

INFLUENCE D'UNE FISSURE SUR LA RÉPARTITION DES PRESSIONS SOUS LE RADIER D'UN BARRAGE

PAR M. BARDONNAUT *

L'exposé qui va suivre a pour but de calculer les pressions sous le radier d'un barrage lorsqu'il existe dans le sol une fissure située à l'extrémité amont de ce radier. Deux paramètres interviendront évidemment : l'inclinaison de la fissure et sa longueur. Après avoir établi les formules générales donnant les variations de la pression le long du radier, on tracera les courbes correspondantes pour des valeurs particulières des deux paramètres, afin d'illustrer les résultats.

Je prie MM. Biarez, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Grenoble, et Giroud, assistant, de bien vouloir trouver ici l'expression de ma reconnaissance pour l'aide qu'ils m'ont apportée dans la rédaction de cet article.

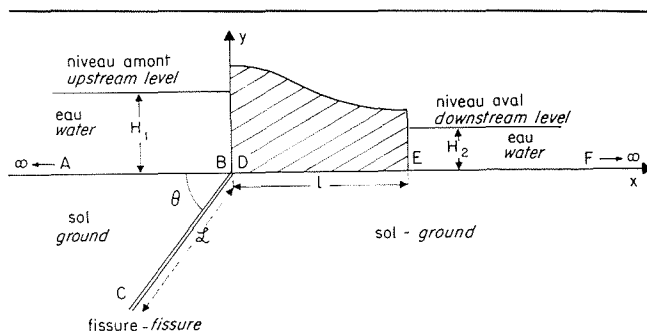
Principales notations :

- l : largeur du radier;
 - ℓ : longueur de la fissure;
 - θ : angle de la fissure avec le niveau du sol (côté amont);
 - x, y : coordonnées rectangulaires dans le plan de l'écoulement;
 - φ : fonction potentiel;
 - ψ : fonction courant;
 - t : variable (complexe) du plan auxiliaire de la représentation conforme;
 - H_1 : hauteur d'eau à l'amont du barrage;
 - H_2 : hauteur d'eau à l'aval
- $H_1 - H_2$:
perte de charge du barrage;

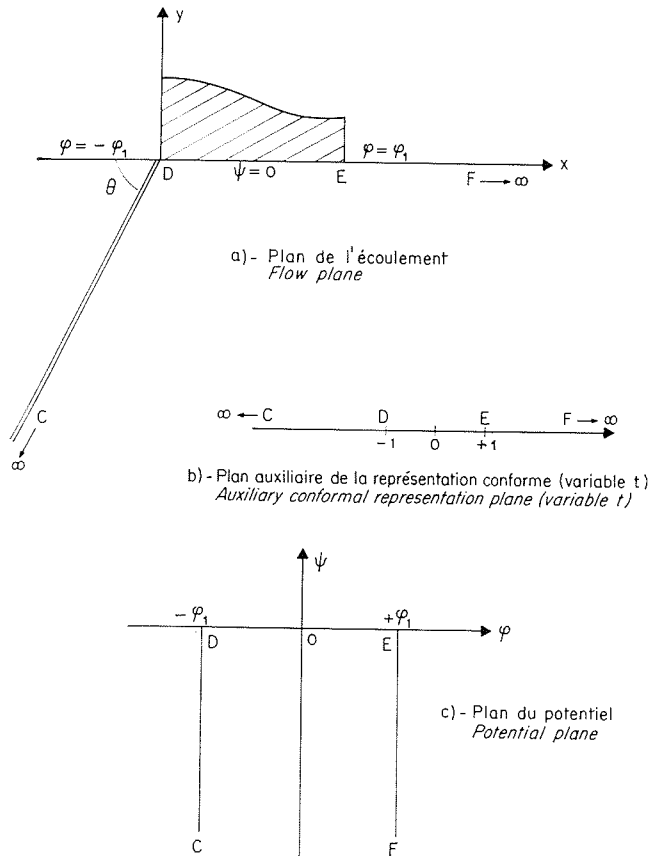
- ρg : poids volumique de l'eau;
- k : coefficient de perméabilité du sol;
- p : pression de l'eau;
- X : abscisse du point d'application de la résultante des pressions sous le radier;
- X_0 : valeur de X dans le cas particulier où $H_2 = 0$;
- π : 3,1416;
- i : $\sqrt{-1}$.

Les calculs seront faits avec les hypothèses suivantes (voir fig. 1) :

- l'écoulement est plan et permanent;
- la couche de sol perméable sous le barrage a une épaisseur infinie; sa surface est plane et horizontale;
- le radier est au niveau du sol;
- il existe, dans le sol, à l'amont du barrage, une fissure de longueur ℓ prenant son origine au



* Diplômé d'études supérieures, Assistant à l'I.N.S.A. de Lyon, France.



2/

point B et faisant un angle θ avec le niveau du sol amont.

Cette fissure est suffisamment mince, par comparaison avec les dimensions du barrage, pour être assimilée à un segment de droite BC. Toutefois, elle est suffisamment large pour qu'il n'y ait pas de perte de charge entre B et C (*).

La fissure constituera une équipotentielle, le potentiel étant le même que dans le réservoir amont.

Remarques (voir fig. 1) :

— le potentiel le long du segment AB (qui est le potentiel dans le réservoir amont) est égal à $-kH_1$. De même, le long du segment EF, le potentiel est égal à $-kH_2$. Mais, pour la symétrie des calculs, nous utiliserons également la notation suivante : le potentiel le long de AB correspond à $-\varphi_1$; le long de EF, il correspond à $+\varphi_1$, ce qui entraîne :

$$\varphi_1 = k \frac{H_1 - H_2}{2}$$

— le radier DE constitue une ligne de courant que nous noterons $\psi = 0$;

(*) Cette hypothèse d'absence de perte de charge entre B et C impose certaines conditions relatives à l'épaisseur de la fissure. Les calculs correspondants n'ont pas été reproduits ici. Il en sera de même dans la conclusion en ce qui concerne le problème d'une fissure dans une couche de sol perméable d'épaisseur finie.

— l'angle θ de la fissure avec le niveau AB du sol à l'amont peut varier de 0 à π ; pour $\theta = 0$, la fissure se confond avec le réservoir amont et sa longueur n'intervient plus; tout se passe comme si elle n'existait pas.

Nous avons laissé de côté le cas $\theta = \pi$, dont la signification physique est imprécise.

I. Fissure de longueur infinie ($l = \infty$)

Dans ce cas, tout se passe comme si le massif perméable était limité par le contour CDEF.

