CALCUL DES DÉBITS DANS LES RÉSEAUX D'IRRIGATION FONCTIONNANT « A LA DEMANDE »

PREMIÈRE ET DEUXIÈME
FORMULES DE LA DEMANDE ET ÉVOLUTION
DE LA DEMANDE DANS LE TEMPS

THÉORIE
ET INTRODUCTION AUX
APPLICATIONS
PRATIQUES

PAR R. CLÉMENT *

Introduction

Les réseaux modernes d'irrigation par aspersion actuellement réalisés en France sont presque tous conçus pour fonctionner « à la demande » : l'utilisateur n'est plus astreint à un tour d'arrosage, mais est libre d'irriguer quand il veut. Les débits à prendre en compte pour le dimensionnement du réseau sont alors calculés par une formule simple, établie théoriquement dès 1955, puis vérifiée expérimentalement, qui exprime le foisonnement de la demande, d'autant plus sensible que le réseau est plus grand.

Toutefois, le modèle mathématique qui a servi à l'établissement de cette formule peut paraître un peu sommaire et il a semblé intéressant d'étudier un second modèle certainement plus réaliste, figuré par un processus stochastique de naissance et de mort. Le réseau d'irrigation est en effet le siège d'une succession dans le temps de demandes de débit qui apparaissent, ont une durée de vie correspondant à la durée d'un arrosage, puis disparaissent.

La théorie, malheureusement un peu complexe, permet d'aboutir à une seconde formule de la demande, très semblable à la première et d'application presque aussi simple. Elle apporte un éclairage nouveau sur la valeur de certains paramètres (qualité de fonctionnement du réseau) jusqu'à ce jour très discutés, en justifiant les impressions de certains projeteurs qui considéraient la première formule de la demande comme trop généreuse pour les grands réseaux.

La théorie conduit en outre à des formules qui décrivent l'évolution de la demande dans le temps à partir d'un état origine choisi arbitrairement. Elles permettent donc le calcul exact des volumes des réservoirs et devraient autoriser des méthodes de régulation plus fines des stations de pompage, entraînant des économies non négligeables. Enfin elles amorcent une solution au problème très difficile de la régulation des canaux.

Cette étude se subdivise en cinq chapitres principaux :

- 1° La première formule de la demande : rappel de la théorie et considérations sur le choix des paramètres et l'application de la formule;
- 2° Rappel de quelques acquisitions essentielles du calcul des probabilités et de la théorie des processus aléatoires. Propriétés principales des processus de naissance et de mort;
- 3° La deuxième formule de la demande. Démonstration et comparaisons avec la première formule;
- 4° Evolution de la demande dans le temps : détermination de l'état de la demande à un instant donné en fonction de son état à l'instant origine;
- 5° La régulation des ouvrages hydrauliques d'alimentation des réseaux : stations de pompage et canaux.

La présente étude n'aborde pas le problème de la détermination des paramètres agronomiques qui interviennent dans le calcul des débits.

L'imprécision relative de ceux-ci est sans doute actuellement la principale cause d'erreur dans le dimensionnement des réseaux d'irrigation.

Mais cela ne saurait bien entendu justifier l'ab-

* Ingénieur en chef du Génie rural, des Eaux et des Forêts, Directeur de la Société du Canal de Provence.

sence de recherches et études sur les méthodes de calculs elles-mêmes qui doivent essayer de représenter aussi fidèlement que possible le phénomène statistique de la demande.

1. La première formule de la demande pour un réseau d'irrigation

1.1. Le calcul des débits à admettre dans les canalisations d'irrigation ne présente guère de difficultés si l'irrigation est réglementée par un tour d'arrosage. Il en va autrement si l'on s'impose de distribuer l'eau « à la demande », l'usager devenant libre d'irriguer quand il veut. Il est alors indispensable de déterminer le débit de pointe d'une manière précise afin de limiter les diamètres des canalisations.

Le débit de pointe maximal est évidemment égal à la somme des débits de toutes les prises. Mais il ne sera enregistré que lorsque toutes les prises seront ouvertes à la fois. Or, la probabilité d'un tel événement est généralement très faible et il ne serait pas raisonnable de calculer le réseau pour transporter ce débit.

1.2. Considérons un réseau d'irrigation desservant une surface de S hectares et équipé de R prises d'irrigation. Le calcul du débit de pointe doit être effectué sur la période la plus chargée de la saison d'irrigation. En général, c'est le mois de juillet, et soit T la durée de cette période : $T = 720$ h; mais on peut tout aussi valablement raisonner sur une période plus courte, de 8 jours ou de 24 h.

Il est possible que, pendant la période T , le réseau ne soit pas utilisé d'une manière continue, c'est-à-dire qu'il existe des temps morts pendant lesquels aucun débit ne sera appelé. Soit alors T' le temps d'utilisation réel du réseau et posons $r = (T'/T)$, r définissant, en quelque sorte, le rendement d'utilisation en temps du réseau.

Les études hydrodynamiques des sols et agronomiques permettent par ailleurs de calculer les volumes d'eau à fournir pendant la période T . Soit D débit fictif continu correspondant aux besoins en eaux agricoles de la totalité du périmètre desservi par le réseau. Le débit moyen du réseau pendant la période de pointe réelle T' est donc :

$$D' = \frac{D}{r}$$

Appelons alors d le débit moyen d'une prise d'arrosage. Le débit maximal du réseau est Rd et le débit pour lequel doit être calculé le réseau est nécessairement compris entre D' et Rd .

Le volume d'eau moyen que doit fournir chaque prise est $(D' \times T')/R$ et le temps de fonctionnement moyen de chaque prise est :

$$t' = \frac{D' \times T'}{R \times d}$$

Il en résulte que la fréquence ou probabilité moyenne de fonctionnement de chaque prise est :

$$p = \frac{t'}{T'} = \frac{D'}{R \cdot d} = \frac{D}{r \cdot R \cdot d} \quad (1)$$

La probabilité pour que, sur R prises, il y ait

exactement i prises en fonctionnement simultanément est :

$$C_R^i p^i q^{R-i} \text{ en posant } q = 1 - p,$$

c'est-à-dire que q représente la probabilité de non fonctionnement d'une prise.

Supposons que le réseau soit calibré pour satisfaire seulement la demande simultanée de N prises, $N < R$. La probabilité P_q pour que, sur les R prises qui constituent le réseau, il y ait au plus N prises en fonctionnement simultané est :

$$P_q = \sum_{i=0}^N C_R^i p^i q^{R-i} \quad (2)$$

Nous appellerons cette probabilité, P_q , la qualité de fonctionnement du réseau, car elle caractérise son plus ou moins bon fonctionnement en regard des demandes exprimées par les prises. Plus N , c'est-à-dire P_q , est grand, plus le réseau est susceptible de satisfaire des demandes plus nombreuses. $1 - P_q$ représente une probabilité de perte ou encombrement de réseau puisque, si N prises sont ouvertes, aucune autre demande ne peut être satisfaite.

Si donc on se donne une qualité de fonctionnement, c'est-à-dire une valeur de P_q comprise entre 0 et 1 mais généralement voisine de 1 (par exemple 0,95 ou 0,99), la formule (2) permet de calculer, pour un réseau donné, le nombre N de prises à considérer comme ouvertes simultanément. Le dimensionnement du réseau devra être tel que le débit Nd soit assuré quelles que soient les prises en service, pourvu que le nombre de celles-ci n'excède pas N . Le calcul s'effectuera en supposant que les prises qui demandent le débit Nd sont celles auxquelles sont attachées les plus fortes pertes de charge.

