

**PROBLÈMES  
DE STABILITÉ RELATIFS  
AUX BARRAGES A CONTREFORTS  
ET PLUS PARTICULIÈREMENT  
AUX BARRAGES A VOUTES  
MULTIPLES**

(première partie)

**PAR  
P. PATIN \*  
ET  
G. DEGEORGES \*\***

---

**Généralités**

---

Les caractéristiques les plus remarquables des barrages à contreforts sont la légèreté et l'élégance. A ces qualités sensibles à l'œil du profane, les barrages à voûtes multiples ajoutent un facteur rationnel qui satisfait profondément l'esprit du technicien.

A la vérité, on conçoit difficilement des dispositions où l'on tirerait un meilleur parti des possibilités de la matière et du choix des formes. Sauf en quelques points des voûtes, et encore pourrait-on y remédier aisément, l'ouvrage est partout sollicité en compression. Sans pour autant compromettre la sécurité du barrage, on pourrait même se dispenser des armatures que l'on prévoit généralement dans les voûtes sous la forme d'un « ferrailage de peau » et quelquefois à l'amont des contreforts pour des raisons constructives. Mais toujours, le coût des aciers d'armatures est très faible en regard de celui de l'ouvrage.

La stabilité des barrages à contreforts est essentiellement obtenue en inclinant par rapport à la verticale le plan moyen de l'organe étanche, cette inclinaison permettant de faire concourir la poussée hydrostatique à la stabilité.

Autre élément stabilisateur, le poids propre du barrage ne représente généralement qu'une fraction assez réduite de la résultante générale des forces agissant sur l'ouvrage.

Néanmoins, ce poids propre et corrélativement le volume du barrage sont en rapport direct avec le coût d'investissement. Il est donc essentiel d'utiliser au mieux les matériaux mis en œuvre.

---

\* Directeur Général de la Compagnie d'Ingénieurs et Techniciens d'Etudes, Paris.

\*\* Ingénieur-Conseil à la Compagnie d'Ingénieurs et Techniciens d'Etudes, Paris.

Or, il est facile de montrer qu'il est généralement conforme à l'optimum d'un projet, pour un poids propre donné, de reporter sur l'élément d'étanchéité amont — appelons-le masque — le plus de béton possible, au détriment des contreforts.

Il est également avantageux, pour une direction de résultante fixée, d'incliner assez fortement l'axe du masque sur la verticale.

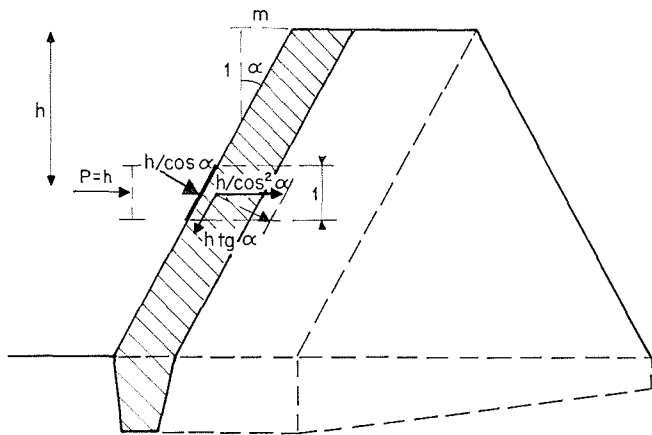
La première opération a pour effet de déplacer vers l'amont la résultante sans affecter les conditions de stabilité au glissement, et conduit par conséquent à une meilleure distribution des contraintes le long des joints horizontaux.

La seconde permet d'accroître la participation de la poussée de l'eau à la stabilité, et autorise par là une réduction du poids propre du barrage.

Bien entendu, on est rapidement limité dans cette voie par l'augmentation des contraintes dans le masque. Rappelons, en effet, en nous limitant au cas des voûtes, que la poussée hydrostatique agit sur les arcs horizontaux (s'ils sont circulaires) non seulement sous la forme d'une pression radiale uniforme, mais aussi par l'intermédiaire d'une pression parallèle à l'axe de symétrie des arcs, et proportionnelle au carré de l'inclinaison. L'influence du poids propre de ces arcs sur les contraintes est également d'autant plus grande que la voûte est plus inclinée (fig. 1).

On peut toutefois faire remarquer, à cet égard, que ni l'entrepreneur, ni plus tard l'exploitant, ne se plaindront d'un surcroît d'épaisseur des voûtes.

Du point de vue exécution, la mise en œuvre du béton des voûtes peut s'avérer assez laborieuse lorsque celles-ci sont minces, en raison des sujétions inhérentes aux armatures, aux dispositifs d'injection des joints, à la proximité des coffrages d'intrados et d'extrados. Une voûte donnée sera, au cours de la vie de l'ouvrage, d'autant moins sensible aux variations thermiques et vulnérable aux effets du gel qu'elle sera plus épaisse. A composition identi-



1/ Action de la pression hydrostatique sur un arc horizontal.  
Action of hydrostatic pressure on a horizontal arch.

que du béton, la voûte la plus épaisse sera celle qui présentera le plus de garanties d'étanchéité, notamment parce que le bétonnage y aura été réalisé dans les meilleures conditions.

En examinant les ouvrages actuellement en cours d'exploitation, on est étonné par l'écart sensible entre les contraintes maximales dans les voûtes et celles des contreforts. Alors qu'il est courant de relever des sollicitations de l'ordre de 100 kg/cm<sup>2</sup> dans les voûtes, il est par contre fort exceptionnel que les compressions dépassent 30 à 40 kg/cm<sup>2</sup> aux points les plus sollicités des contreforts.

Des raisons constructives peuvent certes être invoquées pour justifier les épaisseurs confortables données aux contreforts. En particulier, la nécessité de ménager l'appui des naissances des voûtes sur la face amont des contreforts. Egalement, le souci de ne pas imposer au rocher sur lequel repose l'ouvrage des contraintes locales trop importantes.

Mais il est facile de remédier à ces impératifs sans avoir recours à un engraissement systématique des contreforts.

En effet, on peut imaginer une définition particulière de la zone amont des contreforts conduisant à un épanouissement local de la partie qui reçoit la retombée des voûtes. C'est d'ailleurs ce que l'on fait très souvent dans les autres types d'ouvrages à contreforts. Il est également toujours possible d'asseoir chaque contrefort sur une semelle de répartition présentant une bonne rigidité transversale.

Cependant le problème des contraintes n'est pas le seul qui préoccupe l'ingénieur qui procède à l'étude d'un barrage à contreforts et particulièrement à celle d'un barrage à voûtes multiples.

