la masse de liquide utilisée pour le refroidissement, du fait du rejet dans la masse d'un courant plus chaud, constituant un « courant de densité ». Cela nous a amenés à examiner les conditions d'écoulement de fluides en présence d'un gradient de densité et en particulier les différents régimes d'écoulement et leurs conditions de stabilité.

Equilibre statique des écoulements à variation de densité

Une masse fluide incompressible de densité uniforme est en équilibre indifférent par rapport au champ des forces de gravité. Dans le cas d'un fluide compressible, l'existence d'un champ hydrostatique fait que l'équilibre indifférent correspond

à une loi de stratification non uniforme. Par exemple, pour l'atmosphère, on définit ainsi l'atmosphère adiabatique, avec conservation dans toute la masse de la température potentielle :

$$\Theta = T + \frac{gz}{c_p} \quad (4)$$

La croissance de z s'accompagne donc d'une décroissance de la température et il existe, contrairement au cas du fluide incompressible, des cas de stratification équilibrée statiquement, mais instable. Les situations aérologiques les plus fréquentes se situant au voisinage de la loi adiabatique, la dynamique de l'atmosphère au voisinage du sol s'en trouve compliquée.

Propagation des ondes

On montre qu'elle est beaucoup plus complexe que dans le fluide homogène. Le cas le plus simple, celui de deux couches superposées de fluides avec discontinuité de densité, conduit à distinguer deux modes : le mode des ondes externes a une vitesse de propagation (voir réf. [1]) :

$$a_e = \sqrt{g(H_1 + H_2)} \cdot f\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right) \quad (5)$$

Dans cette expression, la valeur de la fonction f est très voisine de 1 lorsque $\Delta\rho/\rho$ est petit :

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \ll 1 \quad f\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right) \approx 1 \quad (6)$$

* Département Mécanique des Fluides, C.R.E.C., Chatou.

Ce régime se confond donc sensiblement avec le régime des ondes de gravité en fluide homogène.

Le deuxième mode donne des ondes internes de vitesse

$$a_i = \sqrt{\frac{\Delta\rho}{\rho} \cdot g \cdot \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2}} \quad (7)$$

La comparaison de la vitesse de l'écoulement à celle de la propagation des ondes se fait par le nombre de Froude interne :

$$\mathcal{F}_i = \frac{v}{\sqrt{(\Delta\rho/\rho)g \cdot h}} \quad (8)$$

On peut donc dans une certaine mesure considérer que l'interface est une surface libre d'un fluide soumis à des effets de gravité réduits dans le rapport $\Delta\rho/\rho$.

Condition de stabilité de l'écoulement potentiel

L'existence d'une stratification stable statiquement a un effet stabilisateur sur l'écoulement. On a cherché la limite de stabilité dynamique d'abord à partir de l'écoulement potentiel avec superposition d'une perturbation harmonique.

Taylor étudia entre 1914 et 1931 (réf. [2]) un modèle discontinu et un modèle continu.

Le modèle discontinu se compose de couches superposées avec discontinuité de densité et de vitesse à l'interface. Pour une perturbation de longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$, dans le cas de deux couches de densité ρ_1 et ρ_2 et de discontinuité de vitesse u , la condition de stabilité est :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} > \frac{2\pi u^2 \rho_1 \rho_2}{g(\rho_1^2 - \rho_2^2)} \quad (9)$$

ou la forme équivalente :

$$\frac{\rho_1 \cdot \rho_2}{\rho^2} \cdot \frac{u^2}{(\Delta\rho/\rho) \cdot g\lambda} < 1/2 \pi \quad (9')$$

Nous voyons au premier nombre apparaître un nombre de Froude interne. Il n'y a pas de stabilité absolue indépendante de la longueur d'onde.

Dans le modèle continu, on prend des gradients :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \alpha \quad \frac{\partial \text{Log } \rho}{\partial z} = \beta$$

On suppose l'écoulement illimité. La condition de stabilité résultante est :

$$\frac{g\beta}{\alpha^2} = \frac{g}{\rho} \cdot \frac{\partial\rho/\partial z}{(\partial u/\partial z)^2} = \mathcal{R}i > \frac{1}{4} \quad (10)$$

Le nombre sans dimensions qui apparaît ici est le nombre de Richardson. Il est constant dans ce modèle. Si nous remplaçons les gradients par des différences mesurées entre deux niveaux voisins, il vient :

$$\mathcal{R}i = \frac{g}{\rho} \cdot \frac{d\rho/dz}{(du/dz)^2} = \frac{(\Delta\rho/\rho) \cdot g \cdot \Delta z}{(\Delta u)^2} = \frac{1}{\mathcal{F}_i^2} \quad (11)$$

Nous voyons ici la parenté entre le nombre de Richardson et le nombre de Froude interne.