1.3. Formule pratique. La première formule de la demande.

Le calcul de l'expression de P_q est toutefois particulièrement pénible dès que R n'est pas très petit.

Or, on sait que lorsque R est grand on peut assimiler la loi de probabilité, définie par la relation (2), qui s'appelle loi binomiale, à la loi du hasard ou loi de Gauss ou de Laplace.

Si l'on considère l'expression :

$$\frac{X - Rp}{\sqrt{Rpq}}$$

on peut écrire :

$$P_r \left(\frac{X - Rp}{\sqrt{Rpq}} \leq U \right) = \Pi(U)$$

le symbole P_r signifiant « probabilité » et $\Pi(U)$ étant la fonction de répartition de la loi du hasard ou de Laplace.

On en déduit que si l'on choisit la valeur de U correspondant à P_q valeur donnée par les tables, soit :

$$P_q = \Pi(U)$$

$$N = Rp + U(P_q) \sqrt{Rpq} \quad (3)$$

Si l'on remplace p par sa valeur (1),

$$N = \frac{D}{rd} + U(P_q) \sqrt{\frac{D}{rd} \left(1 - \frac{D}{rRd}\right)}$$

Posons alors :

$$A = \frac{D}{rd} \quad (4)$$

qui représente le nombre moyen de prises en fonctionnement simultanément, il vient :

$$N = A \left[1 + U(P_q) \sqrt{\frac{1}{A} - \frac{1}{R}} \right] \quad (5)$$

Remarquons que l'on a :

$$\frac{N-A}{A} = U(P_q) \sqrt{\frac{1}{A} - \frac{1}{R}}$$

Lorsque la distribution se fait à la demande, l'augmentation relative du débit que doit porter la canalisation par rapport au débit moyen D/r calculé sur une durée d'utilisation T' est donné par l'expression :

$$U(P_q) \sqrt{\frac{1}{A} - \frac{1}{R}}$$

1.4. Valeurs des paramètres.

La formule dépend de deux paramètres :

r et $U(P_q)$

1.4.1. Valeur de r rendement d'utilisation du réseau :

$$r = \frac{T'}{T} \leq 1$$

T' est défini par le fait qu'aucune demande n'est enregistrée pendant le temps $T - T'$. En réalité, pendant la période de pointe T , il est possible que la demande de chaque prise caractérisée par p ne soit pas constante, mais variable. Par raison de simplification, le schéma employé consiste à supposer $p = 0$ pendant le temps $T - T'$, puis constant pendant toute la période T' . En d'autres termes, l'introduction du paramètre r revient à appliquer un coefficient de majoration $1/r$ à la probabilité de fonctionnement de chaque prise calculée sur la totalité de la période de pointe T , pour tenir compte de sa variation autour de la moyenne.

Jusqu'à présent, les projeteurs ont admis des coefficients variant de

$$(16/24) = 0,667 \text{ à } (18/24) = 0,75.$$

Nous pensons personnellement que r doit être très voisin de 1 et que les normes adoptées sont sans doute trop prudentes. Les agriculteurs, s'habituant à l'irrigation par aspersion, ont tendance à arroser à toute heure de la journée, si bien qu'avec le temps, r devrait augmenter pour tendre vers 1. Or, dans un réseau nouvellement installé, il n'y a pas de saturation possible du réseau, car toute la surface n'est pas arrosée, et ceci précisément à un moment où r peut être assez faible, car p est très variable. Avec l'expérience de l'irrigation, p tendra à se régulariser et r risque d'être très voisin de 1 au moment où il peut y avoir saturation du réseau.

D'ailleurs, choisir $r = 1$ revient à admettre que la formule de la demande sera, en tout état de cause,

vérifiée, non plus peut-être à chaque instant, mais certainement en moyenne sur toute la journée. Il est donc sans doute intellectuellement plus satisfaisant de calculer le réseau avec une qualité de fonctionnement plus élevée, mais valable en moyenne, qu'avec une qualité plus faible valable pendant certains instants seulement.

En outre, la saturation du réseau n'implique pas l'arrêt des arrosages, mais simplement un moins bon fonctionnement du réseau. Il se produira d'ailleurs un nivellement automatique de la pointe instantanée, par déplacement vers des périodes moins chargées des arrosages les plus perturbés, phénomène très classique et sans inconvénient pour l'utilisateur puisque, par hypothèse, le réseau est calculé pour n'être que très faiblement encombré en moyenne pendant toute la période de pointe d'été.

Enfin, la prise en considération du processus qui conduit à l'établissement de la deuxième formule de la demande, qui sera exposée plus loin, permet de mieux encore justifier le choix d'une valeur de r voisine de 1.

1.4.2. Valeur de $U(P_q)$.

$U(P_q)$ dépend de la qualité de fonctionnement choisie, c'est-à-dire de la probabilité pour que le nombre de prises ouvertes ne dépasse pas la capacité de transport du réseau. Le tableau ci-après donne quelques valeurs principales :

$U(P_q)$	P_q
3,09	99,9 %
2,324	99 %
1,645	95 %
1,282	90 %
0,842	80 %

Les projeteurs choisissent généralement des valeurs de P_q de 95 ou 99 %. Il semblerait peu prudent de descendre au-dessous de 95 % et illusoire de monter au-delà de 99 %. Les remarques formulées ci-dessus à propos de la valeur de r nous conduisent à penser que la bonne formule consisterait à choisir une valeur de r très voisine de 1 ou même égale à 1, mais, par contre, à adopter la valeur de U correspondant à $P_q = 99$ %, soit $U = 2,324$.

Certains projeteurs estiment également que la qualité de fonctionnement doit varier selon que l'on se place en tête ou à l'extrémité du réseau. Ils adoptent 99 % à l'extrémité pour descendre à 95 % ou même 90 % en tête. Il peut paraître intuitif en effet que la qualité doit être d'autant meilleure que le nombre de prises considérées est plus faible. Mais ce raisonnement n'est pas évident. Il est même, sur le plan théorique, en contradiction avec celui qui conduit à l'établissement de la formule, puisque celle-ci a justement pour objet de calculer le fonctionnement de la demande en fonction du nombre de prises.

Il est vrai que la formule n'est qu'approchée, mais encore faudrait-il connaître le sens de l'erreur commise qui n'est pas nécessairement celui dicté par l'intuition. *A priori*, on a exactement une chance sur deux de se tromper.

Toutefois, comme on le verra plus loin, la deuxième formule de la demande, dont la démons-

tration est malheureusement assez complexe, justifie les errements employés car elle conduit à une valeur de U , qui pour P_q donné, décroît lorsque le nombre de prises croît.

1.5. Remarques concernant la liberté de la demande.

Une prise d'irrigation est essentiellement caractérisée par deux paramètres :

- le débit moyen d , qui dépend essentiellement du nombre d'asperseurs qui seront mis en fonctionnement simultanément;
- le temps de fonctionnement, qui, lorsque d est déterminé, ne dépend plus que des caractéristiques pédologiques et agronomiques des parcelles arrosées par la prise.

Mais ces deux paramètres sont finalement intégrés dans la probabilité de fonctionnement p de la prise qui caractérise la liberté individuelle de l'utilisateur.

La liberté est d'autant plus grande que p est plus faible.