1. Utilisation de la représentation de Schwarz-Christoffel pour la détermination de l'écoulement.

Plan du potentiel (fig. 2 c) :

$$\begin{aligned} \varphi + i\psi &= f(x + iy) \\ &= B \int_0^t (t+1)^{-(1/2)} (t-1)^{-(1/2)} dt \\ &= B \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = B \text{Arc sin } t \end{aligned}$$

quand $t = 1$, on est en E, où $\psi = 0$ et $\varphi = \varphi_1$, d'où :

$$\varphi_1 = B \text{Arc sin } 1 = B \frac{\pi}{2} \quad B = \frac{2\varphi_1}{\pi}$$

$$\varphi + i\psi = f(x + iy) = \frac{2\varphi_1}{\pi} \text{Arc sin } t$$

Plan de l'écoulement (fig. 2 a) :

$$\begin{aligned} x + iy &= A \int_0^t (t+1)^{-(\theta/\pi)} dt + B \\ &= A \frac{\pi}{\pi - \theta} [(t+1)^{1-(\theta/\pi)} - 1] + B \end{aligned}$$

— quand $t = -1$ $x + iy = 0$

$$B = A \frac{\pi}{\pi - \theta} \quad \text{d'où } x + iy = A \frac{\pi}{\pi - \theta} (t+1)^{1-(\theta/\pi)}$$

— quand $t = 1$ $x + iy = l$

$$A = l \frac{\pi - \theta}{\pi} \frac{1}{2^{1-(\theta/\pi)}}$$

$$x + iy = \frac{l}{2^{1-(\theta/\pi)}} (t+1)^{1-(\theta/\pi)}$$

Soit, en éliminant la variable t :

$$x + iy = \frac{l}{2^{1-(\theta/\pi)}} \left[\sin \frac{\pi}{2\varphi_1} (\varphi + i\psi) + 1 \right]^{1-(\theta/\pi)}$$

et en explicitant :

$$x + iy = \frac{l}{2^{1-(\theta/\pi)}} \left[\begin{array}{l} \sin \frac{\pi\varphi}{2\varphi_1} \operatorname{ch} \frac{\pi\psi}{2\varphi_1} \\ + i \operatorname{sh} \frac{\pi\psi}{2\varphi_1} \cos \frac{\pi\varphi}{2\varphi_1} \end{array} \right]^{1-(\theta/\pi)}$$

Remarque. — Vérification pour le cas particulier $\theta = 0$; on a alors :

$$x + iy = \frac{l}{2} \left[\sin \frac{\pi(\varphi + i\psi)}{2\varphi_1} + 1 \right]$$

et, en séparant partie réelle et partie imaginaire :

$$\begin{cases} x = \frac{l}{2} \sin \frac{\pi\varphi}{2\varphi_1} \operatorname{ch} \frac{\pi\psi}{2\varphi_1} + \frac{l}{2} \\ y = \frac{l}{2} \cos \frac{\pi\varphi}{2\varphi_1} \operatorname{sh} \frac{\pi\psi}{2\varphi_1} \end{cases}$$

suivant que l'on fait $\varphi = \text{Cte}$ ou $\psi = \text{Cte}$, on a des hyperboles (équipotentielles) ou des ellipses (lignes de courant). Ce qui est bien le résultat connu.

2. Etude des pressions sous le radier.

Le long de DE on a $\psi = 0, y = 0$, d'où :

$$x = \frac{l}{2^{1-(\theta/\pi)}} \left[\sin \frac{\pi\varphi}{2\varphi_1} + 1 \right]^{1-(\theta/\pi)}$$

on en tire :

$$\varphi = \frac{2\varphi_1}{\pi} \operatorname{Arc} \sin \left[2 \left(\frac{x}{l} \right)^{\pi/(\pi-\theta)} - 1 \right]$$

Ce potentiel varie bien de $-\varphi_1$ à $+\varphi_1$. Si l'on veut revenir aux conditions aux limites définies avec les hauteurs d'eau aval (H_2) et amont (H_1), on écrira :

$$\varphi = k(H_1 - H_2) \frac{1}{\pi} \operatorname{Arc} \sin \left[2 \left(\frac{x}{l} \right)^{\pi/(\pi-\theta)} - 1 \right] - k \frac{H_1 + H_2}{2}$$

D'une façon générale on a, entre le potentiel φ et la pression p , la relation :

$$\varphi = -k \left(\frac{p}{\rho g} + y \right)$$

Sous le radier $y = 0$ donc $p = -(\rho g/k) \varphi$:

$$p = -\rho g (H_1 - H_2) \frac{1}{\pi} \operatorname{Arc} \sin \times \left[2 \left(\frac{x}{l} \right)^{\pi/(\pi-\theta)} - 1 \right] + \rho g \frac{H_1 + H_2}{2}$$

Le long du radier DE, où cette formule est valable, la quantité x/l varie de 0 à 1.

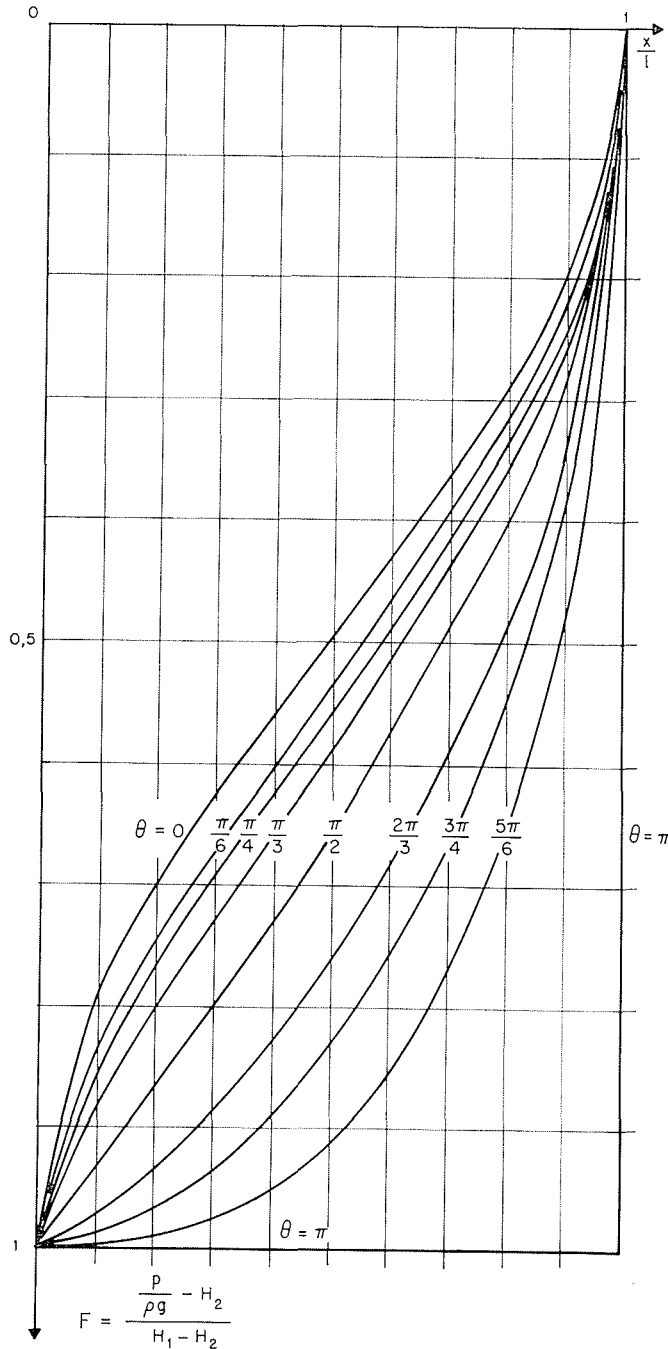
TABLE 1

Values of the function $F(\theta, x/l)$ for calculation of uplift by formula (1)