Devant le dessin d'un ouvrage de ce type à la fois important et tant soit peu hardi, on ne peut manquer de s'interroger sur la sécurité d'ensemble offerte par un tel assemblage d'éléments en béton aussi frêles en apparence et soumis à l'énorme poussée de l'eau. Pris isolément, un contrefort jouit d'une stabilité transversale extrêmement précaire (en général il n'est pas ou peu encastré dans le rocher). On peut dire que s'il soutient les voûtes, il s'appuie également sur elles et c'est donc cette unique liaison qui confère à l'ensemble une rigidité convenable.

Qu'un seul des éléments constitutifs du barrage défaille, et tout l'ouvrage s'effondre alors instantanément comme un château de cartes. C'est dans ce danger que réside, nous semble-t-il, un des aspects fondamentaux du problème posé par la théorie des barrages à voûtes multiples.

Ce problème englobe en particulier celui de la stabilité élastique des contreforts, lesquels sont susceptibles, s'ils sont trop minces, de périr par voilement hors de leur plan de symétrie.

Ces deux phénomènes, déversement d'ensemble et instabilité élastique d'un contrefort, peuvent d'ailleurs coexister, le premier pouvant être la conséquence du second. En effet, si un contrefort amorce un mouvement de voilement, les voûtes adjacentes et de proche en proche les contreforts voisins peuvent être affectés par ce mouvement.

Dans le passé, afin de prévenir les risques de cette nature, on est fréquemment allé jusqu'à contreventer entre eux les contreforts à l'aide de traverses horizontales disposées en plusieurs points de leur surface latérale. Cette disposition probablement inutile dans la presque totalité des cas, avait le double inconvénient d'être à coup sûr onéreuse et inesthétique.

Ce sont ces problèmes de stabilité que nous nous proposons d'aborder dans les lignes qui suivent.

Bien des hypothèses devront être émises au cours de l'étude qui vise avant tout à préciser des ordres de grandeur.

Nous ne parlerons pas de la stabilité élastique propre des voûtes qui a préoccupé divers auteurs, lesquels ont établi les formules donnant la charge critique. En fait, on peut dire que cette stabilité est toujours convenablement assurée en pratique pour les dimensionnements usuels des voûtes de barrages.

La première partie de notre étude traitera de la stabilité d'ensemble d'un barrage à voûtes multiples devant le danger de déversement généralisé. Les contreforts seront alors supposés suffisamment rigides pour ne pas flamber au cours du déversement.

Au contraire, la seconde partie sera consacrée à l'examen de la stabilité élastique des contreforts.

Dans une troisième partie, nous effectuerons une application qui montrera l'ordre de grandeur des coefficients de sécurité.

Enfin, dans une quatrième partie, nous examinerons brièvement le cas des barrages à contreforts et à masque d'étanchéité non constitué par des voûtes.

## PREMIÈRE PARTIE

### Stabilité d'ensemble au déversement d'un barrage à voûtes multiples

Nous considérons dans ce qui suit un barrage à voûtes multiples, sur la définition duquel nous préciserons les points suivants :

- toutes les voûtes et tous les contreforts sont identiques, y compris en ce qui concerne leur hauteur;
- les faces latérales des contreforts sont triangulaires et leur épaisseur est uniforme;

— les voûtes sont des cylindres elliptiques dont les sections horizontales sont circulaires et d'épaisseur constante. L'épaisseur de la voûte varie linéairement de la crête au pied du barrage.

Afin d'entrer dans le détail des calculs numériques, il est indispensable de fixer ces données. Toutefois, il n'y aurait aucune difficulté (dans le principe tout au moins) à étendre les calculs qui suivent à un barrage répondant à une définition différente.

#### A - HYPOTHÈSES DE L'ÉTUDE :

Nous nous appuyons, en outre, sur les hypothèses suivantes :

##### 1° Distribution de la poussée hydrostatique :

En quasi-totalité, la poussée de l'eau s'exerce directement sur les voûtes. Dans le cas général actuel, les poussées de celles-ci sont équilibrées, non seulement par la réaction des contreforts, mais aussi par le rocher situé sous leur fondation propre (fig. 2).

On peut calculer approximativement la part de la poussée totale absorbée par la fondation propre d'une voûte.

La composante horizontale  $H$  de cette force apparaît sous forme d'effort tranchant à la base des consoles que l'on met en évidence dans un calcul d'ajustement de clé par exemple.

Géométriquement,  $H$  est donnée par le volume compris entre la surface de charge totale (laquelle est à génératrices rectilignes) et la surface de charge intéressant les arcs.

La composante verticale  $V$  s'obtient en prenant l'intégrale des contraintes normales agissant sur la couronne circulaire, trace de l'appui de la voûte sur le rocher. On sait que généralement on traite dans le calcul l'ensemble voûtes-contreforts comme un monolithe auquel on applique l'hypothèse de Navier relative à la répartition linéaire des contraintes le long de la surface de fondation.

La fraction de poussée totale absorbée directement par la fondation des voûtes est loin d'être négligeable devant la poussée totale.

Néanmoins, on supposera que tout se passe comme si la poussée de l'eau était intégralement reportée sur la face amont du contrefort.

Outre qu'un calcul plus exact serait fort complexe, nous sommes ainsi assurés de nous placer dans des conditions défavorables vis-à-vis de la réalité. D'autre part, ce calcul deviendrait rigoureux si l'on articulait correctement les voûtes à leur base, solution que nous considérons comme souhaitable, puisqu'elle éviterait des contraintes de flexion et de traction, et la fissuration de la base au pied amont des voûtes.

##### 2° Mode d'appui des contreforts :

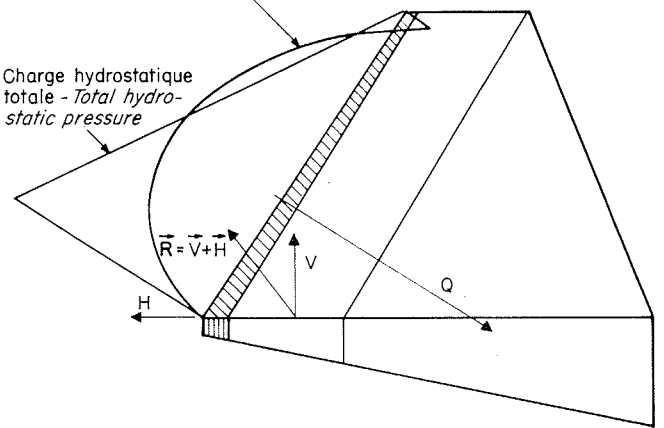
Nous avons dit qu'en général les contreforts sont simplement posés sur le rocher. La surface de contact béton-rocher doit de ce fait être considérée comme une liaison unilatérale apte à transmettre exclusivement des contraintes de compression.

Si le contrefort était simplement sollicité par une flexion latérale, cette dernière donnerait lieu, au niveau de l'appui, à des extensions incompatibles avec ce mode de liaison.

Mais comme nous examinons la stabilité en charge de l'ouvrage, un mouvement de déversement

Charge supportée par les arcs - Load borne by arches and transmitted to the buttress

Charge hydrostatique totale - Total hydrostatic pressure



2/ Répartition de la charge entre le contrefort et la fondation propre de la voûte.