Etude de la stabilité de l'écoulement laminaire

Schlichting [3] a étudié l'écoulement laminaire sur une plaque plane, le profil de vitesse étant défini par la formule de Blasius et le gradient de densité étant continu. On applique la méthode de Tollmien. Il résulte une loi (fig. 1) :

$$(\mathcal{R}i_{\text{paroi}})_{\text{critique}} = \frac{g}{\rho} \cdot \frac{\partial\rho/\partial z}{(\partial u/\partial z)^2_{\text{paroi}}} = \text{fonction} \left(\frac{u_0 \delta^*}{\nu} \right) = f(\mathcal{R}) \quad (12)$$

1/

Pour $\mathcal{R}i = 0$ (fluide homogène),
on retrouve $\mathcal{R}_{\text{crit.}} = 575$;
Pour $\mathcal{R}i = 1/24$ on trouve $\mathcal{R}_{\text{crit.}} = \infty$.

Ces valeurs correspondent à la limite de stabilité pour toutes les perturbations.

Condition de maintien de la turbulence à l'interface

Une façon très différente d'aborder le problème de la stabilité d'une stratification consiste à supposer réalisé l'écoulement turbulent et à examiner si la turbulence pourra se maintenir. La situation est différente dans le cas de la stratification continue et discontinue. Dans le cas où il y a discontinuité avec interface définie, la condition de stabilité exprimera l'absence de transferts turbulents à travers cette interface. Dans le cas de la stratification continue, il s'agira de déterminer l'existence de transfert turbulent à chaque niveau de l'écoulement.

Les raisonnements dérivent du schéma suivant. On suppose qu'une balle de fluide se déplace sous

l'effet des fluctuations verticales. On compare pour un tel déplacement l'énergie dépensée contre les forces du champ de gravité avec l'énergie fournie par l'écoulement par l'intermédiaire des fluctuations; si l'énergie fournie est insuffisante, il y aura décroissance des fluctuations verticales. L'écoulement ne devient pas proprement laminaire, mais les transferts verticaux sont freinés, et la stratification est stable.

Le critère original de L. F. Richardson (1920) s'écrit :

$$\frac{g}{c_p} \cdot \frac{(\partial \sigma / \partial z)}{(\partial u / \partial z)^2} < 1 \quad (13)$$

Il a été établi dans le cas de l'atmosphère (réf. [4]); σ est l'entropie de l'unité de masse. Si on admet que l'air est un gaz parfait, le numérateur :

$$\partial \sigma / \partial z = \frac{1}{T} \left[c_p \frac{\partial T}{\partial z} + g \right] = \frac{c_p}{T} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial z} \quad (14)$$

par définition de la température potentielle Θ , d'où la forme usuelle du nombre de Richardson atmosphérique :

$$Ri = \frac{g}{T} \cdot \frac{\partial \Theta / \partial z}{(\partial u / \partial z)^2} < 1 \quad (15)$$

En partant du même bilan énergétique, Prandtl, qui utilisa sa théorie de la « longueur de mélange », arriva à la valeur :

$$Ri_{critique} = 2 \quad (16)$$

La seule méthode phénoménologique encore utilisée pour l'étude de la turbulence est celle qui considère les échanges comme régis par des coefficients de transfert turbulent, selon la conception de Bousinesq. Cette conception est courante chez les auteurs anglo-saxons, qui définissent K , coefficient de transfert turbulent de quantité de mouvement, K_H , coefficient de transfert de chaleur, etc.

Le bilan énergétique dans cette théorie conduit à une expression de la variation de l'énergie turbulente :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} &= K \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - K_H \frac{g}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} = \\ &= K \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \left[1 - \frac{K_H}{K} \cdot \frac{g}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho / \partial z}{(\partial u / \partial z)^2} \right] = \\ &= K \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \left[1 - Ri_f \right] \end{aligned} \quad (17)$$

avec par définition :

$$Ri_f = \frac{K_H}{K} \cdot \frac{g}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho / \partial z}{(\partial u / \partial z)^2} = - \frac{g \cdot H}{c_p \cdot T \cdot \tau (\partial u / \partial z)} \quad (18)$$

C'est le nombre de Richardson basé sur les flux. On admet souvent que cette forme peut être identifiée à la forme basée sur les gradients, grâce à l'analogie de Reynolds. Mais cette assimilation, valable dans certains cas, voir Rider [5], n'est valable pour d'autres qu'avec de sérieuses réserves. L'étude la plus récente, celle de Webster [6] montre les très grandes variations du rapport K_H/K

dans une même expérience, d'un point à l'autre de champ exploré. Malheureusement, dans cette étude, les conditions expérimentales n'assurent pas la stabilisation des phénomènes.