Tableau 1

Valeur de la fonction $F(\theta, x/l)$ permettant le calcul, avec la formule (1) des pressions sous le radier

x/l	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
0	1,000	0,795	0,705	0,631	0,564	0,500	0,436	0,369	0,295	0,205	0	
$\frac{\pi}{6}$	1,000	0,839	0,751	0,678	0,609	0,541	0,473	0,402	0,322	0,224	0	
$\frac{\pi}{4}$	1,000	0,863	0,778	0,704	0,635	0,565	0,496	0,422	0,338	0,236	0	
$\frac{\pi}{3}$	1,000	0,885	0,807	0,735	0,665	0,595	0,523	0,445	0,358	0,249	0	
$\frac{\pi}{2}$	1,000	0,936	0,872	0,806	0,738	0,667	0,574	0,506	0,410	0,287	0	
$\frac{2\pi}{3}$	1,000	0,980	0,943	0,895	0,837	0,770	0,692	0,602	0,492	0,348	0	
$\frac{3\pi}{4}$	1,000	0,994	0,975	0,943	0,897	0,839	0,765	0,674	0,558	0,399	0	
$\frac{5\pi}{6}$	1,000	1,000	0,994	0,983	0,959	0,920	0,861	0,777	0,658	0,480	0	
π	1,000	F vaut 1 pour $\frac{x}{l} < 1$ et vaut 0 pour $\frac{x}{l} = 1$										0



3/ Valeurs de la fonction $F(\theta, x/l)$ permettant le calcul des sous-pressions à l'aide de la formule I.
 Values of the function $F(\theta, x/l)$ for calculation of uplift by formula I.

On écrira la formule précédente, donnant les pressions, sous la forme :

$$p = \rho g (H_1 - H_2) F\left(\theta, \frac{x}{l}\right) + \rho g H_2 \quad (1)$$

avec :

$$F\left(\theta, \frac{x}{l}\right) = -\frac{1}{\pi} \text{Arc sin} \left[2 \left(\frac{x}{l}\right)^{\pi/(\pi-\theta)} - 1 \right] + \frac{1}{2} \quad (1 \text{ bis})$$

$$F = 0 \text{ pour } x = l; \quad F = 1 \text{ pour } x = 0$$

En utilisant la formule (1 bis), on a obtenu le tableau 1 et les courbes de la figure 3 qui donnent les valeurs de F en fonction de x/l et de θ .

F étant connue, on déduit immédiatement la pression p de la formule (1), une fois précisées les conditions aux limites H_1 et H_2 .

Remarque (voir fig. 5). — On voit naturellement, sur la formule (1), que la pression p est la somme de deux termes :

- l'un, $\rho g H_2$, correspondant à la pression hydrostatique (forces de pression représentées dans la partie 1 de la figure 5);
- l'autre, $\rho g (H_1 - H_2) F$, correspondant à la perte de charge $H_1 - H_2$ (forces de pression représentées dans la partie 2 de la figure 5).

3. Résultante des pressions sous le radier (module et position).

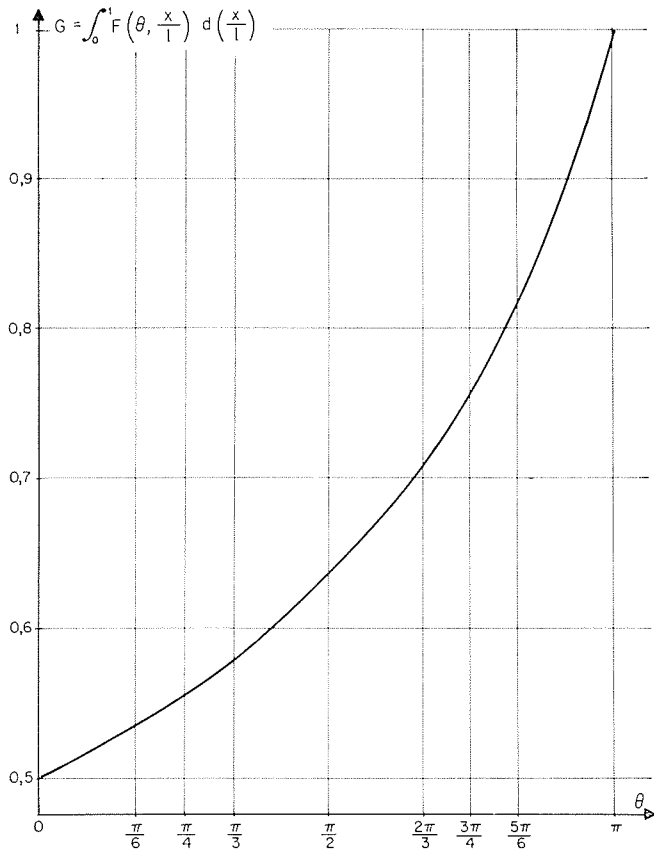
Soit \vec{P} cette résultante; son module est :

$$\begin{aligned} |\vec{P}| &= \int_0^l p(x) dx \\ &= \int_0^l \left[\rho g (H_1 - H_2) F\left(\theta, \frac{x}{l}\right) + \rho g H_2 \right] dx \\ |\vec{P}| &= \rho g l \left[(H_1 - H_2) \frac{1}{l} \int_0^l F\left(\theta, \frac{x}{l}\right) dx + H_2 \right] \end{aligned}$$

TABLE 2 a

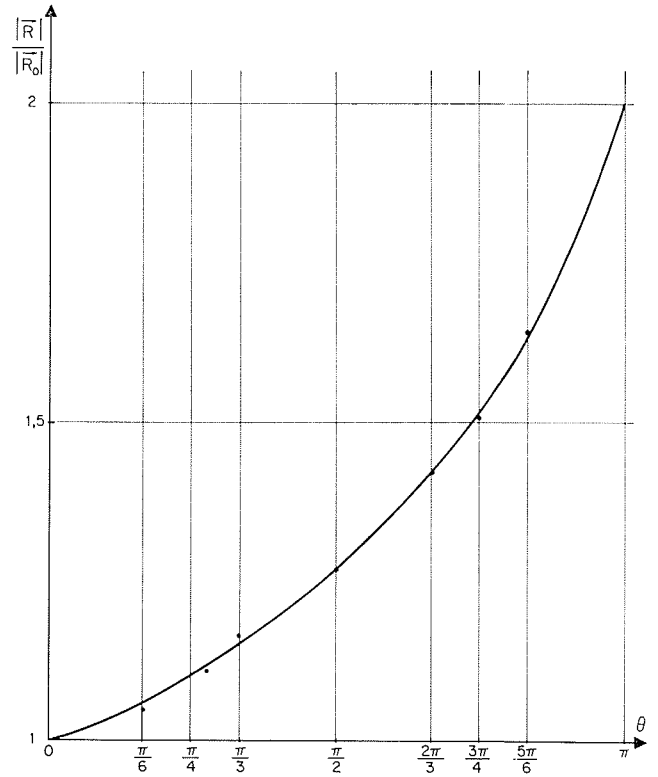
Tableau 2 a

0	G
0	0,500
$\frac{\pi}{6}$	0,535
$\frac{\pi}{4}$	0,555
$\frac{\pi}{3}$	0,578
$\frac{\pi}{2}$	0,633
$\frac{2\pi}{3}$	0,710
$\frac{3\pi}{4}$	0,759
$\frac{5\pi}{6}$	0,820
π	1,000



4 a/ Valeurs de la fonction $G(\theta)$ permettant le calcul, avec la formule II, du module $|\vec{P}|$ de la résultante des pressions.

