

ÉTUDE SUR L'UTILISATION OPTIMALE DES NAPPES SOUTERRAINES*

PAR
H. LÉVY-LAMBERT **

A la différence des gisements de pétrole exploités par un concessionnaire unique, les nappes souterraines d'eau sont généralement caractérisées, pour des raisons juridiques et pratiques, par la multiplicité des personnes qui y prélèvent de l'eau.

La nécessité d'une organisation de ces prélèvements n'est contestée par personne; qu'elle soit « autoritaire » comme celle mise en place par le décret-loi du 8 août 1935, ou décentralisée comme celle qui pourrait résulter de l'application de la loi sur l'eau du 16 décembre 1964, cette organisation doit avoir des critères lui permettant d'orienter l'exploitation de la nappe en fonction de l'intérêt général.

La présente note a pour objet d'essayer sur un modèle simplifié, de concrétiser la différence entre l'exploitation anarchique et l'exploitation rationnelle d'une nappe, et de déterminer les critères à utiliser soit pour apprécier l'intérêt d'un nouveau forage et les débits à autoriser dans le cas de la gestion « autoritaire », soit pour fixer les redevances permettant aux individus de prendre eux-mêmes la bonne décision, dans le cas de la gestion « décentralisée ».

Nous verrons que la redevance à appliquer comporte deux termes : l'un égal ou analogue à la valeur de l'eau superficielle *in situ*, et l'autre, spécifique aux nappes souterraines, lié à l'abaissement du niveau de l'eau dans les forages voisins.

* Je tiens à remercier MM. GIRI, Emsellem, BERKALOFF, RAMBAUD et LEVEAU qui ont bien voulu lire une première version de cette étude et m'adresser leurs observations. Cette étude reste néanmoins une ébauche très imparfaite destinée à ouvrir une discussion sur la question. Par ailleurs, elle fait bien évidemment abstraction des aspects juridiques et politiques de la question.

** Ingénieur au Corps des Mines, rapporteur de la Commission de l'Eau.

Données de base

a) LOIS DE L'ÉCOULEMENT :

Le niveau piézométrique en un point j est, en l'absence de tout prélèvement :

$$h_j = h_{j_0} \quad (1)$$

Le rabattement en un point j dû à un forage prélevant un débit k_i est supposé de la forme suivante :

$$\Delta_{ij} = k_i l_{ij} \quad (2)$$

l_{ij} peut dépendre du temps, mais nous supposons pour simplifier qu'il ne dépend pas de k_i , c'est-à-dire que l'on ne retient que les deux premiers termes du développement limité de Δ_{ij} (*).

Dans ces conditions, le niveau piézométrique de l'eau en un point quelconque d'une nappe équipée de n forages sera :

$$h_j = h_{j_0} - \sum_{i=1}^n k_i l_{ij} \quad (3)$$

b) DÉPENSES DE PRODUCTION DE L'EAU :

Nous admettrons que les dépenses d'exploitation d_j d'un forage se composent d'un terme fixe (comprenant l'amortissement du forage) et d'un terme proportionnel au débit prélevé k_j et à la hauteur de pompage, qui est la différence entre le niveau du sol n_j et le niveau piézométrique h_j (on suppose cette différence positive, c'est-à-dire que le forage n'est pas artésien aux débits considérés) :

$$d_j = a_j + b k_j (n_j - h_j) \quad (**)$$

(*) Ceci implique qu'il soit continu et dérivable.

(**) On suppose que b est le même pour tous les forages, hypothèse qui n'est pas très éloignée de la réalité, et simplifie les résultats.

c) VALORISATION DE L'EAU :

Nous appellerons $V_j(k_j)$ la valorisation globale de l'eau par l'utilisateur du forage j qui prélève un débit k_j (*). Nous appellerons $v_j(k_j)$ la valorisation marginale de cette eau, définie par :

$$v_j(k_j) = \frac{\partial V_j(k_j)}{\partial k_j} \quad (5)$$

v_j est en général une fonction non croissante de k_j (loi des rendements décroissants).

**Utilisation
de forages existants - Régime
permanent**

Compte tenu des notations qui précèdent, la dépense de l'utilisateur j peut s'écrire :

$$d_j = a_j + bk_j(n_j - h_{j0}) + bk_j \sum_{i=1}^n k_i l_{ij} \quad (6)$$

Appelons z_j la profondeur naturelle de la nappe :

$$n_j - h_{j0} = z_j \quad (7)$$

la dépense s'écrit alors :

$$d_j = a_j + bk_j z_j + bk_j \sum_{i=1}^n k_i l_{ij} \quad (8)$$

Le revenu global de l'utilisateur j est donc, à une constante près :

$$R_j = V_j(k_j) - d_j \\ = V_j(k_j) - a_j - bk_j z_j - bk_j \sum_{i=1}^n k_i l_{ij} \quad (9)$$

a) GESTION INDIVIDUELLE :

Dans les conditions actuelles, chaque utilisateur gère son forage sans tenir compte des incidences de son action sur les autres utilisateurs d'eau. Si sa gestion est rationnelle, il s'arrangera pour que son revenu R_j soit maximal.

