EFFET DE LA HOULE SINUSOÏDALE SUR LA DIFFUSION ENTRE LIQUIDES DE SALINITÉS DIFFÉRENTES

PAR

A. DAUBERT * et J.-C. LEBRETON *

Introduction

La houle peut intervenir de deux façons totalement différentes dans la diffusion entre deux couches de liquides séparées par une interface horizontale.

Elle peut superposer à la diffusion moléculaire, une diffusion turbulente dans le cas où il existe des sources de turbulence.

Elle peut aussi, par son action convective, accélérer la diffusion moléculaire ou turbulente en rapprochant et éloignant les particules fluides.

Dans le premier mode d'action, on peut dire, schématiquement, qu'il existe trois domaines du fluide où peuvent apparaître des sources de turbulence :

1. L'interface air-liquide, par suite des déferlements des vagues et des tourbillons induits par le vent;

2. L'interface entre les deux liquides de densités différentes;

3. Et enfin la couche limite de fond qui peut, pour certaines conditions de houles et de fond, devenir turbulente.

Notons qu'en nature la turbulence entraîne une diffusion nettement plus importante que la diffusion moléculaire.

* Ingénieurs au Département L.N.H. du C.R.E.C., E.D.F.

Étude théorique

Pour aborder l'étude du problème qui nous intéresse, nous allons rappeler l'équation générale de la diffusion de matière ou de chaleur dans un fluide animé d'une vitesse V :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \operatorname{div} [\alpha \operatorname{grad} c - c\mathrm{V}]$$

Pour interpréter cette équation, nous devrons définir les coefficients qui y figurent et préciser les conditions aux limites.

α est le coefficient de diffusion moléculaire qui, en CGS, vaut sensiblement 10^{-5} cm²/s pour du ClNa et V représente le vecteur vitesse dans la houle.

Notons que cette équation s'applique encore avec une houle turbulente dans l'hypothèse où l'on caractériserait l'effet diffusif de la turbulence par un coefficient constant dans le temps et l'espace.

En ce qui concerne le champ de vitesse V, nous nous limiterons à une onde externe décrite par le potentiel de la houle limité au premier ordre.

Pour les conditions initiales, nous considérons donc qu'à l'instant $t = 0$ elle s'écrivent :

$$c = 0 \qquad \text{si} \qquad 0 \leqslant z \leqslant h_0$$

$$c = \mathcal{C}_0 \qquad \text{si} \qquad h_0 \leqslant z \leqslant \mathrm{H}$$

D'autre part, à tout instant, on imposera qu'au-

Article published by SHF and available at http://www.shf-lhb.org or http://dx.doi.org/10.1051/lhb/1965006

cun flux de matière ne traverse ni le fond ni la surface libre :

$$\frac{dc}{dn} = 0 \qquad \text{pour} \qquad z = \eta_s \qquad \text{et} \qquad z = \mathrm{H}$$

Pour une houle cylindrique, l'ensemble des équations et des conditions aux limites ainsi précisées est invariant dans toute translation parallèle au sens de propagation et d'amplitude égale à la longueur d'onde.

Il est donc logique de chercher pour $c\,(x, z, t)$ une solution périodique en x dont nous allons déterminer la décomposition en série de Fourier.

$$c = c_0\,(z, t) + \sum^{\infty} c_n \cos nax + \sum^{\infty} c'_n \sin nax$$

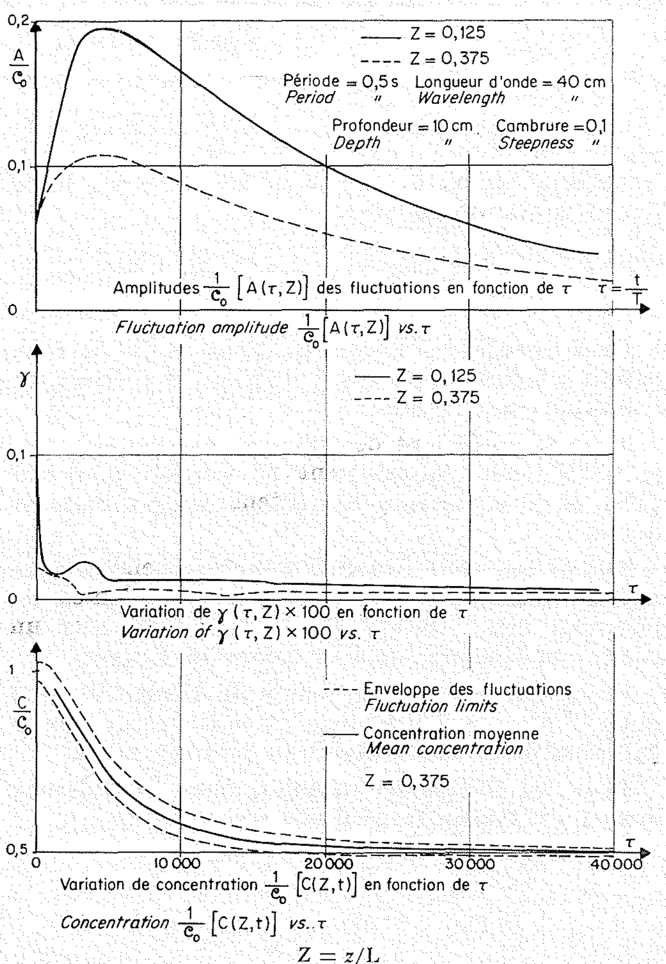
avec : $a = (\pi/\mathrm{L})$ L = demi-longueur d'onde.

Les termes en $\cos nax$ et $\sin nax$ représentant physiquement les fluctuations spatiales de la concentration qu'enregistrerait au même instant toute une série de sondes calées à la même cote et échelonnées sur une longueur d'onde.