Values of the function $G(\theta)$ for calculation of the module $|\vec{P}|$ of the pressure resultant by formula II.



4 b/ Valeurs du rapport $\frac{|\vec{R}|}{|\vec{R}_0|}$

module de la résultante des forces de pression correspondant à la perte de charge
 = —————
 module de la même résultante mais en l'absence de fissure

$\frac{|\vec{R}|}{|\vec{R}_0|}$ = $\frac{\text{module of pressure force resultant corresponding to the head loss}}{\text{module of pressure force resultant without a fissure}}$

TABLE 2 b

Tableau 2 b

0	R/R ₀
0	1,000
$\frac{\pi}{6}$	1,047
$\frac{\pi}{4}$	1,110
$\frac{\pi}{3}$	1,165
$\frac{\pi}{2}$	1,267
$\frac{2\pi}{3}$	1,421
$\frac{3\pi}{4}$	1,503
$\frac{5\pi}{6}$	1,639
π	2,000

formule qui s'écrit :

$$|\vec{P}| = \rho g l (H_1 - H_2) G(\theta) + \rho g l H_2 \quad (2)$$

en posant :

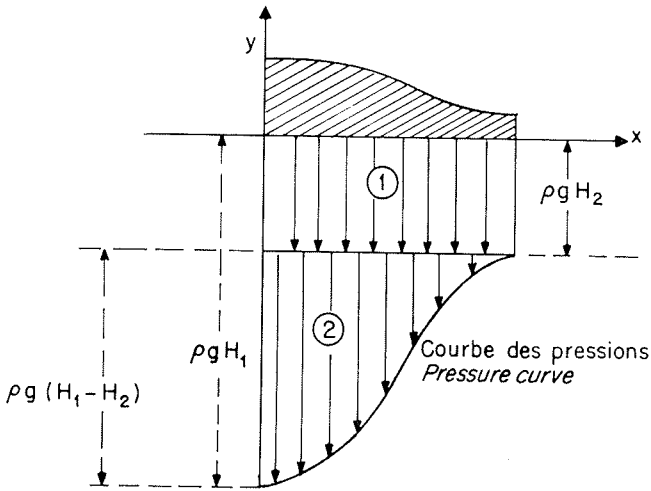
$$G(\theta) = \frac{1}{l} \int_0^l F\left(\theta, \frac{x}{l}\right) dx$$

c'est-à-dire :

$$G(\theta) = \int_0^1 F\left(\theta, \frac{x}{l}\right) d\left(\frac{x}{l}\right) \quad (2 \text{ bis})$$

En utilisant la formule (2 bis), on a obtenu le tableau 2 donnant les valeurs de G suivant les valeurs de θ . La figure 4 a donne la courbe correspondante.

Posons également $|\vec{R}| = \rho g l (H_1 - H_2) G(\theta)$ le tableau 2 b donne les valeurs de : $|\vec{R}(\theta)|/|\vec{R}_0|$, R_0 étant la valeur de $R(\theta)$ pour $\theta = 0$. La figure 4 b donne la courbe correspondante. Elle permet de voir directement par quel coefficient $|\vec{R}|/|\vec{R}_0|$ est multipliée la résultante des pressions dues à la perte de charge lorsque apparaît dans le sol une fissure qui primitivement n'existait pas.

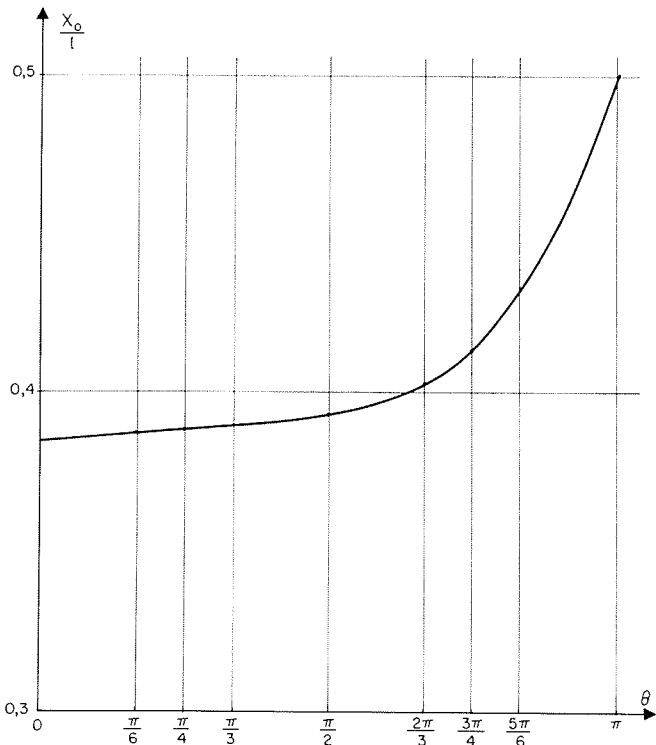


5/

Remarque sur la figure 5 :

- les forces de pression de la région 1 (correspondant à la pression hydrostatique) ont pour résultante $\rho g l H_2$;
- les forces de pression de la région 2 (correspondant à la perte de charge $H_1 - H_2$) ont une résultante de module $|\vec{R}|$.

Quant au support de cette résultante, il passe par un point dont l'abscisse X est facile à calculer, puis-



6/ On remarquera que l'influence de l'orientation de la fissure sur le point d'application de la résultante des pressions est très faible pour $0 < \theta < \pi/2$.