On peut donc écrire :

$$\frac{\partial R_j}{\partial k_j} = v_j - bz_j - b \sum_{i=1}^n k_i l_{ij} - bk_j l_{jj} = 0$$

Posons :

$$\frac{v_j}{b} - z_j = c_j \quad (10)$$

c_j est un coefficient fonction de k_j , positif si le forage j est utilisé, et qui a les dimensions d'une longueur, comme z_j .

On peut alors écrire :

$$\sum_{i=1}^n k_i l_{ij} + k_j l_{jj} = c_j \quad (11)$$

Cette équation permet à l'utilisateur j de fixer le débit k_j de son forage si les débits k_i ($i \neq j$) des autres forages sont fixés.

(*) Nous supposons que V_j est continue et dérivable deux fois par rapport à k_j . Elle peut par ailleurs être fonction du temps.

Comme nous disposons d'une équation similaire pour chaque forage, nous avons un système de n équations à n inconnues qui détermine le débit k_j de chaque forage j ($j = 1, 2 \dots n$), correspondant à l'équilibre.

Dans le cas de deux forages, il est aisé de montrer que les prélèvements convergent à partir d'une situation initiale quelconque vers la solution du système (11). Il serait intéressant d'étudier la question dans le cas de n forages, après avoir fait une hypothèse sur les règles de comportement des utilisateurs.

Cette solution correspond bien à un maximum du revenu de chaque utilisateur, puisque l'on a :

$$\frac{\partial^2 R_j}{\partial k_j^2} = v'_j - 2bl_{jj} < 0 \quad (12)$$

Bien entendu ce n'est un maximum absolu que si le débit des forages ainsi calculé est positif.

Le revenu à l'équilibre s'écrit, d'après (9), et (11) :

$$R_j = V_j(k_j) - a_j - bk_j z_j - bk_j (c_j - k_j l_{jj})$$

soit, compte tenu de (10),

$$R_j = V_j(k_j) - k_j v_j - a_j + bl_{jj} k_j^2 \quad (13)$$

b) GESTION COLLECTIVE :

Par gestion collective, nous entendons une gestion effectuée dans l'intérêt général, soit directement par ou pour la collectivité, soit indirectement par les propriétaires individuels, au moyen d'incitations adéquates à déterminer.

Nous admettrons que la gestion sera optimale si la somme des revenus des utilisateurs d'eau est maximale, cette somme étant étendue aux utilisateurs d'eau de la nappe et aux utilisateurs d'eau superficielle provenant des émergences de la nappe. Cette somme s'écrit, à une constante près :

$$R = \sum_j R_j - s \sum_j k_j \quad (14)$$

s étant la valeur de l'eau superficielle aux endroits où la nappe s'écoule, étant admis qu'en régime permanent le débit des émergences est réduit d'une quantité égale aux prélèvements.

Notons que la fonction à maximiser est la même s'il n'y a pas d'émergences ou si leur débit est bloqué : s est alors le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $\sum_j k_j = \text{Cte}$, qui exprime qu'en régime permanent le débit total prélevé est une donnée.

Compte tenu de (9), R s'écrit :

$$R = \sum_j V_j(k_j) - \sum_j a_j - b \sum_j k_j z_j \\ - b \sum_{ij} k_i k_j l_{ij} - s \sum_j k_j \quad (15)$$

A l'optimum, on doit avoir $(\partial R / \partial k_j) = 0$ pour toute valeur de j :

$$\frac{\partial R}{\partial k_j} = v_j - bz_j - b \sum_i k_i (l_{ij} + l_{ji}) - s = 0 \quad (16)$$

c'est-à-dire, en introduisant comme précédemment

$c_j = (v_j/b) - z_j$, et en affectant d'un astérisque le débit optimal :

$$\sum_{i=1}^n k^*_i (l_{ij} + l_{ji}) = c_j - \frac{s}{b} \quad (17)$$

Le système d'équations (17) remplace le système (11), et donne le débit optimal k^*_j de chaque forage j , lequel peut éventuellement être négatif, ce qui signifie que l'on a intérêt théoriquement à utiliser le forage j pour la réalimentation de la nappe (*).

La solution obtenue correspond bien à un maximum du revenu global si l'on a :

$$d^2R = \sum v'_j d^2k_j - b \sum_{ij} (l_{ij} + l_{ji}) dk_i dk_j < 0 \quad (18)$$

quels que soient les dk_i . Ceci semble être toujours le cas pour deux forages, mais pas toujours pour trois forages ou plus. Il conviendrait d'examiner les cas où cette solution n'est pas un optimum.