Load distribution between buttress and arch foundation.

éventuel ne pourra s'amorcer que lorsque le barrage sera déjà en état de charge avancé.

Dans ces conditions, le couple de flexion le long de la base, consécutif à la rotation du contrefort, se superposera à l'effort de compression initial. Tant que le rapport entre cet effort de compression et le moment de flexion conservera une valeur assez grande (dont la limite est facile à calculer : c'est le moment où apparaissent des tractions) il sera légitime de regarder la liaison béton-rocher comme susceptible de transmettre ce couple.

Ce sera le cas dans notre étude où les mouvements envisagés autour de la position d'équilibre seront toujours très petits.

Le rocher sera considéré comme un matériau élastique jouissant des propriétés d'homogénéité et d'isotropie. Nous ferons usage des résultats obtenus par Vogt en partant des formules classiques de Boussinesq.

Nous ne nous préoccupons toutefois que des relations entre moment et rotation et ferons ainsi abstraction des déformations complémentaires dues à l'effort tranchant, faibles d'ailleurs.

##### 3° Hypothèse relative aux voûtes :

Nous regarderons les voûtes comme étant constituées par un empilage d'arcs horizontaux incapables de se transmettre mutuellement des efforts de cisaillement dans leurs plans de séparation.

Cet artifice, bien souvent utilisé dans les calculs de barrages, revient à négliger la variation d'énergie due à l'existence effective de ces cisaillements et conduira également à des résultats péchant par excès de pessimisme.

Un calcul analogue mais plus complexe pourrait être fait en utilisant des arcs inclinés, correspondant mieux au mode de travail réel des voûtes.

##### 4° Hypothèse concernant l'ordre de grandeur des déplacements :

Les déplacements seront déterminés par la connaissance d'un certain nombre de paramètres  $a_1, a_2, \dots$ . Nous supposons que ces paramètres sont des quantités toujours assez petites pour que l'on puisse

valablement faire abstraction, dans tous les calculs, des termes où ils interviennent affectés d'un degré supérieur au second.

La stabilité de l'ouvrage devant finalement être vérifiée, il suffit pour les besoins de notre raisonnement, d'imaginer des déplacements aussi petits que nous le désirons. En réalité, si la condition de stabilité n'était pas remplie, les déformations iraient en s'accroissant et un nouvel état d'équilibre pourrait alors s'établir, en raison précisément de l'intervention effective des termes de degré supérieur au second dont le rôle serait de moins en moins négligeable.

Mais il est bien évident que nos calculs seraient impuissants à représenter les déplacements.

Nous conviendrons donc de définir la charge critique, non pas comme étant celle qui provoquerait la ruine de l'ouvrage, mais comme celle susceptible d'amorcer un mouvement.

**B - BASES THÉORIQUES DE L'ÉTUDE :**

Les calculs qui suivent s'appuient sur le théorème de Lejeune-Dirichlet relatif à la stabilité de l'équilibre. Rappelons brièvement ce théorème qui indique que lorsque les forces appliquées à un système matériel, et les forces intérieures à ce système, dérivent d'un potentiel total V, les positions d'équilibre stable du système sont celles pour lesquelles ce potentiel total est minimal.

Ici, les forces intérieures seront les contraintes internes de l'ouvrage. On sait qu'elles dérivent d'un potentiel U.

Les forces appliquées (poussée de l'eau, réaction du sol), la première étant une conséquence de la pesanteur, la seconde de caractère élastique, dérivent également d'un potentiel U'.

Le potentiel U' est égal au travail total T, changé de signe, des forces appliquées :  $U' = -T$ .

$$V = U + U' = U - T \quad (1)$$

Les positions d'équilibre stable seront celles pour lesquelles la variation de V s'annule :

$$\delta(U - T) = 0 \quad (2)$$

**C - STABILITÉ AU DÉVERSEMENT D'UN SYSTÈME CONSTITUÉ D'UN CONTREFORT ET DES DEUX VOUTES ADJACENTES (fig. 3) :**

Les appuis A et B sont supposés fixes. Conformément à ce qui a été dit, nous ne prenons pas en compte la déformation propre du contrefort dans cette première partie, cette déformation étant considérée comme accessoire devant le phénomène de déversement.

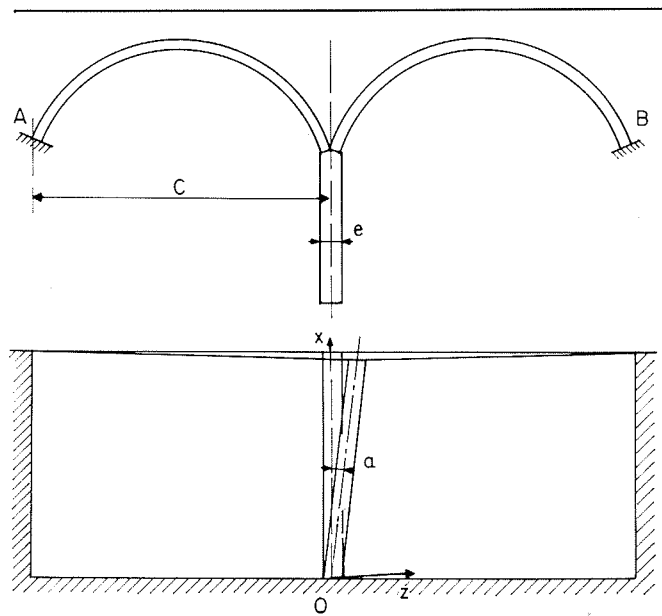
Le problème sera donc défini par la connaissance d'un seul paramètre a, angle formé par le plan de symétrie du contrefort déversé, avec la verticale.

L'abscisse z d'un point M' de ce plan sera donnée par (fig. 4) :

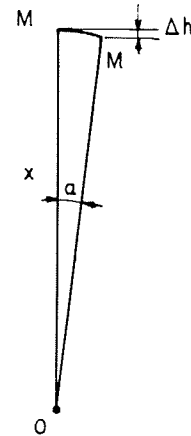
$$z = x \sin a \quad \text{soit} \quad z = ax \quad (a \approx \sin a)$$

L'abaissement  $\Delta h$  du point M' par rapport à son altitude initiale s'écrit :

$$\Delta h = x(1 - \cos a)$$



3/



4/

(soit, en négligeant les quantités d'ordre supérieur à 2),

$$\Delta h = \frac{a^2 x}{2}$$

**1° Travail des forces appliquées :**

a) *Poussée de l'eau* (fig. 5). —  $p_0$  représente la charge unitaire agissant à la base du contrefort.

Nous supposons qu'il s'agit de la charge critique, le coefficient de sécurité étant  $k$ , c'est-à-dire que la charge réelle sera  $p_r = hc = p_0/k$ . (La densité de l'eau étant prise égale à l'unité.)