Note: The effect of fissure orientation on the point of application of the pressure resultant is very small when $0 < \theta < \pi/2$.

que l'on se trouve en présence d'une détermination de barycentre :

$$X = \frac{\int_0^l x p(x) dx}{\int_0^l p(x) dx}$$

$$= \frac{\rho g (H_1 - H_2) l^2 \int_0^1 \frac{x}{l} F\left(\theta, \frac{x}{l}\right) d\left(\frac{x}{l}\right) + \rho g H_2 \frac{l^2}{2}}{|\vec{P}|}$$

$$X = \frac{\rho g (H_1 - H_2) l \boxed{X_0} \int_0^1 F\left(\theta, \frac{x}{l}\right) d\left(\frac{x}{l}\right) + \rho g H_2 l \boxed{\frac{l}{2}}}{|\vec{P}|}$$

avec :

$$X_0 = \frac{l \int_0^1 \frac{x}{l} F\left(\theta, \frac{x}{l}\right) d\left(\frac{x}{l}\right)}{\int_0^1 F\left(\theta, \frac{x}{l}\right) d\left(\frac{x}{l}\right)}$$

Les quantités X_0 et $l/2$ encadrées dans la formule précédente sont les abscisses de deux barycentres partiels correspondant aux forces de pression distinguées en 2 et 1 sur la figure 5, comme on l'a vu plus haut.

$$X = \frac{\rho g l^2}{|\vec{P}|} \left[(H_1 - H_2) \cdot G(\theta) \cdot \frac{X_0}{l} + \frac{H_2}{2} \right] \quad (3)$$

TABLE 3

Tableau 3

0	X_0/l
0	0,385
$\frac{\pi}{6}$	0,388
$\frac{\pi}{4}$	0,389
$\frac{\pi}{3}$	0,390
$\frac{\pi}{2}$	0,393
$\frac{2\pi}{3}$	0,403
$\frac{3\pi}{4}$	0,414
$\frac{5\pi}{6}$	0,433
π	0,500

Si $H_2 = 0$, il y a évidemment la simplification $X = X_0$.

Les valeurs de X_0/l en fonction de θ ont été notées dans le tableau 3 et la figure 6 donne la courbe correspondante.

II. Fissure de longueur finie

1. Utilisation de la représentation de Schwarz-Christoffel pour la détermination de l'écoulement.

Dans la représentation conforme, les trois points pris arbitraires sont $t = \infty$, $t = -1$ et $t = +1$, que l'on fait correspondre respectivement à $x + iy = \infty$, $x + iy = 0$ (point D), $x + iy = l$ (point E). En outre, nous appelons β et γ les valeurs de t correspondant respectivement à $x + iy = 0$ (point B) et $x + iy = \mathcal{L}e^{i(\theta-\pi)}$ (point C).

Plan du potentiel (fig. 7 c) :

$$\varphi + i\psi = f(x + iy) = \frac{2\varphi_1}{\pi} \text{Arc sin } t$$

$$t = \sin \frac{\pi(\varphi + i\psi)}{2\varphi_1}$$

Plan de l'écoulement (fig. 7 a) :

$$x + iy = A \int_0^t (t - \beta)^{(\theta/\pi)-1} \times (t - \gamma)(t + 1)^{-(\theta/\pi)} dt + B$$

qui s'intègre sous la forme :

$$x + iy = Q(t + 1)^{1-(\theta/\pi)}(t - \beta)^{(\theta/\pi)}$$

Les coefficients Q et β se déduisent (dès que \mathcal{L} , l , θ sont fixés) des formules (4) obtenues en tenant compte des conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -Q \left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right)^{1-(\theta/\pi)} (\beta + 1) \left(\frac{\theta}{\pi}\right)^{\theta/\pi} \\ l &= Q 2^{1-(\theta/\pi)} (1 - \beta)^{\theta/\pi} \end{aligned} \quad (4)$$

Remarque : pour $\theta = 0$,

$$x + iy = Q(t + 1) \left\{ \begin{aligned} t &= \sin \frac{\pi(\varphi + i\psi)}{2\varphi_1} \\ x + iy &= Q \left[\sin \frac{\pi(\varphi + i\psi)}{2\varphi_1} + 1 \right] \end{aligned} \right.$$

on retrouve bien ici encore des ellipses des hyperboles pour lignes de courant équipotentielles.

2. Etude des pressions sous le radier.

Sous le radier, le long de DE, on a $\psi = 0$, $y = 0$, d'où :

$$x = Q \left[\sin \frac{\pi\varphi}{2\varphi_1} + 1 \right]^{1-(\theta/\pi)} \left[\sin \frac{\pi\varphi}{2\varphi_1} - \beta \right]^{\theta/\pi}$$

On peut revenir, comme pour la fissure de longueur infinie, à des conditions aux limites données en fonction de H_1 et H_2 . On aura, en remplaçant φ par $-(kp/\rho g)$, la formule suivante donnant les pressions :

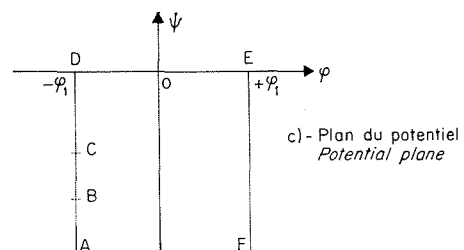
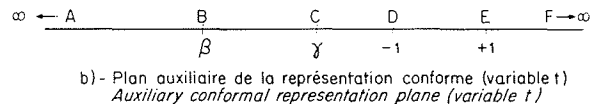
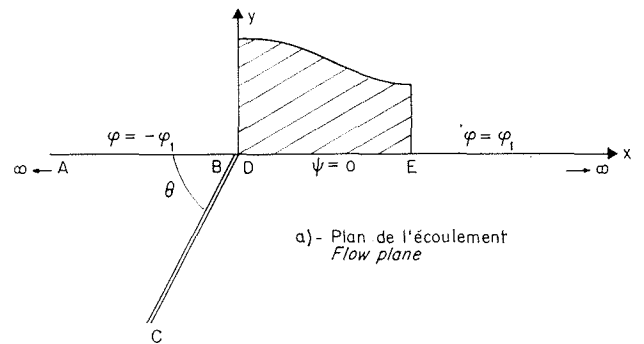
$$x = Q \left[\sin \frac{\pi \left(-\frac{p}{\rho g} + \frac{H_1 + H_2}{2} \right)}{H_1 - H_2} + 1 \right]^{1-(\theta/\pi)} \times \left[\sin \frac{\pi \left(-\frac{p}{\rho g} + \frac{H_1 + H_2}{2} \right)}{H_1 - H_2} - \beta \right]^{\theta/\pi} \quad (5)$$