Déduction expérimentale du nombre de Richardson critique

On définit en aérologie deux régimes d'écoulement, correspondant à la convection libre et à la convection forcée ou à l'inversion et à la convection selon les terminologies. Si l'on admet que la condition de transition correspond à une loi de vitesses logarithmique :

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{k} \text{Log} \frac{z}{z_0} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{u_*}{kz} \quad (19) \quad (19')$$

on peut écrire, avec Deacon :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{u_*}{kz} \cdot \left(\frac{z}{z_0} \right)^{1-\beta} \quad (20)$$

$\beta = 1$ caractérisant la stabilité. Si on considère β comme fonction de Ri , on obtient la courbe (9).

La stabilité est obtenue pour :

$$Ri = Ri_{crit.} \approx 0,02$$

De même Priestley [7] raisonnant sur les flux de chaleur verticaux écrit :

$$H_* = H / \left[\rho \cdot c_p \left(\frac{g}{T} \right)^{1/2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^{3/2} z^2 \right] \quad (21)$$

ce qui est une forme de nombre de Margoulis.

Il distingue alors deux cas :

— convection forcée :

$$H_* = k^2 Ri^{1/2} \quad (22)$$

— convection libre :

$$H_* = h \quad (23)$$

Sur la courbe expérimentale la distinction des deux lois est visible et l'intersection met en évidence :

$$Ri_{\text{critique}} \approx 0,02 \quad (24)$$

Enfin Webb se base sur la forme de la courbe de répartition de température, qu'il caractérise par le coefficient de forme :

$$\varphi = \frac{1}{150 \cdot \text{Log}(8/2)} \cdot \frac{\Delta [T + \Gamma z]_{\frac{8m}{2m}}}{(\partial/\partial z) (T + \Gamma z)_{1,5m}} \quad (25)$$

Ce coefficient est équivalent à l'exposant de la loi de répartition des températures potentielles, soit $\varphi = 1$ pour la convection forcée et $\varphi = 0,73$ pour la convection libre. La transition se produit pour $Ri \approx 0,02$.

Autres façons de présenter la condition de stabilité

Le nombre de Richardson n'est en général pas une constante dans tout l'écoulement. C'est ainsi que Lettau et Davidson [8] montrent qu'on peut le mettre approximativement sous la forme :

$$Ri = 2 g \sqrt{z_1 \cdot z_2} \cdot \log \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{\theta_2 - \theta_1}{(u_2 - u_1)^2} \quad (26)$$

si on fait les mesures à deux niveaux z_1 et z_2 , tels que z_2/z_1 soit constant et qu'on affecte le nombre résultant à l'altitude $z = \sqrt{z_1 \cdot z_2}$ on voit que si θ et u sont de la forme logarithmique, Ri est proportionnel à z . Les mesures donnant des variations importantes de Ri , les auteurs les pondèrent par la cote z et posent :

$$Ri' = [\Sigma Ri(z_i)] / \Sigma z_i \quad (27)$$

C'est la pente de la droite moyenne définissant $Ri(z)$. Ils utilisent ce critère pour caractériser les cas de stabilité. Mais ce critère est purement empirique et sans véritable fondement théorique.

Les expérimentateurs soviétiques utilisent un critère de stabilité également empirique :

$$\varepsilon = \frac{T_2 - T_1}{u^2} \quad (28)$$

u étant mesuré à la cote moyenne géométrique de z_1 et z_2 .

Dans un tout autre cas d'écoulement, celui d'une couche mince d'un fluide superposée à un fluide plus lourd, Keulegan [9] est parvenu à une expression de la condition de stabilité par le paramètre

S , suggéré par les études de Jeffreys sur le déferlement de la houle :

$$S = 16 \frac{\nu \cdot (\Delta \rho / \rho) \cdot g}{u^3} = \frac{16}{R \cdot \mathcal{F}_i^2} \quad (32)$$

Les mesures donnent comme valeur critique :

$$S = 3,28 \cdot 10^{-2} \quad \text{pour } R < 450$$

$$S = 9,05 \cdot 10^{-2} \quad \text{pour } R > 450$$

Le critère S provient de l'élimination de la longueur entre le Reynolds et le Froude interne. Le résultat diffère profondément des résultats précédents, car le nombre de Richardson fait intervenir une échelle de longueurs.