La valeur maximale de R défini en (15) peut s'écrire en remarquant que, compte tenu de (17),

$$\begin{aligned} \sum_{ij} k^*_i k^*_j l_{ij} &= \sum_{ij} k^*_i k^*_j l_{ji} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ij} k^*_i k^*_j (l_{ij} + l_{ji}) = \frac{1}{2} \sum_j k^*_j \left(c_j - \frac{s}{b} \right) \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{\max.} &= \sum_j V_j(k^*_j) - \sum_j a_j - b \sum_j k^*_j z_j \\ &\quad - \frac{1}{2} b \sum_j k^*_j c_j - \frac{1}{2} s \sum_j k^*_j \end{aligned}$$

soit, compte tenu de ce que $c_j = (v_j/b) - z_j$:

$$\begin{aligned} R_{\max.} &= \sum_j V_j(k^*_j) - \frac{1}{2} \sum_j k^*_j v_j \\ &\quad - \sum_j a_j - \frac{1}{2} b \sum_j k^*_j z_j - \frac{1}{2} s \sum_j k^*_j \quad (20) \end{aligned}$$

c) COMPARAISON GESTION INDIVIDUELLE-GESTION COLLECTIVE :

La perte économique afférente à la gestion individuelle est d'après (18), au troisième ordre près :

$$\Delta R = \frac{b}{2} \sum_{ij} (l_{ij} + l_{ji}) \Delta k_i \Delta k_j - \frac{1}{2} \sum_j v'_j \Delta^2 k_j \quad (21)$$

Δk_i étant la différence $k_i - k^*_i$ entre le débit k_i du forage i dans le cas de la gestion individuelle, défini par le système (11), et le débit k^*_i du même forage dans le cas de la gestion collective, défini par le système (17).

Il serait intéressant d'étudier le signe des Δk_i , dont certains peuvent être négatifs, et d'étudier la valeur de $\sum \Delta k_i$, dans le cas où l'on n'est pas en régime bloqué.

Pour faire la comparaison des deux solutions, on peut réécrire les systèmes (11) et (17) sous une forme différente :

— *gestion individuelle* (système (11)) :

$$2 k_j l_{jj} + \sum_{i \neq j} k_i l_{ij} = c_j \quad (22)$$

— *gestion collective* (système (17)) :

$$2 k^*_j l_{jj} + \sum_{i \neq j} k^*_i l_{ij} = c_j - \frac{s}{b} - \sum_{i \neq j} k^*_i l_{ji} \quad (23)$$

Sous cette forme, on voit clairement que l'on passe de la gestion individuelle à la gestion collective en introduisant au deuxième membre deux correctifs dont les effets s'ajoutent :

1. L'introduction du terme $-(s/b)$, si l'on tient compte de ce que c_j est égal à $(v_j/b) - z_j$, revient à diminuer v_j de s , ce qui n'a rien pour nous surprendre : s'il y a des émergences, l'avantage v_j que retire le consommateur j de la disposition d'un mètre cube supplémentaire doit être diminué de l'avantage s qu'un autre utilisateur en retirerait si le consommateur j laissait ce mètre cube s'écouler vers les émergences de la nappe. Ce terme correctif peut être introduit aisément dans la gestion individuelle, au moyen d'une redevance s'appliquant aussi bien aux eaux superficielles qu'aux eaux souterraines. Si le débit des émergences est nul ou ne peut varier librement (régime bloqué), s est alors le multiplicateur de Lagrange afférent à la relation $\sum k_i = \text{Cte}$ et est en quelque sorte la valeur de l'eau souterraine *in situ*, abstraction faite des phénomènes d'influence mutuelle des forages qui font l'objet du second terme;

2. L'introduction du terme $-\sum_{i \neq j} k^*_i l_{ji}$ a qualitativement le même effet que l'introduction du terme $-(s/b)$. Ce second terme correctif représente la dépense des autres utilisateurs due au rabattement entraîné par le forage considéré.

L'introduction de ce terme dans la gestion individuelle sous forme d'une redevance supplémentaire n'est pas difficile à réaliser pratiquement, bien qu'elle soit fonction de la position du forage considéré par rapport aux autres forages existants. En effet, ayant admis la linéarité des rabattements (formule (3)), si nous admettons par ailleurs leur réciprocité, c'est-à-dire $l_{ij} = l_{ji}$, ce terme correctif est alors égal au rabattement de la nappe au point considéré, dû aux autres forages, ce qui permet de le mesurer aisément. En pratique, on serait donc amené, suivant le degré de précision recherché, à diviser la nappe en un certain nombre de secteurs en fonction du niveau moyen de l'eau. Le coût du pompage de l'eau (amortissement, entretien et charges financières des pompes et frais d'énergie inclus) pouvant être estimé à environ 1 cent/m³ pour une hauteur de 20 m, il ne semble pas que les rabattements maximaux constatés actuellement sur la plupart des nappes conduisent à fixer ce terme correctif à une valeur significative. Mais il pourrait en être autrement à l'avenir, si les nappes souterraines sont intensément utilisées.

d) GESTION INDIVIDUELLE AVEC REDEVANCES :

Voyons si l'institution d'une redevance au mètre cube prélevé égale à :

$$r_j = s + b \sum_{i \neq j} k_i l_{ji} \quad (24)$$

(*) A condition, bien entendu, d'admettre que les données de base relatives au rabattement et aux dépenses s'appliquent sans changement aux débits négatifs.

permet bien d'aboutir à une gestion optimale de la nappe.