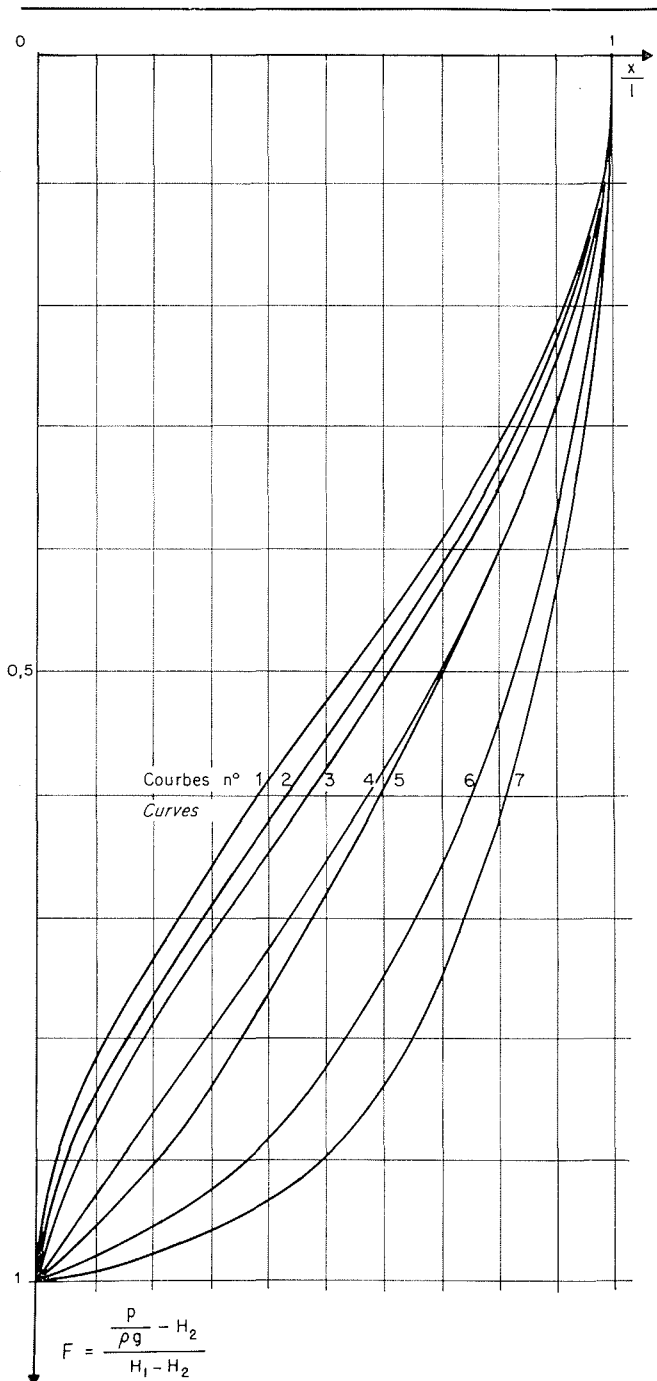
Si on reprend également la notation :

$$F = \frac{(p/\rho g) - H_2}{H_1 - H_2}$$

c'est-à-dire en fait, si l'on réécrit la formule (1) :

$$p = \rho g (H_1 - H_2) F + \rho g H_2$$





8/ Voir tableau 4.
See table 4.

la formule (5) s'écrit :

$$x = Q \left[\sin \pi \left(-F + \frac{1}{2} \right) + 1 \right]^{1 - (\theta/\pi)} \times \left[\sin \pi \left(-F + \frac{1}{2} \right) - \beta \right]^{\theta/\pi} \tag{6}$$

mais il faut bien remarquer que F dépend ici de trois variables θ , x/l , \mathcal{L}/l (on a encore $F = 0$ pour $x = l$, ce qui redonne la deuxième formule (4) et $F = 1$ pour $x = 0$).

Les formules (1) et (6) jouent le même rôle que les formules (1) et (1 bis) rencontrées dans la première partie. Mais alors que la formule (1 bis) était résolue par rapport à F, il n'est pas possible d'expliciter F en fonction de x à partir de la formule (6); on est donc obligé de calculer différemment : on se donne les valeurs de F et on cherche quelle est l'abscisse x correspondante.

F étant connue, on déduit immédiatement la pression p de la formule (1) une fois précisées les conditions aux limites H_1 et H_2 .

a) Première application des formules précédentes.

Parmi les trois variables θ , x/l , \mathcal{L}/l dont dépend F, on peut d'abord choisir x/l comme variable principale, θ et \mathcal{L}/l jouant le rôle de paramètres.

On a ainsi tracé sur la figure 8 quelques courbes donnant les variations de F en fonction de x/l (analogues aux courbes de la figure 3). Ces courbes correspondent à des valeurs des paramètres données par le tableau 4.

TABLE 4

Tableau 4

Courbe	θ	\mathcal{L}/l	β	Q/l
n° 1	$\pi/6$	2	9,38	0,38
n° 2	$\pi/4$	12	118,1	0,18
n° 3	$\pi/3$	2	17,1	0,24
n° 4	$\pi/2$	2	33,7	0,12
n° 5	$2\pi/3$	0,2	2,02	0,38
n° 6	$3\pi/4$	3,6	3 150	0,002
n° 7	$5\pi/6$	1	40,4	0,04

les valeurs correspondantes de β et Q calculées à partir des formules (4) sont :

b) Deuxième application.

On peut également se donner comme paramètres θ et x/l . On cherchera, dans ce cas, comment varie F en un point précis du radier (x/l donné) et pour un θ donné quand on fait varier \mathcal{L}/l . On a pris deux exemples (voir fig. 9) :

$\text{courbe n° 1 : } \theta = \frac{\pi}{2} \quad \frac{x}{l} = 0,76$
$\text{courbe n° 2 : } \theta = \frac{2\pi}{3} \quad \frac{x}{l} = 0,74$

3. Résultante des pressions sous le radier (module et position).

Nous pouvons réécrire les formules (2) et (3) vues à propos de la fissure de longueur infinie :

$$\begin{aligned} |\vec{P}| &= \rho g l (H_1 - H_2) G + \rho g l H_2 \\ X &= \frac{\rho g l^2}{|\vec{P}|} \left[(H_1 - H_2) \cdot G \cdot \frac{X_0}{l} + \frac{H_2}{2} \right] \end{aligned}$$

Mais nous avons vu que pour une fissure de longueur finie il n'était pas possible d'explicitier la fonction $F(\theta, x/l, \mathcal{L}/l)$. *A fortiori*, il n'est pas possible d'écrire la fonction :