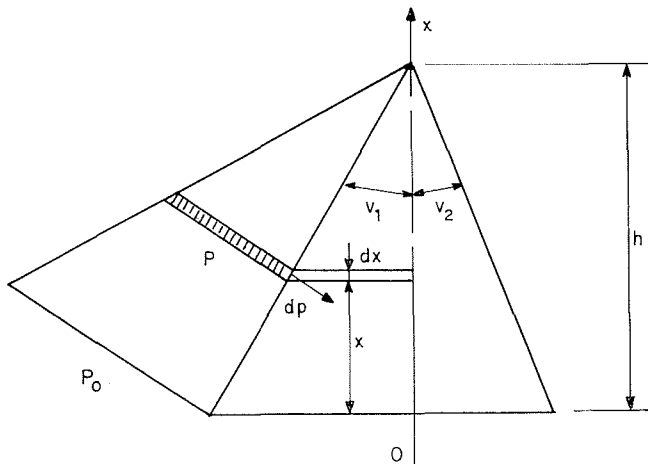
Toutes les charges étant proportionnelles, on aura :

$$p = p_0 \frac{(h-x)}{h}$$

L'effort qui s'exerce sur la tranche de contrefort d'épaisseur  $dx$  s'écrit :

$$dp = p \frac{dx}{\cos V_1} = p_0 \frac{(h-x)}{h} \frac{dx}{\cos V_1}$$

dont les composantes ont respectivement pour valeur :



b) *Poids propre du contrefort.* —  $dP$  étant le poids de la tranche  $dx$ , on a :

$$dP = b e \rho dx$$

où  $b$  est la longueur de la section horizontale du contrefort au niveau  $x$  et  $e$  sa largeur,  $\rho$  est le poids spécifique du béton.

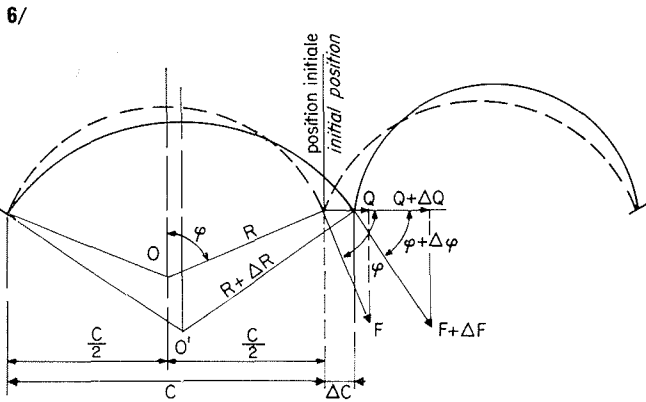
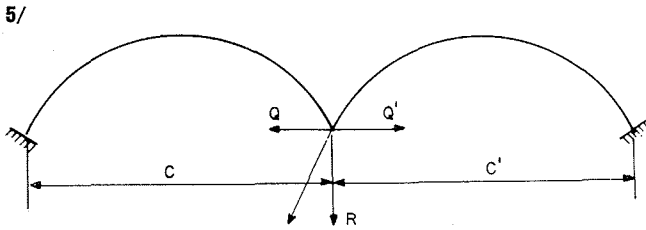
On a d'ailleurs :

$$b = (f_1 + f_2) (h - x) \quad (f_2 = \text{tg } V_2)$$

$$dP = e \rho (f_1 + f_2) (h - x) dx$$

Le travail fourni par le poids propre est donc :

$$T_2 = \frac{e \rho (f_1 + f_2)}{2} a^2 \int_0^h x (h - x) dx = \frac{e \rho (f_1 + f_2)}{12} h^3 a^2 \quad (4)$$



7/ Déformation des voûtes. Arch deformation.

c) *Poussée latérale consécutive à la variation de courbure des voûtes adjacentes.* — Tant que la symétrie du système voûtes-contrefort est rigoureuse, la résultante  $R$  des efforts supportés par le contrefort agit dans le plan médian de celui-ci.

Les composantes normales au contrefort  $Q$  et  $Q'$  s'équilibrent alors exactement.

Si les cordes  $c$  et  $c'$  deviennent inégales,  $R$  est pratiquement inchangée, mais  $Q$  et  $Q'$  ne s'équilibrent plus (fig. 6). Leur résultante est alors, comme le montrent les calculs qui suivent, une fonction croissante du rapport  $c'/c$ .

Or, le déversement du contrefort a précisément comme conséquence de détruire la symétrie, donc de donner naissance à cet effort transversal dont nous allons calculer une valeur approximative.

Au préalable nous admettons qu'au cours de leur déformation, les arcs conservent la même longueur suivant leur fibre moyenne.

Une telle hypothèse apparaît d'autant plus légitime que l'effort normal qui les sollicite ne subit lui-même qu'une très faible variation relative.

En outre, nous supposons que la nouvelle figure d'équilibre est également circulaire. Il ne nous paraît pas inutile d'insister sur les objections que peut soulever cette seconde hypothèse qui, toutefois, dans le cadre de la présente étude, a cependant le mérite de conduire à des résultats exploitables pour la suite des calculs.

On sait que dans un arc mince, circulaire et encastré à ses naissances, les moments de flexion restent faibles, la courbe des pressions ne s'éloignant nulle part beaucoup de la fibre moyenne (sauf aux naissances).

Les déformations autour de la forme initiale sont donc également faibles. Modifier la longueur de la corde de l'arc sous charge, revient à introduire des flexions, donc des déformations parasites qui, du fait de l'existence d'un effort normal toujours important dû à la poussée de l'eau, peuvent provoquer une modification sensible de l'allure de la déformée. Ces déformations disparaîtraient si la voûte était articulée.

La signification des divers paramètres du calcul est indiquée sur le croquis (fig. 7).

— suivant  $ox$ , c'est-à-dire la verticale :

$$dp_v = p \frac{dx}{\cos V_1} \sin V_1 = p_0 \text{tg } V_1 \frac{(h-x)}{h} dx = p_0 f_1 \frac{(h-x)}{h} dx$$

(en posant  $\text{tg } V_1 = f_1$ );

— suivant l'horizontale :

$$dp_{II} = p \frac{dx}{\cos V_1} \cos V_1 = p_0 \frac{(h-x)}{h} dx$$

Au cours du mode de déplacement envisagé, seule la composante verticale accomplit un travail, donné par :

$$dT_1 = dp_v \Delta h = \frac{p_0 f_1}{2h} a^2 x (h-x) dx$$

d'où :

$$T_1 = \frac{p_0 f_1 a^2}{2h} \int_0^h x (h-x) dx = \frac{p_0 f_1 h^2 a^2}{12} \quad (3)$$

La courbure de la voûte de gauche diminue, celle de la voûte de droite augmente.