Possibilité de réduction du nombre de Richardson à un critère global

Dans le cas de l'écoulement avec discontinuité, les différents critères que nous avons présentés pouvaient être calculés avec les paramètres globaux de l'écoulement.

Dans le cas de l'écoulement à stratification continue, on trouve en général une forme de nombre de Richardson formée soit avec les flux, soit avec les gradients locaux. La chose est très malcommode lorsqu'on désire faire un modèle; on peut cependant remarquer, aussi bien pour ρ que pour u , que le rapport du gradient local en un point de l'écoulement, à la variation totale transversale constitue un paramètre de forme de la loi de répartition. Nous admettons :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{u_\infty}{h} \times \text{fonction} (R) \quad (33)$$

c'est-à-dire que ce paramètre est une fonction du seul nombre de Reynolds.

Finalement, il vient donc :

$$Ri = \frac{g}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho / \partial z}{(\partial u / \partial z)^2} = \frac{g}{\rho} \frac{\Delta \rho \cdot h}{(\Delta u)^2} \cdot f(R) \quad (34)$$

$$Ri = \frac{1}{\mathcal{F}_i^2} \cdot f(R)$$

La fonction du nombre de Reynolds tend vers une valeur asymptotique lorsque R augmente, et le critère de Richardson se réduit au critère de Froude interne.

Les essais de Lofquist [10] sur les écoulements stratifiés confirment ce point de vue.

C'est ainsi que lorsque Batchelor [11] considère le nombre de Richardson comme critère global, c'est au Froude interne qu'il se réfère en réalité.

Il semblera donc justifié de remplacer le critère de Richardson par un nombre de Froude interne à chaque fois que les formes des courbes de vitesse et de densité semblent ne dépendre que du nombre de Reynolds.

Conclusion

Bien que le même groupement non dimensionnel apparaisse dans tous les problèmes de stabilité de stratification, des traitements particuliers ont été nécessaires pour les différents cas.

Il ne semble pas possible à l'heure actuelle de regrouper tous les résultats dans une théorie unique de la stabilité.

Bibliographie

- [1] POGGI (B.). — *L'Energia Elettrica*, août 1959, pp. 685-691.
- [2] TAYLOR (G. I.). — *Scientific Papers*, tome II, n°s 21 et 22. *Cambridge University Press*, 1960.

- [3] SCHLICHTING. — *Zeitsch. für angew. Math.*, t. 13, p. 313 (1935).
- [4] RICHARDSON (L.F.). — *Proc. of The Roy. Soc.*, London, Série A, Vol. 97 (1920).
- [5] RIDER (N.E.). — *Phil. Trans. Roy. Soc.*, London, Série A, Vol. 246, p. 481 (1954).
- [6] WEBSTER (C. A. G.). — *Jour. of Fluid Mechan.*, Vol. 19, p. 221 (juin 1954).
- [7] PRIESTLEY (C. H. B.). — *Turbulent transfer in the lower atmosphere. University of Chicago Press*, 1959.
- [8] LETTAU (H.H.) and DAVIDSON (B.). — *Exploring the atmosphere's first mile. Pergamon Press*, 1957.
- [9] KEULEGAN (G. H.). — *Journ. of Res. of the Nat. Bureau of Stand.*, Vol. 43 (novembre 1949).
- [10] LOFQUIST (K.). — *The Phys. of Fluids*, Vol. 3, n° 2, p. 158 (1960).
- [11] BATCHELOR (G. K.). — *Quart. Journ. Roy. Meteor. Soc.*, Vol. 79, n° 340 (1953).

Discussion

J. Valembois : Travaux récents sur les courants de densité

A. Schlag : L'écoulement sur déversoir d'un liquide hétérogène stratifié

L. Mandelbrot : Le nombre de Richardson et les critères de stabilité des écoulements stratifiés

Président : M. Craya

M. le Président remercie vivement les auteurs de rapports pour leurs très intéressantes contributions. Nous devons à M. VALEMBOIS une excellente vue d'ensemble des principaux problèmes intéressant les applications et leurs progrès actuels. M. MANDELBROT s'est attaché à quelques aspects fondamentaux importants et a utilement attiré l'attention sur des aspects atmosphériques moins familiers des hydrauliciens. M. le Professeur SCHLAG enfin a magistralement résumé ses belles expériences sur le soutirage sélectif par déversoir.