Partons donc d'une situation où les prélèvements sont quelconques, et cherchons le revenu R'_j du propriétaire du forage j . Il s'obtient en retranchant du revenu R_j donné par (9), la redevance qui est égale à $k_j r_j$:

$$R'_j = R_j - k_j r_j = V_j(k_j) - a_j - bk_j z_j - bk_j \sum_{i=1}^n k_i l_{ij} - sk_j - bk_j \sum_{i \neq j} k_i l_{ji} \quad (25)$$

La maximisation libre de R'_j par le propriétaire du forage j donne (nous admettons comme précédemment qu'il ne tient pas compte des répercussions de son action sur celle des autres) :

$$\frac{\partial R'_j}{\partial k_j} = v_j - bz_j - b \sum_{i=1}^n k_i l_{ij} - bk_j l_{jj} - s - b \sum_{i \neq j} k_i l_{ji} = 0 \quad (25 \text{ bis})$$

c'est-à-dire, compte tenu de la définition de c_j :

$$\sum_{i=1}^n k_i (l_{ij} + l_{ji}) = c_j - \frac{s}{b}$$

On retrouve bien des relations identiques aux relations (17) qui donnent les débits optimaux k^*_i en gestion collective. Mais il resterait à étudier, comme dans le cas de la gestion individuelle, après avoir fait une hypothèse sur la variation des redevances et le comportement des utilisateurs, si les prélèvements convergent vers la position d'équilibre définie par le système (17), quelle que soit la situation initiale.

Le revenu optimal de l'utilisateur j est à l'équilibre :

$$R'^*_j = V_j(k^*_j) - a_j - bk^*_j \left[z_j + \sum_{i=1}^n k^*_i (l_{ij} + l_{ji}) - k^*_j l_{jj} + \frac{s}{b} \right] = V_j(k^*_j) - k^*_j v_j - a_j + bl_{jj} k^{*2}_j \quad (26)$$

Il a la même forme que dans le cas de la gestion individuelle sans redevances, en remplaçant k_j par k^*_j .

EN CONCLUSION, en régime permanent, c'est-à-dire quand aucun forage nouveau n'est réalisé dans une nappe, on peut obtenir des particuliers qui possèdent des forages qu'ils se comportent conformément à l'intérêt général, sans recourir à un rationnement, en instituant une redevance comportant deux termes :

- un terme uniforme, égal le cas échéant à la valeur de l'eau souterraine aux émergences;
- un terme pouvant varier avec l'emplacement du forage, proportionnel sous certaines réserves à la dépression de la nappe au voisinage du point considéré.

Ces deux termes peuvent bien entendu varier dans le temps.

Comparaison de deux modes d'exploitation en régime permanent

Nous nous bornerons à comparer deux situations qui ne diffèrent que par l'adjonction d'un puits supplémentaire.

a) GESTION COLLECTIVE :

— Calcul des nouveaux débits :

Appelons k^*_i le débit optimal du puits i quand la nappe est équipée de $n - 1$ puits et k'^*_i le débit optimal de ce puits quand la nappe est équipée des mêmes $n - 1$ puits, et d'un puits supplémentaire n .

Les k^*_i sont définis par un système analogue à (17), soit en posant $l_{ij} + l_{ji} = m_{ij}$:

$$\sum_{i=1}^{n-1} k^*_i m_{ij} = c_j(k^*_j) - \frac{s}{b} \quad (j=1, 2 \dots n-1) \quad (27)$$

Les k'^*_i sont définis par le système suivant, qui dérive du précédent en remplaçant $n - 1$ par n :

$$\sum_{i=1}^n k'^*_i m_{ij} = c_j(k'^*_j) - \frac{s}{b} \quad (j=1, 2 \dots n) \quad (28)$$

Le système (28) peut s'écrire, en séparant les $n - 1$ premières relations de la n^e relation :

$$\sum_{i=1}^{n-1} k'^*_i m_{ij} = c_j(k'^*_j) - \frac{s}{b} - k'^*_n m_{nj} \quad (j=1, 2 \dots n-1) \quad (29)$$

et :

$$\sum_{i=1}^{n-1} k'^*_i m_{in} = c_n - \frac{s}{b} - k'^*_n m_{nn} \quad (30)$$

Soustrayons membre à membre (27) et (29). Il vient, en adoptant une écriture condensée (les lettres surmontées d'un trait représentant un vecteur $n - 1$ et les lettres surmontées de deux traits représentant une matrice $n - 1 \times n - 1$).