On a :  $Q = F \cos \varphi$  où  $F$  est très peu différent du produit  $\bar{\omega}R$ , et  $\bar{\omega}$  étant la pression de l'eau au niveau de l'arc considéré (et en ne tenant compte que de la pression radiale uniforme) :

$$\left( \bar{\omega} = \frac{p_0}{c} \frac{h-x}{h} \right)$$

$$Q = \bar{\omega}R \cos \varphi$$

En différenciant on obtient :

$$\Delta Q = \bar{\omega} (\Delta R \cos \varphi - R \sin \varphi \Delta \varphi)$$

La première hypothèse permet d'écrire :

$$R\varphi = S \quad (S \text{ étant la demi-longueur de l'arc})$$

On en déduit :

$$\Delta R = -\frac{S}{\varphi^2} \Delta \varphi$$

et :

$$\begin{aligned} \Delta Q &= -\bar{\omega} \left( \frac{S \cos \varphi}{\varphi^2} + R \sin \varphi \right) \Delta \varphi \\ &= -\bar{\omega} \left( \frac{s \cos \varphi}{\varphi^2} + \frac{c}{2} \right) \Delta \varphi \end{aligned}$$

Exprimons  $\Delta \varphi$  en fonction du déplacement  $\Delta z$  ( $\Delta z = \Delta c$ ) :

$$2 R \sin \varphi = c \quad \text{ou} \quad 2 S \frac{\sin \varphi}{\varphi} = c$$

Prenons les différentielles des deux membres :

$$2 S \left( \frac{\varphi \cos \varphi - \sin \varphi}{\varphi^2} \right) \Delta \varphi = \Delta c \quad (5)$$

d'où finalement, en posant :

$$A = \frac{\cos \varphi + \varphi \sin \varphi}{\sin \varphi - \cos \varphi}$$

on obtient :

$$\Delta Q = \frac{\bar{\omega} A}{2} \Delta z$$

Les calculs qui précèdent s'appliquent également à l'autre arc pour lequel :

$$\Delta z' = -\Delta z$$

et :

$$\Delta Q' = -\frac{\bar{\omega} A}{2} \Delta z$$

La résultante des deux forces a finalement pour valeur :

$$\Delta q = \Delta Q - \Delta Q' = \bar{\omega} A \Delta z \quad (6)$$

$\Delta q$  est proportionnel à  $\Delta z$  (ce résultat n'étant dû qu'à l'assimilation des déformations à de très petites quantités).

L'expression du travail accompli par  $\Delta q$  au cours des déplacements est donnée par l'intégrale :

$$\begin{aligned} \Delta T_3 &= \int_0^{\Delta z} \Delta q d(\Delta z) = \\ &= \frac{p_0 A (h-x)}{ch} \int_0^{\Delta z} \Delta z d(\Delta z) = \frac{p_0 A (h-x)}{2 ch} \Delta z^2 \end{aligned}$$

$$\left( \text{puisque } \bar{\omega} = \frac{p_0 (h-x)}{ch} \right)$$

Si l'arc considéré est compris entre les tranches horizontales aux cotes  $x$  et  $dx$ , la valeur ci-dessus devient :

$$dT_3 = \frac{p_0 A (h-x)}{2 ch} \Delta z^2 dx$$

d'où :

$$T_3 = \frac{p_0 A a^2}{2 ch} \int_0^h (h-x) x^2 dx$$

soit :

$$T_3 = p_0 \frac{A h^3}{24 c} a^2 \quad (7)$$

d) *Travail accompli par la réaction du rocher le long de la face d'appui des contreforts.* —  $b$  et  $c$  étant respectivement, rappelons-le, la longueur et la largeur du rectangle d'appui des contreforts, et l'axe du couple étant parallèle à  $b$ , Vogt a montré que la rotation  $\alpha$  de la surface de contact béton-rocher, et le moment  $M$  dû à la réaction du rocher, sont liés par la relation :

$$M = b e^2 \alpha E_r \frac{m^2}{m^2 - 1} \frac{\pi}{18}$$

à condition toutefois que le rapport  $b/e$  soit assez grand, ce qui est notre cas.

Dans cette formule,  $E_r$  est le coefficient d'élasticité longitudinal du rocher et  $m = (1/\mu)$  est l'inverse du coefficient de Poisson de ce rocher.  $M$  étant proportionnel à la rotation angulaire  $\alpha$ , le travail accompli par ce couple aura pour valeur :

$$\begin{aligned} T_4 &= - b e^2 E_r \frac{m^2}{m^2 - 1} \frac{\pi}{18} \int_0^\alpha \alpha d\alpha \\ &= - b e^2 E_r \frac{m^2}{m^2 - 1} \frac{\pi}{36} \alpha^2 \end{aligned}$$

or :

$$\alpha = a$$

et :

$$T_4 = - b e^2 E_r \frac{m^2}{m^2 - 1} \frac{\pi}{36} a^2$$

Il s'agit toujours d'un travail résistant, ce qui justifie le signe moins. Remarquons qu'un tel résultat est très optimiste à l'égard de la valeur réelle de  $T_4$ . Admettre que la rotation  $\alpha$  au niveau de la fondation est égale à l'inclinaison  $a$  du contrefort revient à fortement surestimer l'intervention de la fondation. En effet, la flexion latérale propre du contrefort, due justement au couple élastique  $M$ , atténuera beaucoup l'amplitude de la rotation réelle et par suite la valeur de  $T_4$ .

Nous écrirons donc :

$$T_4 = -\epsilon b e^2 E_r \frac{m^2}{m^2 - 1} \frac{\pi}{36} a^2 \quad (8)$$

$\epsilon$  étant un coefficient numérique, inférieur à l'unité, que nous évaluerons au moment de l'application numérique.

e) *Travail résultant des forces appliquées.* — Il est égal à la somme :

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \quad (9)$$

2° *Variation du potentiel interne du système :*

Le contrefort étant ici supposé incapable de se voiler, seule l'énergie interne des voûtes est affectée par le déversement.

Sous l'effet de la seule poussée de l'eau, cette énergie interne a une certaine valeur  $U_1$ . Lorsque les appuis se rapprochent ou s'écartent l'un de l'autre, l'énergie interne varie et atteint la valeur  $U_2$ .

La variation  $U = U_2 - U_1$  est la quantité cherchée.

Nous admettrons que le principe de superposition est valable dans le cas présent et considérerons que tout se passe comme si  $U$  était identique à la variation d'énergie interne d'un arc, où seule agirait la force tendant à modifier la longueur de la corde.

A toute variation  $\Delta z$  imposée à la longueur de la corde d'un arc circulaire correspond une modification  $\Delta\phi$  de l'angle au centre  $\phi$ , et réciproquement.