M. CRAYA propose que la discussion soit commune à ces trois rapports et s'ordonne autour des trois thèmes principaux suivants qui ont tous été évoqués :

- a) le problème de la stabilité pour les fluides stratifiés en densité;
- b) dans le régime turbulent l'influence de la stratification sur les transports de quantités de mouvement et de matière;
- c) les configurations particulières d'écoulement étudiées dans cette première session, notamment déversoirs et jets.

I. — LE PROBLÈME DE LA STABILITÉ.

M. le Président souligne qu'il est préférable d'aborder la stabilité à partir du terrain sûr du mouvement laminaire. La démarche inverse, qui consiste à partir du régime turbulent est périlleuse, car on connaît mal ce régime et surtout ses avatars au cours de la transition.

Il rappelle les principales divisions du problème de la stabilité d'après les mécanismes en ligne de compte.

La première grande classe est constituée par la stabilité *statique* des fluides pesants au repos et stratifiés en densité. Le résultat du calcul pour un fluide parfait incompressible n'est pas surprenant : il y a stabilité si la densité décroît avec l'altitude. Des critères analogues existent pour une atmosphère de fluide compressible (par exemple Schwarzschild). Il convient de noter la parenté du problème avec celui de l'instabilité thermique d'un fluide réel (visqueux et conducteur de la chaleur) chauffé par-dessous, ou celui de l'écoulement entre deux cylindres tournant dans le même sens, où la force centrifuge joue le rôle d'une gravité variable. Les critères d'instabilité s'expriment alors respectivement par les nombres de Rayleigh et de Taylor.

Dans la présente session, l'intérêt s'est principalement centré sur une deuxième catégorie d'instabilités, celle où le fluide est en mouvement parallèle avec un *gradient transversal de la vitesse*. On sait qu'en fluide parfait homogène, l'instabilité est associée à une discontinuité ou à une inflexion du profil de vitesse. On sait aussi que la viscosité joue un rôle stabilisateur pour un fluide indéfini, mais qu'en présence d'une paroi, elle constitue au contraire un facteur nouveau d'instabilité. La question qui se pose donc est celle du degré d'efficacité d'un gradient de densité statiquement favorable comme agent stabilisateur. Le cas le plus simple (fig. 1) est celui d'un écoulement semi-infini d'un fluide parfait incompressible avec :

$$\rho = \rho_0 e^{-\beta z} \quad U = U_0 z$$

Considéré d'abord par Taylor, il a été en définitive prouvé *stable* (Case, 1960) pour tous β et U_0 positifs; ce résultat ne peut surprendre étant donné la stabilité de cet écoulement même sans gradient de densité. La figure 2 concerne les distributions :

$$\rho = \rho_0 e^{-\beta z} \quad U = U_0 \operatorname{th} \frac{z}{d}$$

pour lequel Drazin (1958) a montré qu'il y a stabilité dès

lors que l'on a pour le nombre de Richardson *global* la condition :

$$J = + \frac{\beta g}{(U_0/d)^2} > \frac{1}{4}$$

Plus généralement, Miles et Howard (1961) ont prouvé que pour des distributions régulières $\rho(z)$, $U(z)$, où la vitesse croît avec l'altitude, une condition *suffisante* de stabilité est que le nombre de Richardson *local*

$$J = - \frac{(1/\rho) (d\rho/dz) g}{(dU/dz)^2}$$

soit supérieur à 1/4 (la condition n'est bien entendu pas nécessaire). D'autre part, diverses configurations discontinues ont été considérées depuis le problème classique initial de l'interface de Kelvin-Helmholtz (fig. 3). Les figures 4 à 6 en donnent quelques exemples où la discontinuité porte sur U ou sur sa dérivée; le calcul fait apparaître en général des plages de longueur d'onde de perturbations qui sont instables.

L'aperçu très rapide qui précède permet donc de comprendre qu'on peut difficilement espérer un critère simple et universel de stabilité basé sur le nombre de Richardson global ou local.

M. MANDELBROT indique qu'il n'a pas tant insisté sur les différentes formes de schémas théoriques d'instabilité que sur le fait de définir, dans chacun des cas particuliers qu'il a cités (instabilité de Taylor, de Schlichting, etc.), soit un nombre de Richardson, soit un nombre de Froude, qui sont pratiquement équivalents, étant donné qu'on a défini à l'avance une certaine loi de vitesse et de densité.

C'est pourquoi, dans les divers cas théoriques, on arrive à une stabilité ou à une instabilité avec une limite de valeur d'un nombre qui sera un nombre de Froude ou de Richardson. Par exemple, dans les cas atmosphériques, on voit fleurir toutes sortes de coefficients qui tiennent compte, non plus du gradient en un point, ce qui est une représentation insuffisante du phénomène, mais de toute une courbe de répartition, soit en intégrant une loi plus ou moins arbitraire, soit en faisant des mesures à des niveaux arbitrairement choisis.