La formule que nous venons d'écrire suscite quelques remarques :

Le premier terme c_0, fonction de z et de t, sera supposé au moins d'ordre 0 par rapport à la cambrure.

Par contre, les autres termes c_n et c'_n seront au moins d'ordre 1. En effet, nous devrons retrouver la loi de la diffusion saline en eau calme, sans fluctuation en x, lorsque nous ferons tendre l'amplitude de la houle vers zéro. Et par conséquent, tous les termes c_n et c'_n devront tendre vers zéro avec la cambrure.



Le calcul que nous allons effectuer se limite au cas des petites amplitudes. Le champ des vitesses sera introduit alors par un potentiel limité à l'ordre 1.

Cette hypothèse nous oblige à ne pas dépasser le premier ordre pour les fluctuations; puisqu'au second ordre le coefficient V décrivant la vitesse de la houle est inexact.

La périodicité en x va nous permettre de nous affranchir de la variable x.

On annule à l'ordre de 0 et à l'ordre 1 les coefficients de $\cos nax$ et $\sin nax$. Ce qui conduit au système des deux équations :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial c_0}{\partial t} - \alpha\,\frac{\partial^2 c_0}{\partial z^2} = 0 \\ &\frac{\partial c_1{}^*}{\partial t} - \alpha\,\frac{\partial^2 c_1{}^*}{\partial z^2} + \alpha a^2 c_1{}^* = w_0\,\frac{\partial c_0}{\partial z}\,e^{-ibt} \\ &c_1{}^* = c'_1 + ic_1 \end{aligned}\right.$$

Les conditions initiales ont fait disparaître les équations définissant c_n et c'_n pour $n > 1$.

L'intégration des trois équations écrites se fait dans le cas de la profondeur finie en développant c_0 et c^*_1 en série de Fourier par rapport à z.

Dans le cas du clapotis, par exemple, la solution peut se mettre sous la forme :

$$\frac{c_0}{\mathcal{C}_0} = 1 - \frac{h_0}{\mathrm{H}} - \frac{2}{\pi} \sum e^{-(a\pi^2 n^2 t/\mathrm{H}^2)}\,\frac{1}{n}\,\sin\frac{n\pi h_0}{\mathrm{H}}\,\cos\frac{n\pi z}{\mathrm{H}}$$

$$c_1 = \delta\,(t, z)\,\cos\frac{\pi t}{\mathrm{T}} + \beta\,(t, z)\,\sin\frac{\pi t}{\mathrm{T}} + \gamma\,(t, z)$$

Ce qui s'écrit encore :

$$c_1 = \mathrm{A}\,(t, z)\,\cos\frac{\pi}{\mathrm{T}}\,[t - \varphi\,(t, z)] + \gamma\,(t, z) \qquad (1)$$

T représente la demi-période de la houle.

Interprétation des résultats

Nous interpréterons ce calcul sur deux points : la forme des résultats et leur importance, c'est-à-dire les ordres de grandeur qu'ils nous procurent.

La forme (1) explicitée montre que la houle a deux effets essentiels sur la diffusion :

— un effet convectif à l'échelle de la période,

— et un effet activateur avec le temps de l'ordre du coefficient $1/\alpha/\mathrm{L}^2\pi^2$ ce qui pourrait confirmer la remarque de Munk sur l'activation de la diffusion dès l'apparition de vagues de courte longueur d'onde créées par le vent.

La concentration comportait selon l'hypothèse un terme de fluctuation spatiale et un terme non fluctuant indépendant de la houle.

Le calcul apporte une autre précision : il montre que la concentration comporte un terme de fluctuation temporelle de même période que la houle et dont la phase dépend du temps; mais il apporte également le terme $\gamma \cos ax$ qui, lui, ne varie pratiquement pas dans le temps et qui, ajouté à c_0 en un point, traduit l'effet moyen de la houle au premier ordre sur la diffusion.

Enfin, si les termes γ et φ sont toujours très petits, par contre l'amplitude A des fluctuations temporelles passe par un maximum qui peut atteindre le $1/10^e$ de la concentration initiale.

Conclusion

Finalement, il apparaît que l'action mécanique de la houle est pratiquement négligeable dans le cas de la diffusion purement moléculaire. Par contre, dès que le coefficient de diffusion peut être considéré d'un ordre de grandeur nettement plus important, comme ce serait le cas en présence de turbulence, l'action de la houle devient incontestable. Pour chiffrer ce dernier résultat, disons que γ représentant l'action moyenne de la houle sur la diffusion, est multiplié par 1 000 lorsque le coefficient α varie de $2/10^3$ à $2/10$, alors que $A(t, z)$ est resté pratiquement du même ordre de grandeur.

Discussion

Président : M. Gougenheim

M. le Président remercie M. Lebreton d'avoir présenté cette communication, qui ouvre des aperçus sur un problème qui n'avait pas encore été abordé et dont l'étude pourra être poursuivie.

M. Miche note que les recherches faites concernent le clapotis. Ne serait-ce pas plutôt la houle progressive qui serait intéressante ? C'est peut-être une question de simplification mathématique.

M. Lebreton indique que les études ont été commencées avec la houle progressive, mais on a finalement choisi le cas du clapotis comme exemple, parce qu'il correspondait à une condition initiale rigoureuse et simple : c'est le fait que les molécules passent périodiquement par leur position de repos dans les plans horizontaux. A l'instant initial, on a la condition rigoureuse d'une surface libre plane et d'une interface horizontale également.

Sur une autre question de M. Miche, M. Lebreton dit que le fait de passer à la houle ne modifierait absolument pas les conclusions.

M. Miche en déduit par conséquent la nécessité, dans les deux cas, de considérer la turbulence pour rendre compte des faits.

M. le Président remercie les auteurs de cette communication.