La liberté est nulle lorsque $p = 1$, c'est-à-dire $(D/r) = Rd$, car pour satisfaire aux besoins agricoles du périmètre, les usagers doivent alors arroser d'une manière continue pendant tout le temps rT .

La liberté totale ou maximale possible correspond au cas où les prises arrosent pendant le minimum de temps. Si l'on appelle θ la durée d'un arrosage, directement liée à la dose d'arrosage pour un matériel d'aspersion d'une pluviométrie donnée, et $1/n$ le rapport entre la dose d'arrosage et les besoins en eau des cultures pendant la période rT , la durée minimale de fonctionnement d'une prise est $n\theta$, car alors toutes les parcelles dépendant de la prise sont arrosées en une seule fois à intervalle de temps rT/n .

La liberté totale correspond donc à une valeur de p que l'on appellera p_0 :

$$p_0 = \frac{n\theta}{rT}$$

p peut donc varier entre deux valeurs extrêmes p_0 et 1. Dans la pratique, les valeurs de p employées par les différents projeteurs varient beaucoup et on en voit mal les raisons profondes.

La valeur de p choisie ne devrait dépendre que de l'état de développement économique du pays considéré, puisque la liberté n'est pas gratuite, et aussi sans doute des caractères psychologiques particuliers à chaque race.

Pour mieux cerner ce problème délicat et permettre des comparaisons plus faciles, nous proposons l'emploi d'un indicateur de liberté qui aurait pour expression :

$$li = \frac{1-p}{p-p_0} \quad (6)$$

p_0 est sensiblement compris entre 0,04 et 0,08.

Adoptons une valeur moyenne 0,06. On obtient pour cette valeur de p_0 les résultats suivants :

$p = 0,5$	$li = 1,1$
$p = 0,3$	$li = 3$
$p = 0,2$	$li = 5,7$
$p = 0,1$	$li = 27$

Il semble bien qu'un indicateur de liberté normal devrait être compris entre 3 et 6.

1.6. Généralisation et application de la formule de la demande.

1.6.1. La formule (3) ne fait intervenir que le débit moyen d d'une prise d'arrosage. Or dans un réseau, les débits des prises sont variables et se répartissent en un certain nombre de classes qui dépendent des limiteurs de débits placés sur les sorties.

Soit i l'une de ces classes comportant R_i prises de débit d_i assorties d'une probabilité moyenne p_i . La loi (3) n'étant autre que la loi de Laplace, peut s'appliquer à l'une quelconque de ces classes i .

En outre, elle possède la propriété essentielle de se conserver par addition.

Or (3), s'écrit, en appelant D_N le débit de pointe :

$$D_N = \text{moyenne du débit} + U(P_q) \sqrt{\text{Variance du débit}}$$

Or, $\sum_i R_i p_i d_i$ est le débit moyen. En outre, si les prises sont indépendantes les unes des autres, ce qui a été supposé jusqu'à maintenant et qui est sans doute très proche de la réalité, on sait que la variance de la somme est égale à la somme des variances. Or la variance du débit a pour expression $R_i p_i q_i d_i^2$. On a donc finalement la formule de la demande généralisée

$$D_N = \sum_i R_i p_i d_i + U(P_q) \sqrt{\sum_i R_i p_i q_i d_i^2} \quad (7)$$

On peut donc appliquer cette dernière formule soit en découpant le périmètre en îlots cultureux, soit en découpant la population des prises d'irrigation en un nombre convenable de sous-populations. La formule s'applique aussi bien à l'ensemble complet ou à un ou plusieurs sous-ensembles.

On peut même pousser encore plus loin le découpage et considérer chaque prise isolément. Chaque prise j obéit en effet à une loi binomiale avec les probabilités p_j et $q_j = 1 - p_j$. Or d'après la loi forte des grands nombres, une somme de variables aléatoires binomiales converge vers la loi de Laplace de caractéristiques :

- moyenne du débit = $\sum p_j d_j$;
- variance du débit = $\sum p_j q_j d_j^2$.

On peut donc aussi écrire :

$$D_N = \sum_{j=1}^{j=R} p_j d_j + U(P_q) \sqrt{\sum_{j=1}^{j=R} p_j q_j d_j^2} \quad (8)$$

1.6.2. Il est fréquent que la totalité du périmètre ne soit pas arrosée chaque année par suite de l'obligation d'une rotation culturale et d'un plan d'assolement. Deux cas peuvent alors se présenter :

— Chaque prise arrose toute la surface desservie mais toutes les prises ne sont pas en fonctionnement chaque année. En moyenne $R' < R$ prises fonctionnent seulement et soit $\rho = (R'/R)$.

Nous avons d'ailleurs aussi $\rho = (S'/S)$ et le débit total est ρD . La probabilité p est toujours égale à D/rRd mais la formule de la demande devient :

$$N' = \rho R p + U(P_q) \sqrt{\rho R p q}$$

que l'on peut aussi généraliser sous la forme (7) ou (8) :

— Toutes les prises fonctionnent, mais ne desservent chaque année qu'une fraction f de la surface. Dans ce cas p devient

$$p' = fp$$

et la formule :

$$N'' = Rp' + U(P_q) \sqrt{Rp'q'}$$

généralisable également de la même façon.

En fait, dans la pratique, les deux cas peuvent se présenter simultanément et la formule de la demande est applicable à n'importe quel ensemble ou sous-ensemble que l'on voudra. La seule condition est que le sous-ensemble choisi soit suffisamment important pour permettre l'assimilation de la loi binomiale à la loi de Laplace.

1.6.3. Enfin, on peut considérer que le débit de chaque prise n'est plus une donnée mais une variable aléatoire du type laplacien de moyenne m_i et de variance σ_i^2 . Toujours pour les mêmes raisons, on peut écrire :

$$D_N = \sum_i m_i + U(P_q) \sqrt{\sum_i \sigma_i^2}$$

Cette formule, sans grand intérêt pour un réseau d'irrigation, est par contre susceptible d'applications intéressantes pour des ouvrages hydrauliques desservant d'autres catégories d'usagers (industriels et domestiques).

1.7. Nous arrêtons-là ces considérations sur la première formule de la demande pour bâtir un nouveau modèle susceptible de mieux représenter le fonctionnement du réseau. On peut en effet reprocher valablement à la première formule d'oublier que les probabilités p d'ouverture des prises sont modifiées par le seul fait que toute demande n'est pas satisfaite et des appels rejetés.

Mais avant d'aller plus loin, il nous a semblé indispensable de faire quelques rappels sur la théorie des processus aléatoires.

2. Rappel de quelques acquisitions essentielles du calcul des probabilités et de la théorie des processus aléatoires

2.1. La variable aléatoire et sa fonction de répartition.

Une variable aléatoire est une grandeur susceptible de prendre un ensemble de valeurs possibles. Cet ensemble de valeurs peut être en nombre fini ou infini, dénombrable, ou non.