$$(\bar{k}^* - \bar{k}'^*) \bar{M} = k'^*_n \bar{m}_n + \bar{c}(k^*) - \bar{c}(k'^*)$$

soit, au second ordre près, en appelant \bar{C}' la matrice diagonale gradient de C^* :

$$\bar{k}^* - \bar{k}'^* = k'^*_n \bar{m}_n (\bar{M} - \bar{C}')^{-1} \quad (31)$$

(30) peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned} \bar{k}'^* \bar{m}_n &= c_n - \frac{s}{b} - k'^*_n m_{nn} \\ &= \bar{k}^* \bar{m}_n - k'^*_n \bar{m}_n (\bar{M} - \bar{C}')^{-1} \bar{m}_n \end{aligned}$$

d'où :

$$k'^*_n = \frac{c_n - (s/b) - \bar{k}^* \bar{m}_n}{m_{nn} - \bar{m}_n (\bar{M} - \bar{C}')^{-1} \bar{m}_n} \quad (32)$$

(32) nous donne le débit optimal k'^*_n . Portant cette valeur dans (31), nous obtiendrons le débit optimal k'^*_i des autres forages, inférieur ou au plus égal à leur débit optimal k^*_i en l'absence du forage n .

(*) D'après la définition de c_j , on a évidemment :

$$\bar{C}' = (1/b) \bar{V}'.$$

— Calcul de la nouvelle fonction économique :

Le revenu global optimal en gestion collective est donné par la formule (20), soit pour $n - 1$ forages :

$$R_{\max.} = \sum_{j=1}^{n-1} V_j(k^*_j) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} k^*_j v_j - \sum_{j=1}^{n-1} a_j - \frac{1}{2} b \sum_{j=1}^{n-1} k^*_j z_j - \frac{1}{2} s \sum_{j=1}^{n-1} k^*_j \quad (33)$$

et pour n forages :

$$R'_{\max.} = \sum_{j=1}^n V_j(k'^*_j) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n k'^*_j v_j - \sum_{j=1}^n a_j - \frac{1}{2} b \sum_{j=1}^n k'^*_j z_j - \frac{1}{2} s \sum_{j=1}^n k'^*_j \quad (34)$$

L'accroissement du revenu dû à l'adjonction d'un n^e forage est donc le suivant, au second ordre près :

$$\Delta R = R'_{\max.} - R_{\max.} = V_n(k'^*_n) - \frac{1}{2} k'^*_n v_n - a_n - \frac{1}{2} b k'^*_n z_n - \frac{1}{2} s k'^*_n - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} (k^*_j - k'^*_j) (v_j - k^*_j v'_j - b z_j - s)$$

Compte tenu de la définition de $c_j = (v_j/b) - z_j$, la seconde ligne ci-dessus peut s'écrire :

$$- \frac{b}{2} \sum_{j=1}^{n-1} (k^*_j - k'^*_j) (c_j - \frac{s}{b} - k^*_j c'_j)$$

$$\text{ou } - \frac{b}{2} (\bar{k}^* - \bar{k}'^*) (\bar{c} - \frac{s}{b} \bar{1} - \bar{k}^* \bar{c}')$$

c'est-à-dire, compte tenu de (27) et (31) :

$$- \frac{b}{2} k'^*_n \bar{m}_n (\bar{M} - \bar{C}')^{-1} (\bar{k}^* \bar{M} - \bar{k}'^* \bar{C}')$$

soit enfin, \bar{M} et \bar{C}' étant symétriques :

$$- \frac{b}{2} k'^*_n \bar{m}_n \bar{k}^* \quad \text{ou} \quad - \frac{b}{2} k'^*_n \bar{k}^* \bar{m}_n$$

L'accroissement de revenu peut donc s'écrire :

$$R'_{\max.} - R_{\max.} = V_n(k'^*_n) - a_n - \frac{b}{2} k'^*_n \left[\frac{v_n}{b} + z_n + \frac{s}{b} + \bar{k}^* \bar{m}_n \right] = V_n(k'^*_n) - k'^*_n v_n - a_n + \frac{b}{2} k'^*_n \left[c_n - \frac{s}{b} - \bar{k}^* \bar{m}_n \right]$$

on reconnaît entre crochets le numérateur de (32). On peut donc écrire enfin :

$$\Delta R = V_n(k'^*_n) - k'^*_n v_n - a_n + \frac{b}{2} k'^*_n {}^2 (m_{nn} - \bar{m}_n (\bar{M} - \bar{C}')^{-1} \bar{m}_n) \quad (35)$$

Le n^e puits sera intéressant pour la collectivité, en l'absence de tout forage ultérieur, si la quantité ci-dessus, actualisée à l'infini, est positive.

b) GESTION INDIVIDUELLE PURE :

En gestion individuelle, le n^e puits serait foré si le revenu correspondant à son utilisation optimale est positif. Cette dépense est donnée par la relation (13), en remplaçant j par n :

$$R_n = V_n(k_n) - k_n v_n - a_n + b l_{nn} k_n^2 \quad (36)$$

c) GESTION INDIVIDUELLE AVEC REDEVANCES :

Voyons si l'existence des redevances au mètre cube prélevé données par (24) permet bien d'obtenir que le n^e forage ne soit réalisé que s'il est intéressant pour la collectivité, c'est-à-dire si la différence $R'_{\max.} - R_{\max.}$ donnée par la relation (35), actualisée à l'infini, est positive.