Or, les hypothèses précédemment émises au sujet du mode de déformation de l'arc impliquent entre  $\Delta z$  et  $\Delta\phi$  la relation :

$$\Delta\phi = \frac{\phi}{2 R (\phi \cos \phi - \sin \phi)} \Delta z$$

ou :

$$\Delta\phi = B \Delta z \quad (10)$$

avec :

$$B = \frac{\phi}{2 R (\phi \cos \phi - \sin \phi)}$$

Dans le calcul qui suit, on ne tiendra pas compte de l'influence de l'effort normal et de l'effort tranchant, faible pour ce cas de charge, devant celle du moment fléchissant.

Compte tenu des conventions de signes précisées sur la figure 8, on a :

$$M_s = C + QR (\cos \alpha - \cos \phi)$$

$E$  étant le module d'Young du béton et  $I$  le moment d'inertie de la section de l'arc considéré, le théorème de Castigliano permet d'écrire :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\delta U}{\delta C} &= \int_0^s \frac{M}{EI} \frac{\delta M}{\delta C} ds = -\Delta\phi \\ \frac{\delta U}{\delta Q} &= \int_0^s \frac{M}{EI} \frac{\delta M}{\delta Q} ds = \Delta z \end{aligned} \right.$$

Les intégrales étant étendues à toute la longueur de l'arc ( $2\phi$ ).

$$\frac{\delta M}{\delta C} = 1; \quad \text{et} \quad \frac{\delta M}{\delta Q} = R (\cos \alpha - \cos \phi); \quad ds = R d\alpha$$

d'où :

$$\left\{ \begin{aligned} 2 \int_0^\phi \frac{1}{EI} [C + QR (\cos \alpha - \cos \phi)] R d\alpha &= -\Delta\phi \\ 2 \int_0^\phi \frac{1}{EI} [C + QR (\cos \alpha - \cos \phi)] R (\cos \alpha - \cos \phi) R d\alpha &= \Delta z \end{aligned} \right.$$

et en intégrant :

$$\left\{ \begin{aligned} C\phi + QR (\sin \phi - \phi \cos \phi) &= -\frac{EI\Delta\phi}{2R} \\ C (\sin \phi - \phi \cos \phi) + QR \left( \frac{\phi}{2} + \phi \cos^2 \phi - \frac{3}{4} \sin 2\phi \right) &= \frac{EI\Delta z}{2R^2} \end{aligned} \right.$$

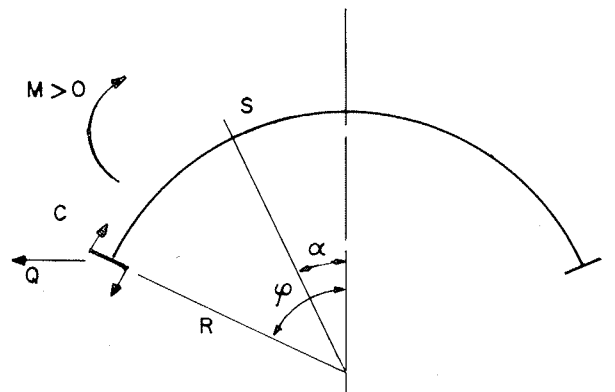
En tenant compte de la relation (10) et en posant :

$$\sin \phi - \phi \cos \phi = X;$$

$$\frac{\phi}{2} + \phi \cos^2 \phi - \frac{3}{4} \sin 2\phi = Y$$

on obtient le système linéaire :

$$\left\{ \begin{aligned} C\phi + QRX &= -B \frac{EI\Delta z}{2R} \\ CX + QRY &= \frac{EI\Delta z}{2R^2} \end{aligned} \right.$$



dont la résolution donne :

$$\left\{ \begin{aligned} C &= -\frac{EI}{2R^2} \frac{X + RB^2Y}{Y - X^2} \Delta z \\ Q &= +\frac{EI}{2R^3} \frac{RBX + \varphi}{Y - X^2} \Delta z \end{aligned} \right.$$

Les formules de Clapeyron donnent la variation d'énergie interne qui s'écrit :

$$U = \frac{C(-\Delta\varphi)}{2} + \frac{Q\Delta z}{2}$$

c'est-à-dire :

$$U = \frac{EI}{4R^2(\varphi Y - X^2)} \left( 2BX + RB^2Y + \frac{\varphi}{R} \right) \Delta z^2$$

Pour un arc compris entre deux plans horizontaux distants de  $dx$ , l'égalité ci-dessus donne (I représentant le moment d'inertie de l'arc d'épaisseur unité) :

$$dU = \frac{EI}{4R^2(\varphi Y - X^2)} \left( 2BX + RB^2Y + \frac{\varphi}{R} \right) \Delta z^2 dx$$

soit, pour l'ensemble de la voûte :

$$U = \int_0^h \frac{EI}{4R^2(\varphi Y - X^2)} \left( 2BX + RB^2Y + \frac{\varphi}{R} \right) \Delta z^2 dx$$

En général, les paramètres  $R$  et  $\varphi$  sont très légèrement variables sur la hauteur d'une voûte. Mais nous négligerons cette variation en prenant dans les calculs une valeur moyenne de ces paramètres.

L'intégrale ci-dessus peut alors s'écrire :

$$U = \frac{EI}{4R^2(\varphi Y - X^2)} \left( 2BX + RB^2Y + \frac{\varphi}{R} \right) \int_0^h I \Delta z^2 dx \quad (11)$$

Or :  $I = (e_v^3/12)$ ;  $e_v$  = épaisseur de l'arc au niveau considéré.

Nous avons défini  $e_v$  comme une fonction linéaire de la cote  $x$ , de sorte que l'on peut écrire :

$$e_v = \frac{e_0(h-x)}{h} + e_n \frac{x}{h} \quad (12)$$

$e_0$  étant l'épaisseur à la base et  $e_n$  l'épaisseur en crête.

d'où :

$$I = \frac{1}{12h^3} [e_0(h-x) + e_n x]^3$$

et :

$$U = \frac{E}{48R^2(\varphi Y - X^2)h^3} \left( 2BX + RB^2Y + \frac{\varphi}{R} \right) \times \int_0^h [e_0(h-x) + e_n x]^3 x^2 dx$$

qui donne après intégration et en doublant la valeur obtenue pour tenir compte de l'égalité de la varia-

tion du potentiel interne dans chacune des deux voûtes :

$$U = \frac{Eh^3 [2BX + RB^2Y + (\varphi/R)]}{48R^2(\varphi Y - X^2)} \times \left( \frac{e_0^3}{30} + \frac{e_0^2 e_n}{10} + \frac{e_0 e_n^2}{5} + \frac{e_n^3}{3} \right) a^2 \quad (13)$$

### 3. Conditions d'équilibre :

Les quantités  $U$  et  $T$  sont l'une et l'autre proportionnelles au carré de l'amplitude  $a$ , caractérisant le déversement. Ecrivons que le potentiel est minimal pour une valeur  $p_0$  de la charge.