Cette variable X est définie par sa fonction de répartition :

$$F(x) = \Pr(X < x),$$

le signe $\Pr$ voulant dire « probabilité » ;

$F(x)$ est monotone, non décroissante et

$$F(-\infty) = 0 \quad F(+\infty) = 1$$

Le moment m_h d'ordre h de la variable X est défini par :

$$m_h = \int_{-\infty}^{+\infty} x^h dF(x)$$

m_1 s'appelle valeur probable de X ou encore espérance mathématique qu'on représente par le symbole :

$$E(X) = m_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x)$$

La variable aléatoire $[X - E(X)]$ a une valeur probable nulle, mais le moment d'ordre h de cette variable a pour expression :

$$\mu_h = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^h dF(x)$$

Le moment μ_2 s'appelle fluctuation ou variance de la variable X . Il s'écrit $\text{Var}(X)$ et sa racine carrée, que l'on écrit $\sigma(X)$ s'appelle écart quadratique moyen ou écart-type de X . On a la relation :

$$\text{Var}(X) = \sigma^2(X) = m_2 - m_1^2$$

2.2. La fonction caractéristique.

Si l'on considère une variable réelle u , par définition la fonction caractéristique de la variable aléatoire X est :

$$\varphi(u) = E(e^{iuX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} dF(x)$$

On a les propriétés :

$$\varphi(0) = 1 \quad \varphi'(0) = i \cdot m_1 \quad \varphi^{(n)}(0) = i^n \cdot m_n$$

En fait, il sera très commode de désigner par fonction caractéristique, la fonction suivante :

$$\varphi(z) = E(e^{zx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zx} dF(x)$$

où z est une variable complexe. $\varphi(z)$ existe toujours sur l'axe imaginaire. Si $F(x)$ est continue au point x , nous avons :

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+a}^{+i\infty+a} e^{zx} \varphi(-z) \frac{dz}{z}$$

C'est une intégrale au sens de Cauchy, dans le plan complexe, prise sur la droite $x = a$.

Nous avons encore :

$$\varphi^{(n)}(0) = m_n$$

2.3. La fonction génératrice.

Si la variable aléatoire est totalement discontinue, la fonction caractéristique devient :

$$\varphi(z) = \sum_i p_i \cdot e^{zx_i}$$

p_i étant la probabilité pour que la variable aléatoire X soit égale à x_i .

Lorsque X ne prend que des valeurs entières positives, il est commode de définir la fonction génératrice :

$$g(u) = p_0 + p_1 u + \dots + p_n u^n + \dots$$

où u est une variable complexe :

$$p_0 + p_1 + \dots + p_n + \dots = g(1) = 1$$

Nous avons :

$$\varphi(z) = g(e^z)$$

Nous déduisons alors :

$$\begin{cases} m_1 = E(x) = g'(1) \\ \text{Var } X = g''(1) + g'(1) - g'^2(1) \end{cases} \quad (9)$$

On déduit ainsi :

$$p_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \quad (10)$$

$$p_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C g(u) \frac{du}{u^{n+1}} \quad (11)$$

L'intégrale étant prise sur un contour fermé C situé à l'intérieur du cercle de centre O et de rayon 1, ce contour étant parcouru dans le sens positif.

2.4. La notion de trafic.

Considérons des « visiteurs » ou des « appels » susceptibles d'être servis par un certain nombre d'organes ou « guichets ». Les instants d'arrivée des appels obéissent à une loi des arrivées. Les durées pendant lesquelles ceux-ci sont servis obéissent à une loi des durées de prise.

Le trafic offert est égal, par définition, au nombre moyen d'appels arrivant pendant la valeur moyenne d'une durée de prise.

De même, par définition, le trafic écoulé est égal au nombre moyen d'organes occupés à un instant.

Enfin, le trafic d'attente est égal au nombre moyen d'appels arrivant durant la valeur moyenne de l'attente.

2.5. Les processus stochastiques.

Une variable aléatoire fonction d'un paramètre constitue une fonction aléatoire. Si ce paramètre est réel et varie d'une manière continue, on peut considérer qu'il représente le temps t . La fonction aléatoire définit alors un processus stochastique ou encore aléatoire. Ainsi, si l'on considère une suite de n époques $t_1, t_2, t_3 \dots t_n$, la fonction aléatoire $Y(t)$ correspond, à ces instants, aux variables aléatoires $Y_1, Y_2, Y_3 \dots Y_n$.

Les processus stochastiques, très nombreux, peuvent être classés suivant le nombre de valeurs possibles pour la fonction aléatoire $Y(t)$ à un instant donné. Ce nombre peut être fini ou infini, dénombrable ou non. Si le système peut changer d'état pour n'importe quelle époque, le processus est permanent. Il est discontinu si les changements d'états ont lieu par « sauts ».

Les processus de Markov, dont les applications sont très vastes, sont caractérisés par le fait que l'évolution du système ne dépend que de son état à l'instant t .

Considérons la moyenne temporelle de la fonction aléatoire liée au processus stochastique :

$$\bar{Y}_T = \frac{1}{T} \int_0^T Y(t) dt$$

Si quand $T \rightarrow \infty$, la variable aléatoire $\bar{Y}_T$ tend vers une variable aléatoire limite, nous disons que le processus est ergodique au sens large.

Indiquons que cette définition manque de rigueur,

mais qu'elle nous suffit pour les besoins du présent exposé.

En outre, si la variable aléatoire limite se réduit à un nombre certain, il y a ergodisme au sens strict.

2.6. Les processus de naissance et de mort.

2.6.1. Définition.

Ces processus sont des cas particuliers de ceux de Markov.

Considérons un système permanent discontinu et une fonction aléatoire $Y(t)$ qui prend les valeurs 0, 1, 2, ..., N représentant les états possibles du système. N peut être fini ou infini.

Un processus de naissance et de mort est un processus homogène dans le temps ayant les quatre caractéristiques suivantes :

- les seuls sauts possibles sont ceux vers les états immédiatement voisins : de j à $j+1$ ou $j-1$ si $0 < j < N$, ou de 0 à 1 ou enfin de N à $N-1$;
- si, à l'instant quelconque t , le système est à l'état j , la probabilité conditionnelle de passer à l'état $j+1$ dans l'intervalle dt qui suit, est constante dans le temps et égale à :

$$\lambda_j dt (\lambda_j \geq 0);$$

- si, à l'instant quelconque t , le système est à l'état j , la probabilité conditionnelle de passer à l'état $j-1$ dans l'intervalle dt qui suit, est constante dans le temps et égale à :

$$\mu_j dt (\mu_j \geq 0);$$

- la probabilité de plus d'une transition dans cet intervalle dt est un infiniment petit du second ordre, donc négligeable.

Les coefficients de naissance λ_j correspondent à une arrivée; de même les coefficients de mortalité μ_j correspondent à un départ ou fin de prise. Ils peuvent dépendre de l'état j du système.

Si le système se trouve à l'état j à l'instant t et si un changement se produit dans l'intervalle $(t, t+dt)$, la probabilité conditionnelle pour que ce soit une naissance est :

$$\frac{\lambda_j}{\lambda_j + \mu_j}$$

et pour que ce soit une mort :

$$\frac{\mu_j}{\lambda_j + \mu_j}$$

2.6.2. Système d'équations du processus.

Supposons qu'à l'instant initial, pris pour origine des temps, le système est à l'état i .

Désignons par le symbole $P(j, t/i)$ la probabilité conditionnelle pour que le système soit à l'instant t à l'état j s'il était à l'état i à l'instant initial.