Une difficulté se présente ici : les prélèvements, les rabattements et les redevances ne sont pas les mêmes avant et après la réalisation du n^e forage. Certes, nous savons d'après le II d) que si le forage est réalisé, son débit sera bien à l'équilibre le débit optimal k'^*_n qui est donné par (32), et le revenu de l'utilisateur, compte tenu de la nouvelle valeur des redevances, sera d'après (26) :

$$R'_n = V_n(k'^*_n) - k'^*_n v_n - a_n + b l_{nn} k'^*_n {}^2 \quad (37)$$

Cette expression, qui est formellement identique à (36), n'est pas identique à (35), et la différence, compte tenu de ce que $m_{nn} = l_{nn}$, est égale à :

$$\frac{b}{2} k'^*_n {}^2 \bar{m}_n (\bar{M} - \bar{C}')^{-1} \bar{m}_n$$

On retrouve la formule (35), en envisageant une suite continue d'états d'équilibre conduisant k'_n de la situation initiale ($k'_n = 0$) à la situation finale ($k'_n = k'^*_n$ valeur optimale).

Dans la pratique, si on a une nappe équipée de nombreux forages, on peut considérer que la réalisation d'un forage supplémentaire n'apporte pas de perturbations très grandes à la plupart des forages existants. La différence entre les formules (35) et (37) est donc faible, et on peut alors considérer que l'institution des redevances calculées ci-dessus permet de faire coïncider l'intérêt particulier de l'utilisateur n et l'intérêt général.

Mais si le forage prévu modifie d'une manière importante le niveau de la nappe, alors la formule (37) ne s'applique plus, car le n^e forage constitue alors une modification structurelle de la nappe dont la rentabilité doit se calculer en considérant une suite continue d'états d'équilibre.

Faut-il donc rejeter les redevances ?

Non, car il convient de remarquer que cette limitation de la validité des redevances aux modifications marginales est valable dans tous les secteurs de l'économie, et que l'on n'en considère pas pour autant que la régulation par les prix soit à rejeter globalement.

**Cas réel :
intérêt d'un nouveau forage
en régime variable**

Nous avons comparé dans le paragraphe précédent deux situations invariables qui différaient l'une de l'autre par l'adjonction d'un forage. La formule (35) ou à la rigueur la formule (37), permet de dé-

terminer laquelle de ces deux situations est la meilleure du point de vue de l'intérêt général.

Mais cette formule ne permet de déterminer si un forage supplémentaire est économiquement justifié que dans un problème statique où aucun forage supplémentaire n'est réalisé ultérieurement.

Dans le cas contraire, il faut tenir compte non seulement de l'influence du forage considéré sur les forages existants, mais aussi de son influence sur les forages futurs.

Ceci implique théoriquement que l'on connaisse exactement les caractéristiques de tous les forages futurs et leur date prévue de réalisation, afin d'en

déduire la valeur optimale du débit du forage considéré à chaque instant. Sous cette forme, le problème est inextricable, mais il est sans doute possible de se faire une idée de l'évolution probable du débit optimal du forage en extrapolant la variation de la redevance et du rabattement au point considéré. Il suffit alors de porter les résultats dans (37) et d'actualiser.

Un tel calcul est en principe faisable par des particuliers qui connaîtraient l'évolution future des redevances. Une telle hypothèse n'est plus ni moins absurde dans le domaine de l'eau que dans tout autre secteur de l'économie.

Discussion

Président : M. BANAL

M. le Président remercie M. LÉVY-LAMBERT de son intéressant exposé qui est le résultat d'une confrontation entre des problèmes pratiques et des considérations théoriques.

M. le Président précise que la justification sur un plan politique, de la tarification de l'usage de l'eau n'est pas dans l'objet de la S.H.F. et que la discussion sera donc limitée à la validité technique de la méthode préconisée par M. LÉVY-LAMBERT et aux objections éventuelles au calcul hydrodynamique sur lequel cette méthode est basée.