La relation (2)  $\delta(U - T)$  se réduit ici à  $U - T = 0$ , soit, compte tenu des calculs qui précèdent :

$$a^2 \left( \frac{f_1 h^2}{12} + \frac{Ah^3}{24c} \right) p_0 + a^2 \left( \frac{\rho(f_1 + f_2)eh^3}{12} - \varepsilon b e^2 E_r \frac{m^2}{m^2 - 1} \cdot \frac{\pi}{36} \right) = a^2 \left[ \frac{Eh^3 [2BX + RB^2Y + (\varphi/R)]}{48R^2(\varphi Y - X^2)} \times \left( \frac{e_0^3}{30} + \frac{e_0^2 e_n}{10} + \frac{e_0 e_n^2}{5} + \frac{e_n^3}{3} \right) \right] \quad (14)$$

La valeur de  $p_0$  satisfaisant à la relation ci-dessus où le paramètre  $a$  s'élimine, constitue la charge critique cherchée.

Or, la charge réelle  $p$ , qui agit au pied de l'ouvrage, a pour valeur, nous l'avons vu :  $p_r = hc$  (puisque  $h$ , hauteur du barrage, est égale à la profondeur de la fondation sous la surface libre et la densité de l'eau étant supposée égale à l'unité).

Le coefficient de sécurité est donc égal au rapport :

$$h = \frac{p_0}{p_r} = \frac{p_0}{hc}$$

Nous poserons :

$$\left. \begin{aligned} \frac{f_1 h^3 c}{12} &= \beta; & \frac{Ah^4}{24} &= \gamma \\ \frac{\rho(f_1 + f_2)eh^3}{12} - \varepsilon b e^2 E_r \frac{m^2}{m^2 - 1} \frac{\pi}{36} &= \delta; \\ \frac{Eh^3 [2BX + RB^2Y + (\varphi/R)]}{48R^2(\varphi Y - X^2)} &\times \\ \times \left( \frac{e_0^3}{30} + \frac{e_0^2 e_n}{10} + \frac{e_0 e_n^2}{5} + \frac{e_n^3}{3} \right) &= \zeta \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

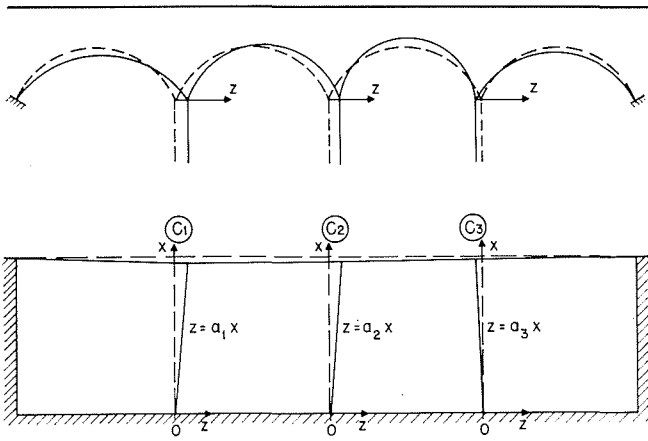
L'équation (14) s'écrit alors :

$$k(\beta + \gamma) + \delta = \zeta$$

d'où :

$$k = \frac{\zeta - \delta}{\beta + \gamma} \quad (16)$$





9/ Déformations d'un barrage à voûtes multiples.  
Deformation of a multiple-arch dam.

**D - STABILITÉ D'ENSEMBLE AU DÉVERSEMENT D'UN BARRAGE CONSTITUÉ PAR TROIS CONTREFORTS ET QUATRE VOUTES IDENTIQUES (fig. 9) :**

Les ancrages des voûtes extrêmes sont considérés comme étant rigoureusement fixes. Le système étudié est, dans une position quelconque, complètement défini par la valeur individuelle des paramètres  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$ , homologues pour chaque contrefort du paramètre  $a$  précédent, et qui fixent le dévers par rapport à la verticale de chacun des trois contreforts.

Ce système comporte donc trois degrés de liberté.

Nous utiliserons les résultats obtenus dans le paragraphe qui précède. Le principe du calcul est par ailleurs en tous points analogue. On évaluera successivement le travail total des forces appliquées, et la variation globale de la valeur du potentiel interne.

**1° Calcul de T :**

En raison de l'indépendance mutuelle des paramètres  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$  et par suite de la similitude des contreforts, on aura :

$$T_1 = p_0 \frac{f_1 h^2}{12} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$$

$$T_2 = \rho \frac{(f_1 + f_2) e h^3}{12} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$$

$$T_4 = -\epsilon b e^2 E, \frac{m^2}{m^2 - 1} \frac{\pi}{36} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$$

a) *Calcul de  $T_3$ .* — La variation de longueur de corde des arcs s'appuyant de part et d'autre d'un même contrefort est maintenant différente pour l'un et l'autre de ces arcs.

Pour le contrefort  $C_1$ , au niveau correspondant à la cote  $x$ , la variation de longueur de la corde de l'arc de gauche est égale à  $a_1 x$ , mais celle de l'arc de droite a pour valeur  $(a_1 - a_2) x$ , de sorte que la résultante suivant l'axe Oz des poussées sur  $C_1$ , pour un arc d'épaisseur  $dx$  est donnée par l'expression :

$$dR = p_0 \frac{A (h - x)}{2 ch} (2 a_1 - a_2) x dx$$

Le déplacement de  $dR$  est égal à  $a_1 x$  et le travail correspondant à :

$$\frac{dR \times a_1 x}{2}$$

soit :

$$dT_3^1 = p_0 \frac{A (h - x)}{4 ch} (2 a_1^2 - a_1 a_2) x^2 dx$$

Pour l'ensemble du contrefort :

$$T_3^1 = p_0 \frac{A (2 a_1^2 - a_1 a_2)}{4 ch} \int_0^h (h - x) x^2 dx$$

$$T_3^1 = p_0 \frac{A h^3}{48 C} (2 a_1^2 - a_1 a_2)$$

Par un raisonnement analogue, on trouve :

— pour le contrefort  $C_2$  :

$$T_3^2 = p_0 \frac{A h^3}{48 C} (2 a_2^2 - a_1 a_2 - a_2 a_3)$$

— pour le contrefort  $C_3$  :

$$T_3^3 = p_0 \frac{A h^3}{48 C} (2 a_3^2 - a_2 a_3)$$

d'où finalement :

$$T_3 = p_0 \frac{A h^3}{24 c} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_1 a_2 - a_2 a_3)$$

**2° Calcul de U :**

Ici encore, la variation d'énergie interne est différente pour chaque voûte. Un raisonnement en tous points identique au précédent montre que U est donné par l'expression :

$$U = \frac{E h^3 [2 BX + RB^2 Y + (\phi/R)]}{48 R^2 (\phi Y - X^2)} \times \left( \frac{e_0^3}{30} + \frac{e_0^2 e_h}{10} + \frac{e_0 e_h^2}{5} + \frac{e_h^3}{3} \right) \times (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_1 a_2 - a_2 a_3)$$