La probabilité pour que le système soit à l'état j à l'instant $t + \Delta t$ est la somme des probabilités des trois événements suivants, possibles et incompatibles :

- à l'instant t , le système est à l'état $j-1$ et une naissance arrive dans l'intervalle Δt qui suit :

$$\text{probabilité : } P(j-1, t/i) \cdot \lambda_{j-1} \cdot \Delta t;$$

— au contraire le système est à l'état $j + 1$ et il arrive une mort :

probabilité : $P(j + 1, t/i) \cdot \mu_{j+1} \cdot \Delta t$;

— enfin, le système est à l'état j et il n'arrive ni naissance ni mort :

probabilité : $P(j, t/i) [1 - \lambda_j \Delta t - \mu_j \Delta t]$.

La somme de ces trois probabilités est égale à :

$$P(j, t + \Delta t/i)$$

Si l'on fait tendre Δt vers 0, on obtient le système d'équations du processus.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP(0, t/i)}{dt} &= -\lambda_0 \cdot P(0, t/i) + \mu_1 P(1, t/i) \\ \frac{dP(j, t/i)}{dt} &= \lambda_{j-1} \cdot P(j-1, t/i) - (\lambda_j + \mu_j) P(j, t/i) \\ &\quad + \mu_{j+1} P(j+1, t/i) \\ \frac{dP(N, t/i)}{dt} &= \lambda_{N-1} \cdot P(N-1, t/i) - \mu_N \cdot P(N, t/i) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

2.6.3. Processus limite.

Pour les chaînes homogènes et finies, il existe un processus limite stationnaire indépendant des conditions initiales lorsque $t \rightarrow \infty$, c'est-à-dire qu'il y a ergodisme au sens strict. En langage courant, on dit que le système est en équilibre statistique.

On a alors :

$$\text{limite pour } t \rightarrow \infty \text{ de } P(j, t/i) = P_j$$

qui est la probabilité absolue pour que le système soit à l'état j indépendamment des conditions initiales.

Si l'on considère la probabilité absolue $P(j, t)$ dans le processus temporel, on a aussi :

$$\text{limite pour } t \rightarrow \infty \text{ } P(j, t) = P_j$$

Cette relation entraîne :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} P(j, t) dt = P_j$$

Autrement dit, l'ergodisme entraîne que P_j , limite de $P(j, t)$ peut aussi être considéré, dans le processus limite, comme la proportion du temps pendant lequel le système est à l'état j .

Si l'on reprend le système d'équations (12) et si l'on fait tendre t vers l'infini, on obtient le système d'équations du processus limite, appelé équations d'état :

$$\left. \begin{aligned} -\lambda_0 P_0 + \mu_1 P_1 &= 0 \\ \lambda_{j-1} P_{j-1} - (\lambda_j + \mu_j) P_j + \mu_{j+1} P_{j+1} &= 0 \\ \lambda_{N-1} P_{N-1} - \mu_N P_N &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

La solution, aisée à trouver, est :

$$P_j = P_0 \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_j}$$

et puisque $\sum_{j=0}^N P_j = 1$, on en déduit :

$$P_j = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{j-1} / \mu_1 \mu_2 \dots \mu_j}{1 + (\lambda_0 / \mu_1) + (\lambda_0 \lambda_1 / \mu_1 \mu_2) \dots + (\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{N-1} / \mu_1 \mu_2 \dots \mu_N)} \quad (14)$$

On retrouve ainsi la formule d'Erlang.

2.6.4. Taux d'arrivées et de fin.

Rappelons que $P(j, t)$ est la probabilité absolue de trouver le système à l'état j à l'instant t .

Nous appellerons respectivement taux moyen d'arrivées à l'instant t et taux moyen d'arrivées servies à l'instant t , les expressions :

$$\left. \begin{aligned} \Lambda(t) &= \sum_{j=0}^N \lambda_j P(j, t) \\ \Lambda_0(t) &= \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j P(j, t) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

De même, nous appellerons taux moyen de fins ou départs à l'instant t , l'expression :

$$\Gamma(t) = \sum_{j=0}^N \mu_j P(j, t) \quad (16)$$

Dans le processus limite stationnaire, ces taux deviennent respectivement :

— taux moyen d'arrivées ;

$$C = \sum_{j=0}^N \lambda_j P_j$$

— taux moyen d'arrivées servies :

$$C_0 = \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j P_j = C \left(1 - \frac{\lambda_N}{C} P_N \right) \quad (17)$$

— taux moyen de fins :

$$\Gamma = \sum_{j=0}^N \mu_j P_j$$

où P_j est donné par (14).

Remarquons que des équations (13) on déduit facilement, en multipliant la première par 1, la deuxième par 2 etc. et en additionnant :

$$\Gamma = C_0$$

En d'autres termes, les nombres moyens d'arrivées servies et de départs sont égaux, d'où le nom d'équilibre statistique donné au processus limite.

La probabilité d'encombrement du système à un instant t est :

$$P_t(t) = P(N, t)$$

A la limite, nous obtenons la probabilité d'encombrement dans le temps :

$$P_t = P_N$$

D'après la remarque faite en 2-6-3, P_t est donc la proportion du temps d'encombrement dans le cas du processus limite.

Appelons $P_a(t)$ la probabilité conditionnelle pour qu'un appel arrivant à l'instant t trouve le système encombré. La probabilité pour que dans l'intervalle

($t, t + dt$) arrive un appel trouvant le système encombré est :

$$P(N, t) \cdot \lambda_N dt$$

Cette probabilité est égale à la probabilité $\Lambda(t) dt$ pour qu'il arrive *a priori* un appel dans cet intervalle et pour que le système soit encombré s'il arrive un appel $P_a(t)$.

Donc :

$$P(N, t) \cdot \lambda_N dt = P_a(t) \cdot \Lambda(t) dt$$

$$P_a(t) = \frac{\lambda_N}{\Lambda(t)} P(N, t)$$

Dans le cas du processus limite, nous obtenons l'encombrement d'appel :

$$P_a = \frac{\lambda_N}{C} P_N \quad (18)$$

relation simple entre l'encombrement d'appel et l'encombrement dans le temps.

2.6.5. Durées de prise.

Supposons maintenant que toutes les durées de prise obéissent à la même fonction de répartition ayant pour durée moyenne $\theta = (1/\mu)$.

Si l'on appelle A le trafic offert,

$$A = C \cdot \theta$$

Or, d'après (17) et (18) :

$$A = \theta \cdot \frac{C_0}{1 - (\lambda_N/C) P_N} = \theta \cdot \frac{C_0}{1 - P_a} = \theta \cdot \frac{\Gamma}{1 - P_a}$$

ou encore :

$$A \cdot (1 - P_a) = \sum_{j=0}^N \left(\frac{\mu_j}{\mu} \right) P_j$$

Or, si les durées de prise sont mutuellement indépendantes, la probabilité conditionnelle d'une fin dans l'intervalle ($t, t + dt$) quand le système est à l'état j est nécessairement j fois celle relative à une seule durée de prise. Nous avons donc $\mu_j = K j$ et si l'on tient compte de la définition de θ , on déduit $\mu_j = j \cdot \mu$.

Donc :

$$A (1 - P_a) = \sum_{j=0}^N j P_j = A_1,$$

A_1 étant le trafic écoulé.

Nous avons alors la relation très importante :

$$\frac{A - A_1}{A} = P_a \quad (19)$$

$A - A_1$ est le trafic refusé.

3. La deuxième formule de la demande pour un réseau d'irrigation

3.1. Considérons un réseau d'irrigation équipé de R prises d'irrigation susceptibles de s'ouvrir, c'est-à-dire d'émettre des appels sur le réseau. La durée moyenne d'un appel est le temps moyen d'un arrosage, soit $\theta = (1/\mu)$.