M. MANDELBROT précise qu'il n'a pas du tout cherché à dégager ce dont M. le Président montre la difficulté, c'est-à-dire des critères universels qui ne seraient pas déduits de considérations hydrodynamiques bien assises; il a voulu regrouper, dans une littérature qui est plus technique que scientifique, un certain nombre de critères de stabilité introduits à différentes étapes de l'évolution des sciences et qui tous ont une forme dimensionnellement très voisine, que ce soit un nombre de Richardson, ou S , selon les auteurs, mais qui présentent une certaine disparité dans les définitions qu'on a utilisées pour les former et suivant qu'il s'agit de cas plutôt théoriques ou plutôt pratiques. C'était simplement pour signaler cette difficulté, qui crée une certaine confusion quand on parle du nombre de Richardson tout court — ce qui n'a pas de sens —, qu'il a voulu faire cette communication.

II. — RÉGIME TURBULENT.

M. le Président souligne qu'une question importante posée par le régime turbulent est celle de l'influence de la stratification de densité (traduite notamment par le nombre de Richardson local) sur les diverses fluctuations et notamment sur le transport de quantités de mouvement (frottement) et celui de matière (diffusion turbulente).

DISCUSSION

L'intérêt principal de la variante du nombre de Richardson, dite de flux, est de mettre en évidence le rapport du travail moyen effectué contre la pesanteur à l'énergie totale de fluctuation empruntée à l'écoulement moyen. Mais, comme M. MANDELBROT n'a pas manqué de le noter, le rapport des coefficients de diffusivités turbulentes de quantités de mouvement et de matière n'est pas égal à un, spécialement quand on va vers la stabilité.

Seule l'expérience, soit de laboratoire, soit dans la nature, peut nous guider actuellement sur ces questions. Il faut dire que les conditions dans l'atmosphère sont en général trop compliquées pour tenir lieu d'expériences fondamentales. Il sera peut-être permis de rappeler à ce propos la boutade qu'aimait dire von Kármán : il notait qu'au cours des âges, l'Astrologie avait fait place à l'Astronomie et qu'il espérait que pareillement la Météorologie deviendrait bientôt la Météoronomie.

Les expériences telles que celles de Webster, citées par M. MANDELBROT, sont donc d'un grand intérêt. Elles font suite à d'autres recherches effectuées par Ellison, également à l'Université de Manchester. Les gradients de température et de vitesse étaient obtenus en tunnel aérodynamique grâce à deux grilles convenables, la première étant chauffée. Les moyennes de fluctuation et de flux étaient obtenues par des combinaisons de fils chauds. Bien qu'on ne puisse les extrapoler sans danger, les résultats obtenus sont très instructifs.

M. MANDELBROT confirme la description du dispositif de Webster et précise que son but est de créer une turbulence à l'entrée du tunnel par une grille à maille variable, qui introduit un gradient de vitesse, et une grille chauffante qui crée un gradient de température. Webster espère, en plaçant les appareils de mesure à une distance moyenne en aval de cette grille, obtenir des résultats un peu homogénéisés, mais qui ne soient pas trop influencés par les parois. En réalité, il s'aperçoit, en conclusion, que l'ordre de grandeur du rapport ϵ_H/ϵ_M varie considérablement le long du canal.

M. le Président trace la courbe de variation ϵ_H/ϵ_M en fonction du nombre de Richardson obtenu par Webster dans sa section de mesure *amont*, qui évolue suivant la figure 7.

M. MANDELBROT remarque que, plus en aval, la variation est beaucoup plus faible, car on n'est plus du tout assuré qu'à la turbulence de la grille seule, ne vienne s'ajouter l'influence de la paroi, par le développement de la couche limite. De plus, la différence des résultats entre les stations 3 et 5 varie suivant la vitesse d'écoulement d'ensemble dans la veine.

M. le Président partage la déception éprouvée par Webster en constatant que les conditions de ses essais ne permettaient pas d'atteindre un *équilibre* et que, de ce fait, les résultats obtenus n'étaient pas généralisables. Il souligne cependant la nécessité de telles explorations détaillées dans des conditions contrôlées.

Sur la demande de M. le Président, M. VALEMBOS indique que, dans les expériences de Lofquist, le coefficient de diffusivité turbulente semble notablement plus petit pour la diffusion de matière que pour la diffusion de quantités de mouvement.