M. l'Inspecteur général René Lévy présente, toutefois, un intéressant historique de la législation relative aux eaux souterraines et, en particulier, aux eaux minérales qui, par leur valeur d'usage, ont été les plus convoitées dans le passé et doivent être protégées du gaspillage, du moins autant que les eaux souterraines non reconnues comme telles, mais dont elles constituent une partie importante. M. René Lévy remonte aux décrets de Napoléon I^{er} en 1810 et à la loi de 1856 et se plaît à rappeler la part qu'il a prise en 1935 dans cette réglementation dont l'étude avait été confiée au Service des Mines (décret-loi du 8 août 1935 : création de 5 périmètres de protection autour des sources domaniales de Vichy, dans lesquels il est interdit de forer sans autorisation, extension de la loi à l'Algérie, à la région parisienne pour les forages dépassant 80 mètres, à la région du Nord et du Pas-de-Calais, etc.). M. René Lévy rappelle enfin que, dans la réglementation allemande, il est interdit de chercher de l'eau sans une autorisation et une concession et que, pour le pétrole et l'acide carbonique, il n'y a aucune redevance.

M. LAGARDE (Institut Français du Pétrole) signale que le modèle mathématique que M. LÉVY-LAMBERT a utilisé pour l'étude de la nappe de l'Albien est un outil extrêmement puissant qui est utilisé en routine à l'Institut Français du Pétrole pour la description des états transitoires et accessoirement, si cela est utile, des états permanents. Ce modèle mathématique est une extension du simulateur analogique également utilisé en routine pour des études de nappes de pétrole ou d'eau, telle celle qui a fait l'objet d'une communication à la session de novembre 1963 de la S.H.F. (1). Etant donné l'intérêt que présente la connaissance des mouvements transitoires dans l'étude de la réalimentation artificielle des nappes, l'utilisation combinée de ces deux modèles permet une rapidité et une efficacité sans comparaison possible avec les modèles analogiques; le modèle analogique permet en effet d'étudier en très peu de temps de multiples combinaisons concernant par exemple la disposition des puits, la répartition de leur débit dans l'espace et le temps, les hypothèses sur les conditions aux limites; le modèle mathématique permet ensuite d'atteindre une meilleure définition de la solution ébauchée sur le modèle analogique dans le cas où la qualité des données, ou l'extension de la nappe (cas de l'Albien), justifient son utilisation. L'Institut Français du Pétrole est disposé à présenter une nouvelle communication sur l'utilisation de ces modèles mathématiques en liaison, ou en comparaison avec les solutions analogiques. M. LAGARDE insiste une nouvelle fois sur l'intérêt de ces modèles permettant simultanément l'étude des états transitoires et des états permanents, car les modèles analogiques les plus connus,

tels les cuves électrolytiques, réseaux de résistances, modèles à papier conducteur, ne permettent que l'obtention des mouvements permanents.

L'emploi de ces modèles suppose connues les caractéristiques des nappes étudiées; si cela n'est point, une étude préalable sur ces mêmes modèles peut les fournir par ajustement du modèle avec un état antérieur de la nappe connue (soit état initial, soit état transitoire). Une méthode, mise au point par M. JACQUARD à l'I.F.P. évite cette obligation en fournissant automatiquement, pour une nappe déterminée, la carte des transmissivités à partir de l'historique des pressions (ou des rabattements) dans les puits. Cette méthode déjà mise à l'épreuve (2) suppose évidemment une bonne qualité des mesures, et aussi une dispersion, dans l'espace et le temps, de ces mesures pour que les résultats soient valablement utilisables.

En conclusion, M. LAGARDE pense qu'il peut être très profitable pour tous de faire un rapprochement entre les techniques de l'eau et celles mises au point dans le domaine du pétrole, en particulier à l'Institut Français du Pétrole.

M. LÉVY-LAMBERT indique que les modèles à 1 000 mailles permettent d'étudier des problèmes où l'on n'est jamais en régime permanent, notamment de voir ce qui se passera jusqu'à l'an 2000 dans la nappe de l'Albien où, trente ans après la parution du décret de 1935 qui a entraîné un ralentissement très net des forages effectués, le niveau, toutefois, continue encore à baisser sous l'influence des forages anciens.

M. FERRARI présente les remarques suivantes :

En vue de faire coïncider l'intérêt particulier de l'exploitant considéré comme *homo oeconomicus* avec l'intérêt général vu sous l'angle de la valorisation maximale de l'ensemble de la nappe souterraine, M. LÉVY-LAMBERT propose l'institution d'une redevance au m³ prélevé, de forme binôme.

Le premier terme de cette redevance, uniforme et correspondant à la valeur de l'eau, ne soulève pas d'objection particulière, dans la mesure où l'on admet que l'eau souterraine est une matière première, donc pourvue d'une valeur économique en elle-même.

Le deuxième terme est variable et proportionnel à la dépression de la nappe au lieu du prélèvement, due aux autres forages. Il peut paraître de prime abord paradoxal que, du fait de ce terme, la redevance d'un exploitant croisse avec ce qui doit être considéré comme un préjudice causé par les forages tiers; cependant ce « paradoxe » n'est que la conséquence logique des hypothèses de linéarité et de réciprocité adoptées par l'auteur pour la relation entre le débit de pompage en un point de la nappe et le rabattement qu'il entraîne en un autre point. D'autre part, le deuxième terme ne devient significatif que pour des dépressions de la nappe importantes, traduisant une exploitation intensive;

(1) A. LAGARDE. — Un exemple de résolution analogique, à l'aide d'un réseau R.C. d'un problème de diffusivité dans une nappe aquifère *M. & T.* n° II/1963.