Le réseau, par ailleurs, ne peut satisfaire toute demande, car il n'est calibré que pour transporter les débits de N prises ou sources, $R > N$. Tout se passe donc comme si nous avions R sources et N organes de liaison.

Si, à un instant donné, le réseau se trouve dans l'état j , c'est-à-dire que j prises sont en fonctionnement, la probabilité de passer à l'état $j+1$ dans l'intervalle de temps ($t, t + dt$) est de la forme $\lambda_j dt$, et de passer à l'état $j-1$, de la forme $\mu_j dt$.

On peut donc considérer que le fonctionnement du réseau est représenté par un processus stochastique de naissance et de mort tel qu'il a été défini en 2-6-1.

Mais il est évident que, lorsque j prises sont en fonctionnement à l'instant t , la probabilité pour qu'un nouvel appel se produise est d'autant plus grande que le nombre de prises fermées est plus grand. Une très bonne approximation doit consister à admettre que cette probabilité est proportionnelle à $R - j$.

Posons donc :

$$\lambda_j = \lambda \cdot (R - j) \quad \lambda \text{ coefficient}$$

avec $\lambda_N = 0$.

Par ailleurs, on peut également admettre très valablement que toutes les durées d'arrosage, c'est-à-dire d'appel, obéissent à la même fonction de répartition statistique. D'après le paragraphe 2-6-5, on a donc :

$$\mu_j = \mu j$$

avec : $\mu = (1/\theta)$.

3.2. Le système évolue dans le temps vers un équilibre statistique et le processus devient stationnaire.

Soit, à l'équilibre, A le trafic offert, c'est-à-dire le nombre moyen d'appels se produisant pendant la durée moyenne d'arrosage θ . Soit $a = (A/R)$ le trafic offert par prise.

Soit encore A_1 le trafic écoulé, c'est-à-dire le nombre moyen de prises ouvertes à l'instant t et $a_1 = (A_1/R)$ le trafic écoulé par prise.

Si l'on appelle :

D : le débit fictif continu correspondant aux besoins en eaux agricoles du périmètre desservi par le réseau;

T : la durée d'une période quelconque choisie pendant le mois de pointe des arrosages;

r : le rendement d'utilisation en temps du réseau avec $T' = rT$,

chaque prise doit fournir pendant la période T un volume moyen $D \cdot T/R$.

Le nombre moyen d'arrosages pendant la période $T' = rT$ est $D \cdot T/R \cdot d \cdot \theta$ par prise, d étant le débit moyen d'une prise.

Le nombre moyen d'arrosages pendant le temps θ c'est-à-dire le nombre moyen d'appels sera :

$$a = \frac{D \cdot T}{R \cdot d \cdot \theta} \times \frac{\theta}{r \cdot T} = \frac{D}{r \cdot R \cdot d} \quad (20)$$

Si P_a est l'encombrement d'appel, c'est-à-dire la probabilité pour qu'un appel arrivant trouve le réseau saturé est, d'après (19) :

$$P_a = \frac{a - a_1}{a} \quad a_1 = a(1 - P_a) \quad (21)$$

P_a représente aussi le nombre relatif moyen des appels refusés.

La formule générale (14) donne, en remplaçant λ_j par $\lambda(R - j)$ et μ_j par μ :

$$P_j = \frac{\frac{\lambda^j}{\mu^j} \frac{R(R-1) \dots (R-j+1)}{1 \cdot 2 \dots j}}{\sum_{k=0}^N \frac{\lambda^k}{\mu^k} \frac{R(R-1) \dots (R-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}}$$

Si l'on pose :

$$p = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \quad \text{et} \quad q = 1 - p = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

en divisant le numérateur et le dénominateur par $\mu^R/(\lambda + \mu)^R$, on trouve :

$$P_j = \frac{C_{R-j}^N p^j q^{R-j}}{\sum_{k=0}^N C_{R-k}^N p^k q^{R-k}} \quad (22)$$

On en déduit l'encombrement dans le temps, c'est-à-dire la proportion du temps pendant laquelle le réseau est saturé :

$$P_N = \frac{C_{R-N}^N p^N q^{R-N}}{\sum_{k=0}^N C_{R-k}^N p^k q^{R-k}} \quad (23)$$

L'encombrement d'appel se déduit de P_N en substituant $R - 1$ à R , puisqu'il est égal à l'encombrement dans le temps pour un réseau comportant $R - 1$ prises :

$$P_a = \frac{C_{R-1}^N p^N q^{R-1-N}}{\sum_{k=0}^N C_{R-1-k}^N p^k q^{R-1-k}} \quad (24)$$

D'après (17) :

$$C = \sum_{j=0}^N \lambda(R - j) P_j = \lambda(R - A_1)$$

$$\text{puisque } A_1 = \sum_{j=0}^N j P_j$$

$$C_0 = C(1 - P_a)$$

$$\Gamma = \sum_{j=0}^N \mu j P_j = \mu A_1$$

La relation $C_0 = \Gamma$ de l'équilibre statistique donne :

$$\lambda(R - A_1)(1 - P_a) = \mu A_1$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{A_1}{(R - A_1)(1 - P_a)}$$

c'est-à-dire, en tenant compte de (21) :

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{a_1}{(1 - a_1)(a_1/a)} = \frac{a}{1 - a_1} \quad (25)$$

ou encore :

$$\lambda\theta = \frac{a}{1 - a(1 - P_a)} \quad (26)$$

et enfin :

$$p = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{a}{1 + aP_a} \quad (27)$$

a résultant de la formule (20) et θ sont déterminés par des considérations agronomiques.

Si donc on se fixe P_a , p et q sont connus. Rappelons que P_a , encombrement d'appel, représente aussi le nombre relatif moyen des appels refusés.

Il correspond donc à une définition plus précise de ce que nous avons appelé probabilité de perte d'un réseau d'irrigation, probabilité complémentaire de la probabilité de fonctionnement.

D'une manière analogue aux développements qui nous avaient conduit à l'établissement de la première formule de la demande, la formule (24) permet par tâtonnements de calculer pour un encombrement d'appel ou probabilité de perte déterminée, la valeur de N , c'est-à-dire le nombre de prises parmi les R à considérer comme ouvertes à la fois.

3.3. Loi asymptotique de la formule (24).

Dans la formule (24), le numérateur représente la densité de probabilité de la loi binomiale et le dénominateur la fonction de répartition de la même loi. Or on sait que, lorsque R augmente, la loi binomiale converge vers la loi normale si bien que, pour R suffisamment grand, on peut assimiler la loi binomiale à la loi normale. La même propriété avait d'ailleurs déjà été utilisée pour l'établissement de la première formule de la demande.

Appelons $\Psi(U')$ la densité de probabilité de la loi normale et $\Pi(U')$ la fonction de répartition de la même loi. Ces deux fonctions sont tabulées dans tous les ouvrages traitant du calcul des probabilités.

Nous avons :

$$C_{R-1}^N p^N q^{R-1-N} = \frac{1}{\sqrt{(R-1)pq}} \Psi(U')$$

et :

$$\sum_{k=0}^N C_{R-1-k}^N p^k q^{R-1-k} = \Pi(U')$$

avec :

$$U' = \frac{N - (R - 1)p}{\sqrt{(R - 1)pq}}$$

La formule (24) devient alors :

$$P_a = \frac{1}{\sqrt{(R - 1)pq}} \frac{\Psi(U')}{\Pi(U')}$$

Appelons enfin :

$$H(U') = \frac{\Psi(U')}{\Pi(U')} \quad (28)$$

fonction qui se calcule aisément avec les tables.