M. BLANCHET présente les remarques ci-après sur la communication de M. VALEMBOS :

« Lorsque l'effet de densité est dû à des particules en suspension le problème de la stabilité de l'interface est très différent de celui des solutions salines, ou effets thermiques, pour lesquels les mélanges ne sont pas réversibles : il ne peut pas y avoir d'accroissement de concentration ou de température pour les parties les plus denses ou les plus chaudes. Ce qui n'est pas le cas pour les suspensions.

« L'effet stabilisant de la chute ou de l'ascension des grains est très important et il est possible d'obtenir un écoulement stable en régime turbulent, ce qui n'est pas le cas des liquides miscibles.

« Par ailleurs, nous pensons que dans les études de ces écoulements, il faudrait prendre en compte la contre-pente du plan d'eau ou de la ligne piézométrique que doit avoir l'écoulement induit par rapport à l'écoulement moteur ».

M. VALEMBOS répond, à la deuxième remarque de M. BLANCHET, que Lofquist a calculé la tension tangentielle à l'interface en considérant la zone comprise entre celle-ci et le maximum de vitesse. Il prend en compte les tensions sur les parois latérales, les effets d'accélération et de diffusion, et bien entendu le gradient de pression, et considère que la part de la contre-pente de la surface est négligeable, dans ce gradient de pression, par rapport à celle de la pente de

l'interface. Si i est la pente de la surface libre et I celle de l'interface, i est bien plus petit que $I \Delta \rho / \rho$.

M. BLANCHET pense que l'effet du fluide moteur sur l'écoulement induit se traduit entièrement dans cette contre-pente, que l'on pourrait s'attacher à mesurer malgré sa faiblesse et les difficultés que cela comporte.

Sur la première remarque de M. BLANCHET concernant la différence des écoulements entre fluides miscibles et avec particules en suspension, M. le Président rappelle les campagnes de mesures très étendues effectuées dans la retenue du Sautet. Elles constituent une source de renseignements intéressants.

III. — CONFIGURATIONS PARTICULIÈRES.

M. HUFFENUS présente les remarques ci-après sur la communication de M. SCHLAG :

« 1° Si l'on fait varier la concentration dans de larges limites : Pour $\Delta \rho / \rho$ très important, $h_2 = 0$ quel que soit h_1 . Pour $\Delta \rho / \rho = 0$, $h_2 = z$ quel que soit h_1 .

Comment se situent les essais effectués à l'intérieur de ce cadre général ? En particulier, l'existence du point de concours des droites à c constant doit être lié à une exploration du phénomène dans une zone réduite.

2° Peut-on décrire le phénomène considéré comme une sorte de courbe de remous de l'écoulement salin, courbe de remous provoquée par l'entraînement par frottement à l'interface ?

Dans ce but, si l'on porte les essais sur un diagramme $h_2 c$ (ou $h_2 \Delta \rho / \rho$) en fonction de h_1 (c'est-à-dire d'une grandeur qui représente le débit), on trouve pratiquement des faisceaux de droites parallèles. Mais il semble impossible de ramener les droites pour des concentrations différentes à une même courbe, même en portant en abscisse la vitesse :

$$U = \frac{Q}{L(h_1 + h_2)}$$

à l'amont. On a donc de sérieuses difficultés pour ramener les résultats sous une forme directement interprétable.

On peut enfin chercher à voir la déformation des lignes de courant à l'amont du déversoir sous l'action des forces de densité.

M. SCHLAG répond qu'il n'a pas examiné la question du point de vue envisagé par M. HUFFENUS. Les droites h_1/h_2 sont des tracés empiriques. Représentent-elles des tangentes à certaines courbes, ou sont-elles autre chose ? Ne sont-elles vraies que dans la limite des essais ? Ce sont des questions auxquelles il ne peut pas répondre.

M. le Président pense que le problème semble très compliqué, même à deux dimensions, *a fortiori* dans le cas où le déversoir a une largeur différente de celle du canal.

M. BLANCHET pense que la force essentielle qui intervient dans ce phénomène n'est pas le frottement dû à la vitesse, mais la décroissance des hauteurs piézométriques due à l'augmentation des vitesses à l'approche du déversoir. Cela se traduit par un remous d'abaissement de la surface à l'air libre et un remous d'exhaussement pour le fluide inférieur.

Il suggère d'introduire comme variable la hauteur critique du déversoir qui est directement liée au débit et qui fournit une bonne indication de la hauteur piézométrique au voisinage du déversoir.

M. le Président rappelle la théorie qu'il avait lui-même proposée il y a quelque vingt ans à propos d'un orifice débitant au-dessus d'une interface. Il avait été possible d'obtenir pour ce cas, d'une part, une évaluation approchée simple, d'autre part, un calcul rigoureux.