(2) P. JACQUARD. — Théorie de l'interprétation des mesures de pression. *Revue I.F.P.*, vol. XIX, n° 3, mars 1964.

mais alors, surtout dans le cas des nappes superficielles, l'équilibre de la nappe peut être mis en cause, les prélèvements devenant supérieurs aux apports; pour les pouvoirs publics, le problème n'est plus de viser à la valorisation maximale de la nappe, mais d'assurer sa conservation.

Ceci n'enlève rien à la qualité et à l'intérêt théorique de l'analyse de M. LÉVY-LAMBERT.

M. LÉVY-LAMBERT répond aux remarques de M. FERRARI : le deuxième terme de sa formule vaut environ 1 centime pour un rabattement de 20 m de la nappe; donc, pour les nappes proches du sol, ou bien le rabattement est faible et la redevance est négligeable, ou bien il est fort et il faut agir d'une manière brutale pour éviter que la nappe s'assèche complètement; mais, pour une nappe comme l'Albien, qui est à plus de 500 m de profondeur, le rabattement peut être beaucoup plus grand et atteindre plusieurs centaines de mètres : dans ces conditions, on obtient un terme qui peut ne plus être négligeable. Le niveau de l'Albien est, maintenant, un peu stabilisé et les dépenses entraînées par un tel rabattement sont très faibles (installations de pompes dans certains forages précédemment artésiens ou augmentations de la hauteur d'aspiration, donc de la puissance, dans les installations de pompage existantes).

M. le Président pose deux questions à M. LÉVY-LAMBERT :

1° Puisque la nappe de l'Albien n'est pas en équilibre, même en l'absence de tout nouveau forage, la recherche fine d'une optimisation dans l'hypothèse d'un régime permanent a-t-elle un sens?

2° La condition de constance du débit total prélevé reçoit-elle une importance suffisante dans le cas — sans doute fréquent — où l'on pompe déjà plus que le débit d'alimentation de la nappe?

M. LÉVY-LAMBERT répond :

— à la première question : que le caractère, en réalité pseudo-permanent, de la nappe, où des coefficients évoluent lentement, ne modifie pas sensiblement les résultats; les termes l_i de la formule étant fonction du temps, si aucun forage supplémentaire n'est réalisé, la redevance variera

lentement dans le temps, mais il ne semble pas que cela soit une objection à l'adoption de ce système.

— à la deuxième question : que la condition Σ (débits prélevés) = Cte joue un rôle important; elle conduit à une valeur « s » qui n'est pas connue *a priori*, mais qui est calculée *a posteriori*, en première approximation, en faisant la différence entre le prix de revient de l'eau amenée depuis l'endroit le plus éloigné où il faut aller la chercher, et les frais de production de l'eau dans la nappe, c'est-à-dire les dépenses de pompages; pour les nappes du sous-sol de Paris qui sont surexploitées, la valeur « s » peut atteindre jusqu'à 40 centimes par m³, compte tenu des dépenses nécessaires pour faire venir de l'eau potable de Montereau, ou même de plus loin, jusqu'à Paris.

En réponse à une question de M. René LÉVY, M. LÉVY-LAMBERT indique que la nappe de l'Albien est assez continue et se présente, en fait, d'après les résultats récents obtenus dans les puits pétroliers, sous la forme de trois nappes superposées et séparées par des niveaux argileux plus ou moins imperméables, mais discontinus. L'étude faite sur modèle mathématique a négligé l'existence de ces trois nappes distinctes en raison de la rareté des données propres à chacune d'elles : les forages de la région parisienne se sont généralement limités aux premiers sables, et n'ont pas traversé les trois niveaux sableux qui, d'ailleurs, n'existent pas sur tout le bassin; pour faire une étude détaillée, il serait nécessaire de tenir compte de l'existence de ces trois niveaux différents.

M. René LÉVY remarque l'analogie du bassin parisien avec le bassin de Saint-Yorre, où l'on a constaté plusieurs lentilles séparant des nappes dans lesquelles les forages étaient sans influences les uns sur les autres.

M. LÉVY-LAMBERT est pleinement d'accord et estime qu'on ne devrait pas traiter différemment, du point de vue économique, les eaux non minérales, les eaux minérales et même le pétrole, car l'utilisation rationnelle d'une nappe doit être faite de la même manière, simplement en utilisant des coefficients différents selon la valeur du constituant de la nappe.

M. René LÉVY souligne, enfin, que les calories ont aussi une valeur dans l'eau chaude souterraine.