Puisque p , q , sont donnés par les formules (20) et (27) et P_a fixé *a priori*, on peut calculer facilement U' par la formule :

$$\left. \begin{aligned} H(U') &= \sqrt{(R - 1)pq} \cdot P_a \\ \text{avec : } N &= (R - 1)p + U' \sqrt{(R - 1)pq} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

On a d'ailleurs :

$$N = (R - 1)p + \frac{U' \cdot H(U')}{P_a}$$

Cette formule est donc très voisine de la première formule de la demande. Toutefois, le paramètre U' n'est plus une constante dépendant de la probabilité de perte choisie, mais une fonction de P_a , p , q et R . Le calcul est d'ailleurs immédiat à partir du graphique ci-joint représentant la fonction $H(U')$ ou la fonction $U' \cdot H(U')$.

3.4. Formule approchée : la deuxième formule de la demande.

En général, on choisit P_a très petit.

Sans erreur sensible, d'après (27) et (20) :

$$p = \frac{a}{1 + aP_a} \quad \# \quad a = \frac{D}{r \cdot R \cdot d} \quad (30)$$

Par ailleurs, pour un réseau suffisamment important :

$$R - 1 \approx R$$

Remarquons que cette approximation entraîne :

$$P_a \approx P_N$$

Il en résulte que, d'après (26) :

$$\lambda \theta \approx \frac{a}{1 - a} = \frac{p}{1 - p} = \frac{p}{q}$$

Donc :

$$\mu = \frac{1}{\theta} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{1}{\theta} \cdot \frac{p}{q} \quad (31)$$

On a alors :

$$\lambda + \mu = \frac{1}{\theta} \left(1 + \frac{p}{q} \right) = \frac{1}{q\theta} \quad (32)$$

La formule (29) devient :

$$\begin{aligned} H(U') &= \sqrt{R p q} \cdot P_a \\ N &= R p + U' \sqrt{R p q} = R p + \frac{U' \cdot H(U')}{P_a} \end{aligned} \quad (33)$$

$A = R a$ est le trafic offert ou le nombre moyen de prises en fonctionnement simultané :

$$A = \frac{D}{r \cdot d} = R p \quad (34)$$

La deuxième formule de la demande peut encore s'écrire sous la même forme que celle de la première formule :

$$\begin{aligned} N &= A \left[1 + U' \sqrt{\frac{1}{A} - \frac{1}{R}} \right] = A + \frac{U' \cdot H(U')}{P_a} \\ \text{mais avec :} \\ H(U') &= P_a \cdot A \cdot \sqrt{\frac{1}{A} - \frac{1}{R}} \end{aligned} \quad (35)$$

Table des valeurs des fonctions :

$$H(U') = \frac{\Psi(U')}{\Pi(U')} \quad \text{et} \quad U' \cdot H(U')$$

U'	$H(U')$	$U' \cdot H(U')$
0	0,798	0
0,10	0,735	0,0735
0,20	0,675	0,135
0,40	0,562	0,225
0,60	0,459	0,275
0,80	0,367	0,294
1,00	0,287	0,287
1,20	0,219	0,263
1,40	0,163	0,228
1,60	0,117	0,188
1,80	0,082	0,147
2,00	0,054	0,108
2,50	0,0176	0,044
3,00	0,0044	0,0132

3.5. Comparaison pratique des première et deuxième formules de la demande.

3.5.1. Considérons un réseau équipé d'une prise par hectare, le débit moyen de chaque prise étant de 3 l/s et le débit fictif continu correspondant aux besoins de 0,5 l/s.ha.

Nous avons donc :

$$R = S \quad D = 0,5 S \quad \text{et} \quad d = 3 \text{ l/s}$$

Supposons en outre :

$$r = 0,67 = \frac{2}{3}$$

Nous avons alors :

$$p = \frac{0,5 S}{0,67 \cdot S \cdot 3} = 0,25 \quad q = 0,75$$

$$\sqrt{R p q} = 0,434 \sqrt{S}$$

Si $S = 25$ ha, l'application de la première formule de la demande pour une probabilité de perte de 5 % donne :

$$N = 25 \times 0,25 + 1,645 \times 0,434 \times 5 = 9,8$$

et pour une probabilité de perte de 1 % :

$$N = 25 \times 0,25 + 2,324 \times 0,434 \times 5 = 11,3$$

La deuxième formule de la demande se calcule, pour un encombrement d'appel $P_a = 1$ % :

$$H(U') = \frac{0,434 \times 5}{100} = 0,0217$$

La lecture du graphique 1 donne $U' = 2,42$:
et :

$$U' \cdot H(U') = 0,0525$$

d'où :

$$N = 25 \times 0,25 + 5,25 = 11,5$$

Remarquons que si, au lieu d'appliquer la formule (33), on calculait la formule non approchée (29), on trouverait un résultat à peine différent : $N = 11,2$.

On peut continuer ces calculs comparatifs pour des valeurs de S plus élevées et les résultats sont donnés dans le tableau ci-après.

La formule non approchée (29) donne des résultats pratiquement identiques à ceux de la formule (33), dès que S devient un peu grand.

Valeur de N :

SURFACE OU NOMBRE DE PRISES	PREMIÈRE FORMULE DE LA DEMANDE		DEUXIÈME FORMULE DE LA DEMANDE Encombrement d'appel c'est-à-dire : probabilité pour qu'une prise s'ouvrant trouve le réseau saturé, de 1 %
	Probabilité de perte de 5 %	1 %	
25	9,8	11,3	11,5
100	32,1	35,0	34,3
400	114,3	120,2	115,2
900	246,4	255,3	245,0

N. B. — Nous avons volontairement gardé des décimales pour permettre une meilleure comparaison, bien que dans la pratique il convienne d'arrondir.

3.5.2. La correspondance pratique entre la probabilité de perte de la première formule et l'encombrement d'appel de la deuxième formule se déduit de :

pour :

$$U' = 1,645 \quad H(U') = 0,107 \quad \text{d'où} \quad P_a = \frac{0,107}{\sqrt{R p q}}$$

et pour :

$$U' = 2,324 \quad H(U') = 0,0265 \quad \text{d'où} \quad P_a = \frac{0,0265}{\sqrt{R p q}}$$

En reprenant le même cas concret que précédemment on trouve les résultats suivants :

SURFACE OU NOMBRE DE PRISES	ENCOMBREMENT D'APPEL P_a DE LA DEUXIÈME FORMULE POUR UNE PROBABILITÉ DE PERTE DE LA PREMIÈRE FORMULE DE :	
	5 %	1 %
25	4,93 %	1,2 %
100	2,47 %	0,6 %
400	1,23 %	0,3 %
900	0,82 %	0,2 %

Inversement, on peut dresser le tableau suivant :

SURFACE OU NOMBRE DE PRISES	PROBABILITÉ DE PERTE DE LA PREMIÈRE FORMULE POUR UN ENCOMBREMENT D'APPEL DE LA DEUXIÈME FORMULE $P_a = 1 \%$
25	0,78 %
100	1,79 %
400	4,01 %
900	6,18 %

3.5.3. Les résultats ci-dessus ne peuvent être interprétés dans l'absolu, car ils dépendent des caractéristiques agronomiques et techniques du réseau. On peut en déduire toutefois que si l'application de la première formule est valable pour les petits réseaux, pour les grands, elle conduit à des résultats légèrement surabondants. *Si l'on veut obtenir réellement un encombrement d'appel de l'ordre de 1 %, la première formule de la demande doit être calculée avec une probabilité de perte de l'ordre de 1 % pour les petits réseaux et de l'ordre de 5 % pour les grands réseaux.*

Bien que le calcul de la deuxième formule soit à peine plus long que celui de la première, dans un souci de simplification, nous conseillerions de conserver la première formule avec une probabilité de perte de 1 % ($U = 2,324$) pour le calcul des petits réseaux ou des extrémités des grands réseaux.