M. DAUBERT rappelle que M. SCHLAG a représenté graphiquement dans la figure 2 de son mémoire la variation de h_2 en fonction de h_1 , à concentrations constantes et pense que, dans cette variation, les nombres de Reynolds et de Froude jouent ensemble au seuil.

Mais dans le diagramme de la figure 7, aux coordonnées R et $\mathcal{F}$, M. SCHLAG donne une parabole qui indique les valeurs de ces nombres auxquelles commence le début de l'entraînement. M. DAUBERT pense qu'il y a là une relation entre les deux paramètres indépendants du problème quand on impose une certaine condition, c'est-à-dire le début d'entraînement.

M. le Président demande à M. SCHLAG s'il y a, dans le phénomène, une influence de la viscosité ou d'un autre facteur.

DISCUSSION

M. SCHLAG répond que dans le second mode de représentation des résultats, il apparaît certainement une influence de la viscosité, puisque le nombre des Reynolds est porté en ordonnées. En se référant aux travaux de Kindsvater et Carter, on peut penser que, dans le premier mode de représentation, les longueurs h_{01} et h_{02} à ajouter à h_1 et h_2 (ou à soustraire de h_1 et h_2) représentent également l'influence de la viscosité.

M. le Président pense que la visualisation du phénomène décrit par M. SCHLAG devrait faire apparaître la viscosité par l'entraînement du fluide inférieur.

M. SCHLAG a constaté que l'interface prend différents aspects à proximité du déversoir, selon la valeur de la distance h_2 . Si celle-ci n'est pas trop grande, l'interface est très nette et l'écoulement se fait par deux veines distinctes. Si h_2 augmente, il y a formation d'une couche de densité intermédiaire, qui est aspirée par le déversoir. Si h_2 augmente encore, la couche inférieure n'est plus aspirée que sous forme de « nuages ».

M. HUFFENUS pense que cette remarque du Professeur SCHLAG répond un peu aux questions qu'il a posées tout à l'heure : l'interface n'arrive pas forcément au sommet du déversoir, mais au-dessous, l'eau salée est, en quelque sorte arrachée à l'interface, aux abords immédiats de la crête du déversoir. Dès lors, le problème se complique singulièrement, car le phénomène moteur qui engendre $h_{2,c}$ n'est plus accessible de façon simple.

M. le Président remercie M. SCHLAG de sa très intéressante contribution. Il se demande si l'écoulement bidimensionnel ne pourrait pas se prêter à une tentative d'interprétation théorique.

M. le Président ayant noté la présence dans l'auditoire de M. ABRAHAM dont l'étude récente sur les jets a été citée par M. VALEMBOS, demande à M. ABRAHAM de bien vouloir résumer les grandes lignes de son travail.

M. ABRAHAM donne le sommaire de ses études générales des jets.

Les phénomènes mentionnés ci-dessous ont été traités comme permanents dans le cas d'une masse infinie de liquides en repos, recevant le jet.

	Direction du jet	Liquide recevant le jet	Quantités déterminées
1	Montant en sens vertical.	Homogène, plus lourd que le jet.	Concentration, vitesse.
2	Montant en sens vertical.	Homogène, plus léger que le jet.	Concentration, vitesse, hauteur maximale atteinte par le jet.
3	Montant en sens vertical.	Non homogène, variation arbitraire de la densité.	Concentration, vitesse, hauteur maximale atteinte par le jet.
4	Horizontal.	Homogène, densité différente de celle du jet.	Tracé du jet.

Les solutions présentées peuvent être appliquées pour déterminer le degré du mélange des jets de gaz perdus dans une atmosphère en repos et des eaux usées déposées dans des eaux de marée pendant des périodes de changement de marée. Dans le dernier cas, il est nécessaire de faire quelques suppositions pour évaluer l'effet de la surface libre d'eau.

Quand les eaux usées sont déposées dans un liquide récepteur en repos, le liquide récepteur proche de la source peut être saturé par les eaux usées par suite d'un déversement continu dans la même eau réceptrice.

Une situation semblable peut se produire quand les gaz lourds sont dégagés dans une atmosphère en repos. Quand on applique les données présentées, il est nécessaire de tenir compte de ces conditions défavorables qui ne sont pas traitées.

M. le Président remercie M. ABRAHAM de ses précisions.

Il remercie encore les auteurs de rapports pour leurs importantes contributions et l'auditoire pour sa participation à la discussion et pour son intérêt.

La séance est levée à 12 h 25.