Compte tenu des égalités (15), la valeur de  $(U - T)$  s'écrit :

$$(U - T) = -k\beta (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - k\gamma (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_1 a_2 - a_2 a_3) + \zeta (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_1 a_2 - a_2 a_3) - \delta (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$$

Les conditions de minimum s'expriment par :

$$\frac{\delta (U - T)}{\delta a_1} = 2 a_1 [k\beta + \delta] - [\zeta + k\gamma] \quad (2 a_1 - a_2) = 0$$

$$\frac{\delta (U - T)}{\delta a_2} = 2 a_2 [k\beta + \delta] - [\zeta + k\gamma] \quad (2 a_2 - a_1 - a_3) = 0$$

$$\frac{\delta (U - T)}{\delta a_3} = 2 a_3 [k\beta + \delta] - [\zeta + k\gamma] \quad (2 a_3 - a_2) = 0$$

qui peut s'écrire en ordonnant :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 a_1 [k(\beta + \gamma) + \delta - \zeta] + a_2 (\zeta - k\gamma) = 0 \\ a_1 (\zeta - k\gamma) + 2 a_2 [k(\beta + \gamma) + \delta - \zeta] + a_3 (\zeta - k\gamma) = 0 \\ a_2 (\zeta - k\gamma) + 2 a_3 [k(\beta + \gamma) + \delta - \zeta] = 0 \end{array} \right.$$

Ce système linéaire étant homogène, la condition de compatibilité exige que le déterminant ci-dessous soit nul :

$$\left| \begin{array}{ccc} 2 [k(\beta + \gamma) + \delta - \zeta] & (\zeta - k\gamma) & 0 \\ (\zeta - k\gamma) & 2 [k(\beta + \gamma) + \delta - \zeta] & (\zeta - k\gamma) \\ 0 & (\zeta - k\gamma) & 2 [k(\beta + \gamma) + \delta - \zeta] \end{array} \right| = 0$$

En développant, on obtient l'équation :  $8 [k(\beta + \gamma) + \delta - \zeta]^3 - 4 [k(\beta + \gamma) + \delta - \zeta] [\zeta - k\gamma]^2 = 0$  qui est du troisième degré en  $k$ .

Les racines se calculent d'ailleurs facilement et ont pour valeurs respectives :

$$k_1 = \frac{\zeta - \delta}{\beta + \gamma}; \quad k_2 = \frac{\zeta(\sqrt{2} - 1) - \sqrt{2}\delta}{\sqrt{2}\beta + (\sqrt{2} - 1)\gamma}; \quad k_3 = \frac{\zeta(\sqrt{2} + 1) - \sqrt{2}\delta}{\sqrt{2}\beta + (\sqrt{2} + 1)\gamma}$$

La plus petite de ces racines constitue le coefficient de sécurité cherché. On peut remarquer que la racine  $k_1$  est égale à celle trouvée dans le cas d'un contrefort unique. Elle correspond à un mode de déversement symétrique par rapport au contrefort central, où chaque demi-barrage se comporte comme l'élément précédemment étudié.

E - STABILITÉ D'ENSEMBLE AU DÉVERSEMENT D'UN BARRAGE CONSTITUÉ PAR  $n$  CONTREFORTS ET  $n + 1$  VOUTES IDENTIQUES :

On a alors affaire à un système comportant  $n$  degrés de liberté. Il est aisé de généraliser les calculs qui précèdent.

On montrerait, par une extension du raisonnement utilisé dans le paragraphe ci-dessus, que le déterminant de compatibilité prend la forme générale :

$$\Delta_n = \left| \begin{array}{ccc|ccc} 2[k(\beta+\gamma)+\delta-\zeta] & (\zeta-k\gamma) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\zeta-k\gamma) & 2[k(\beta+\gamma)+\delta-\zeta] & (\zeta-k\gamma) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\zeta-k\gamma) & 2[k(\beta+\gamma)+\delta-\zeta] & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2[k(\beta+\gamma)+\delta-\zeta] & (\zeta-k\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\zeta-k\gamma) & 2[k(\beta+\gamma)+\delta-\zeta] & (\zeta-k\gamma) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\zeta-k\gamma) & 2[k(\beta+\gamma)+\delta-\zeta] \end{array} \right|$$

Ce déterminant comporte  $n$  lignes et  $n$  colonnes. La résolution de l'équation obtenue en le développant fournira  $n$  racines, la plus petite de ces racines étant la seule à retenir.

On peut observer qu'il n'est physiquement pas possible de trouver des racines négatives.

Pratiquement, cela voudrait dire qu'une instabilité généralisée pourrait apparaître sous l'effet d'une poussée négative, c'est-à-dire appliquée sur le parement aval du barrage et dirigée vers l'amont.

Or, un tel mode de chargement, s'il était matériellement concevable, ne pourrait qu'être très favorable à la stabilité, puisque, d'une part, la réaction latérale des voûtes s'opposerait alors au déversement du contrefort et, d'autre part, la résultante de la poussée de l'eau, agissant cette fois vers le haut, contrarierait une tendance au renversement de ce contrefort que seul son poids propre (toujours relativement faible) solliciterait vers le bas.

De la forme du déterminant  $\Delta_n$ , on dégage facilement la loi de récurrence ci-dessous :

$$\Delta_n = 2 [k(\beta + \gamma) + \delta - \zeta] \Delta_{n-1} - (\zeta - k\gamma)^2 \Delta_{n-2}$$

qui peut faciliter la recherche des racines successives.

Les calculs qui précèdent montrent que d'une façon générale, la valeur du coefficient de sécurité, toutes choses étant par ailleurs égales, dépend du nombre de contreforts. Les calculs numériques font apparaître une diminution de  $k$  lorsque  $n$  augmente.

Du point de vue théorique, il serait intéressant de savoir si la suite des valeurs  $k_n$  est convergente et, dans l'affirmative, d'en préciser la limite. Cette démonstration nous est apparue difficile et de plus, dans le domaine des applications, le nombre de contreforts n'est jamais très élevé.

C'est pourquoi, sacrifiant à la généralité, nous nous bornerons à appliquer, à la fin de cette étude, les résultats obtenus ci-dessus à un barrage comportant un nombre de contreforts assez élevé pour montrer le sens et l'importance des variations du coefficient de sécurité.

F - CAS D'UN BARRAGE OU LES CONTREFORTS ONT DES HAUTEURS DIFFÉRENTES :

Nous avons supposé dans tout ce qui précède que le barrage avait ses contreforts identiques.

Ce n'est pratiquement jamais le cas, puisque la configuration de la brèche à fermer et la profondeur du rocher imposent la hauteur du barrage.

Mais il n'y aurait pas de difficultés à étendre les calculs à un ouvrage doté de contreforts inégaux.

A chaque contrefort correspondra une valeur particulière des quantités,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  et  $\zeta$  que l'on devra calculer.

(A suivre.)