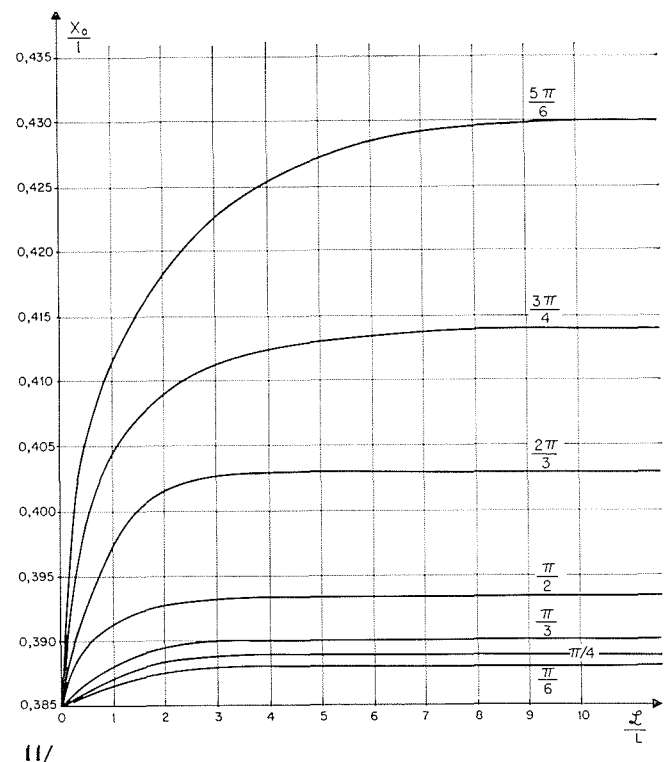
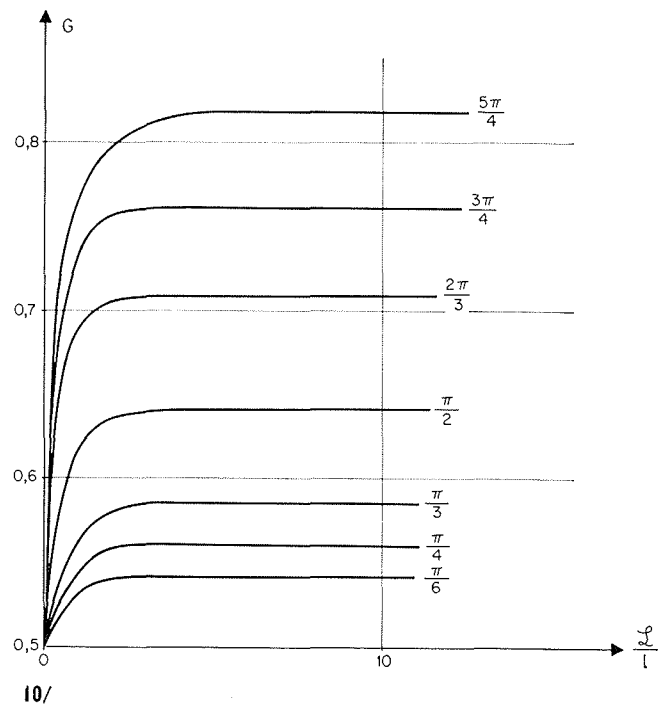
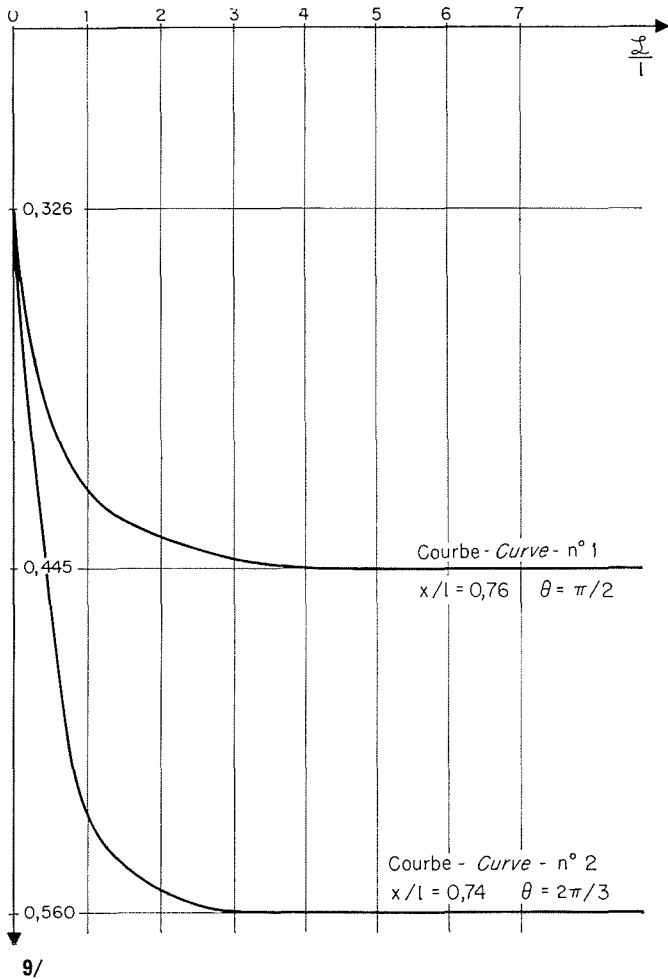
$$G = \int_0^1 F \cdot d(x/l)$$

Par contre, puisque nous savons tracer les cour-

bes F , nous pourrions tracer numériquement les courbes G suivant les valeurs de \mathcal{L}/l et ceci pour différentes valeurs de θ (voir fig. 10).

Enfin, il est également possible, en partant des courbes F , de calculer numériquement les valeurs de X_0/l suivant les valeurs de \mathcal{L}/l pour différentes valeurs de θ (voir fig. 11).

§ III à la page suivante



9/ Exemples de variations de la fonction F suivant les valeurs de L/l en un point précis du radier (x/l donné) et pour une valeur de θ donnée.

Examples of function F variation for various values of L/l at a specific point of the apron for given x/l and θ values.

10/ Si $\theta = 0$, la courbe représentative se réduit à l'axe des abscisses.

Representative curve reduces to abscissa axis for $\theta = 0$.

11/ Variations de X_0/l en fonction de L/l pour différentes valeurs de θ (pour $\theta = 0$, la courbe se réduit à l'axe des abscisses).

X_0/l as a function of L/l for various values of θ (curve reduces to abscissa axis for $\theta = 0$).

Soit un barrage avec les conditions aux limites suivantes :

$$H_1 = 15 \text{ m}$$

$$H_2 = 2 \text{ m}$$

$$l = 8 \text{ m}$$

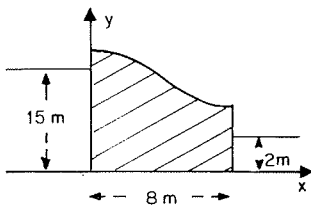
pois volumique de l'eau :

$$\rho = 1\,000 \text{ kg/m}^3$$

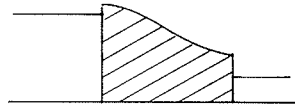
$$g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

d'où $\rho g = 9\,810$.

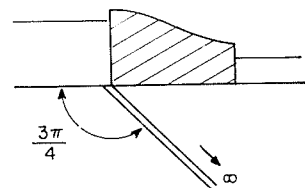
Les pressions sont donc exprimées en pascals.



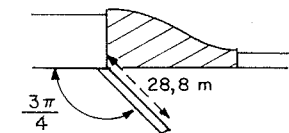
Barrage en l'absence de fissure (cas identique au cas $\theta = 0$).



Barrage avec une fissure de longueur ∞ et faisant un angle $\theta = (3\pi/4)$ avec le sol amont.



Barrage avec fissure de longueur $\mathcal{L} = 28,8 \text{ m}$ et faisant un angle $(3\pi/4)$ avec le sol.



EXEMPLES DE CALCULS DE PRESSIONS SOUS LE RADIER :
la formule (1) s'écrit $p = 9810.13.F + 9810.2$

→ On veut calculer la pression pour $x = 3,2$, d'où :
 $(x/8) = 0,4$;

d'après le tableau 1, la valeur correspondante de :
 $F [0, (x/8)]$ est 0,564. On en déduit :

$$p = 91.547 \text{ pascals.}$$

→ On veut calculer la pression pour $x = 4,4$ d'où :
 $(x/8) = 0,55$.

Cette valeur ne figurant pas dans le tableau 1 on utilise
la courbe $\theta = 0$ de la figure 3 qui donne $F = 0,47$, d'où :

$$p = 79.559$$

→ On veut calculer la pression pour $x = 3,2$, d'où :
 $(x/8) = 0,4$;

le tableau 1 donne $F = 0,897$, d'où :

$$p = 134.014.$$

→ On veut calculer la pression pour $x = 4,4$ d'où :
 $(x/8) = 0,55$

la courbe $\theta = (3\pi/4)$ de la figure 3 donne :
 $F = 0,795$, d'où :

$$p = 121.006.$$

On veut la pression pour $x = 3,2$, $(x/8) = 0,4$; on utilise la
courbe n° 6 de la figure 8 [$\theta = (3\pi/4)$, $(\mathcal{L}/l) = 3,6$] on trouve
 $F = 0,88$, d'où :

$$p = 131.846.$$

IV. Conclusion

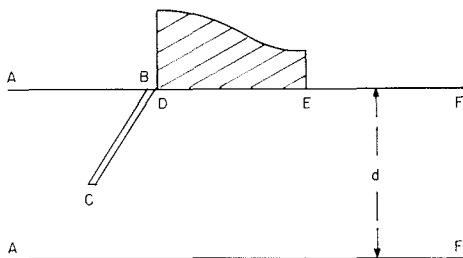
Cette étude des pressions sous le radier d'un barrage en présence d'une fissure a débuté par le cas le plus simple. La fissure ayant une longueur infinie, seul son angle θ avec le niveau du sol intervient comme paramètre. On a vu que la valeur de cet angle influait d'une façon importante sur la répartition des pressions et leur résultante, mais que, par contre, elle n'intervenait pratiquement sur le point d'application de la résultante que si elle était supérieure à $\pi/2$.

Le problème à deux paramètres (θ , \mathcal{L}/l) de la fissure de longueur finie, bien que plus complexe, a permis de mettre en évidence un autre résultat. Dès que le rapport \mathcal{L}/l prend des valeurs supérieures à 5, la longueur \mathcal{L} de la fissure n'a pratiquement plus d'influence ni sur la pression en un point précis du radier, ni sur la résultante des pressions, et l'on est ramené au cas d'une fissure de longueur infinie.

Enfin, un autre problème pourra se traiter d'une façon analogue : celui de la fissure de longueur finie quand la couche de sol perméable sous le barrage a une épaisseur finie d , cette dernière quantité constituant un troisième paramètre (fig. 12).

es résultats précédents

<p>MODULE DE LA RÉSUŁTANTE DES PRESSIONS SOUS LE RADIER :</p> <p>la formule (2) s'écrit $\vec{P} = 9810.8.13.G + 9810.8.2.$</p>	<p>POINT D'APPLICATION DE LA RÉSUŁTANTE :</p> <p>la formule (3) s'écrit : $\frac{9810.64}{ \vec{P} } \left[13.G \frac{X_0}{8} + 1 \right]$</p>
<p>la courbe de la figure 4 a donne $G(0) = 0,5$, d'où</p> <p>$\vec{P} = 667.080.$</p>	<p>la courbe de la figure 6 donne $(X_0/8) = 0,385$, d'où :</p> <p>$X = \frac{627840}{667080} [13.0,5.0,385 + 1]$</p> <p>$X = 3,295 \text{ m}$</p>
<p>la courbe de la figure 4 a donne $G(3\pi/4) = 0,759$, d'où :</p> <p>$\vec{P} = 931.322.$</p>	<p>la courbe de la figure 6 donne $(X_0/8) = 0,414$, d'où :</p> <p>$X = \frac{627840}{931322} [13.0,759.0,414 + 1]$</p> <p>$X = 3,427 \text{ m}$</p>
<p>la courbe de la figure 10 [$\theta = (3\pi/4)$, $(\mathcal{L}/l) = 3,6$] donne $G = 0,759$, d'où :</p> <p>$\vec{P} = 931.322$</p> <p>on a une fissure assez longue pour avoir sensiblement le même résultat que pour $\mathcal{L} = \infty$ avec la précision des courbes.</p>	<p>la courbe de la figure 11 donne $(X_0/8) = 0,412$, d'où :</p> <p>$X = \frac{627840}{931322} [13.0,759.0,412 + 1]$</p> <p>$X = 3,414 \text{ m}$</p>



12/

L'étude du plan du potentiel ne présente pas de difficulté; avec les notations précédentes, on trouve:

$$t = sn \frac{K}{\varphi_1} (\varphi + i\psi)$$

en désignant par K l'intégrale complète de première espèce.

Par contre, l'intégration relative au plan de l'écoulement devient très longue. Néanmoins, on montre qu'il est toujours possible d'achever le calcul, pour une valeur de θ fixée, et d'obtenir le même ensemble de résultats que celui donné ici.

English abstract on next page

Abstract

**The effect of a crack in the ground upstream from a dam
on pressure distribution underneath the apron**

by M. Bardonnaut *

The article describes a study of pressures underneath the apron of a dam with a crack in the ground at its upstream end. Steady flow is assumed, taking place with the boundary conditions shown on Fig. 1, also with the following assumptions: —

- (i) An infinitely deep layer of pervious ground underneath the dam;
- (ii) The crack BC being considered as a straight line segment, but neglecting loss of head between B and C.

I. Case of crack of infinite length ($\ell = \infty$).

The problem has a single parameter: the angle θ of the crack to the ground upstream. Application of the Schwarz-Christoffel transformation gives the following: —

- (i) Formulae (1) and (1 bis) for the pressure p along the apron, i.e. depending on x/l (values of the function $F[\theta, (x/l)]$ are given by the curves on Figure 3 for single values of θ ;
- (ii) Formulae (2) and (2 bis) giving the module $|\vec{P}|$ of the pressure resultant for various values of θ (values of $G(\theta)$ are given by the curve on Fig. 4);
- (iii) Formula (3) giving the abscissa X of the point of application of the pressure resultant for various values of θ (values of x_0/l are given by the curve on Fig. 6).

II. Case of a crack of finite length.

There are two parameters to this problem: θ and the ratio between crack and apron length ℓ/l . The above method then gives the following: —

- (i) Formulae (1) and (6), which play the same part as formulae (1) and (1 bis) and lead to two following types of curve:
 - Curves giving variations of F , i.e. of the pressure along the apron in terms of x/l , for given values of ℓ/l and θ (Fig. 8);
 - Curves giving the variation of pressure p at a definite point of the apron in terms of ℓ/l , for given values of x/l and θ ;
- (ii) The formulae in § 3, which are identical to those given for $\ell = \infty$. Figs 10 and 11 give the variations of G and x_0/l .

* Diplômé d'études supérieures, Assistant à l'I.N.S.A. de Lyon, France.