Au contraire, lorsque le réseau est plus important, de l'ordre de 100 ha ou plus, il conviendrait d'appliquer la seconde formule, plus exacte et correspondant à un modèle mathématique sans doute plus proche de la réalité.

3.5.4. L'inexactitude relative de la première formule s'explique simplement : le raisonnement conduisant à son établissement ne tient pas compte du fait que la capacité de transport du réseau est limitée et par suite que certains appels sont rejetés. Les probabilités sont modifiées, puisque tous les appels ne peuvent s'exprimer librement.

3.5.5. La deuxième formule de la demande est susceptible des mêmes commentaires que la première. Nous conseillerons son application avec une valeur de P_a de 1 % et de r très voisine de 1.

En outre, elle est susceptible des mêmes généralisations que celles exposées au paragraphe 1-6. La raison en est que le processus décrit conduisant à l'établissement de la formule peut être décomposé en une somme de processus indépendants tous régis par des lois semblables. On peut donc la calculer sur des ensembles ou sous-ensembles décomposés en fonction de caractéristiques bien définies.

4. Evolution de la demande dans le temps

4.1. Considérons à nouveau le processus stochastique défini en 3.1 qui représente le fonctionnement du réseau d'irrigation. Rappelons que :

$$\begin{aligned}\lambda_j &= \lambda \cdot (R - j) & \text{avec } \lambda_N &= 0 \\ \mu_j &= \mu \cdot j & \text{avec } \mu &= \frac{1}{\theta}\end{aligned}$$

Le système d'équations du processus (12) s'écrit alors :

$$\left. \begin{aligned}\frac{dP(0, t/i)}{dt} &= -\lambda RP(0, t/i) + \mu P(1, t/i) \\ \frac{dP(j, t/i)}{dt} &= \lambda [R - (j-1)] P(j-1, t/i) - [\lambda(R-j) + \mu \cdot j] P(j, t/i) + \mu(j+1) P(j+1, t/i) \\ \frac{dP(N, t/i)}{dt} &= \lambda [R - (N-1)] P(N-1, t/i) - \mu NP(N, t/i)\end{aligned}\right\} (36)$$

Introduisons la fonction génératrice du processus définie en 2-3, qui est alors une fonction de deux variables u et t pour une valeur de i donnée :

$$G_i(u, t) = P(0, t/i) + uP(1, t/i) + \dots + u^j P(j, t/i) + \dots + u^N P(N, t/i)$$

Calculons :

$$\frac{\partial G_i(u, t)}{\partial u} = P(1, t/i) + \dots + j u^{j-1} P(j, t/i) + \dots + N u^{N-1} P(N, t/i)$$

Dans le système d'équations (36), multiplions la première équation par 1, la seconde par u , ... la $(j+1)^{\text{ème}}$ par u^j ... et la dernière par u^N , puis additionnons.

On obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_i}{\partial t} &= \lambda R u \left[G_i - u^N P(N, t/i) \right] \\ &\quad - \lambda u^2 \left[\frac{\partial G_i}{\partial u} - N u^{N-1} P(N, t/i) \right] \\ &\quad - \lambda R \left[G_i - u^N P(N, t/i) \right] \\ &\quad + \lambda u \left[\frac{\partial G_i}{\partial u} - N u^{N-1} P(N, t/i) \right] - \mu u \frac{\partial G_i}{\partial u} + \mu \frac{\partial G_i}{\partial u} \\ \frac{\partial G_i}{\partial t} &= \lambda R G_i (u-1) - u^N P(N, t/i) \left(\frac{\lambda R u - \lambda N u}{+ \lambda N - \lambda R} \right) \\ &\quad - \frac{\partial G_i}{\partial u} (\lambda u^2 - \lambda u + \mu u - \mu)\end{aligned}$$

d'où enfin :

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial G_i}{\partial t} &= \lambda R (u-1) G_i - (u-1) (\lambda u + \mu) \\ &\quad \times \frac{\partial G_i}{\partial u} - \lambda (R-N) (u-1) u^N P(N, t/i)\end{aligned}} \quad (37)$$

Cette équation fondamentale aux dérivées partielles définit complètement le processus et va nous

permettre de calculer la valeur moyenne et la dispersion en fonction du temps.

4.2. Calcul de la valeur moyenne.

Si le système est dans l'état i à l'instant initial, à l'instant t la valeur moyenne des états possibles est $m(t/i)$ que nous noterons, par raison de simplification, m_i .

D'après les équations (9) on remarque que :

$$m_i = \frac{\partial G_i}{\partial u} (1, t)$$

Divisons alors les deux membres de l'équation (37) par $(u-1)^2$ et intégrons le long d'un petit contour entourant le point $u=1$ décrit dans le sens positif :

$$\oint \frac{\partial G_i / \partial t}{(u-1)^2} du = \oint \frac{\lambda R G_i}{u-1} du - \oint \frac{(\lambda u + \mu)}{u-1} \frac{\partial G_i}{\partial u} du - \lambda (R-N) \oint \frac{u^N P(N, t/i)}{u-1} du$$

En remarquant que le premier membre est égal à :

$$\frac{\partial}{\partial t} \oint \frac{G_i}{(u-1)^2} du$$

d'après le théorème de Cauchy sur l'intégration des fonctions de variables complexes, on en déduit (*) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial G_i}{\partial u} (1, t) &= \lambda R G_i (1, t) - (\lambda + \mu) \frac{\partial G_i}{\partial u} (1, t) \\ &\quad - \lambda (R-N) P(N, t/i)\end{aligned}$$

et puisque $G_i(1, t) = 1$ d'après le paragraphe 2.3,

$$\frac{dm_i}{dt} = \lambda R - \lambda (R-N) P(N, t/i) - (\lambda + \mu) m_i \quad (38)$$

équation différentielle du premier ordre. Pour l'intégrer posons $m_i = y e^{-(\lambda+\mu)t}$, y fonction auxiliaire.

$$\frac{dm_i}{dt} = \frac{dy}{dt} e^{-(\lambda+\mu)t} - y (\lambda + \mu) e^{-(\lambda+\mu)t}$$

En remplaçant dans (38) il vient :

$$dy = [\lambda R - \lambda (R-N) P(N, t/i)] e^{(\lambda+\mu)t} dt$$

d'où :

$$\begin{aligned}y - y_0 &= \frac{\lambda R}{\lambda + \mu} e^{(\lambda+\mu)t} - \lambda (R-N) \\ &\quad \times \int_0^t P(N, t/i) e^{(\lambda+\mu)t} dt\end{aligned}$$

(*) Rappelons que si $f(z)$ est une fonction de variable complexe holomorphe à l'intérieur et sur un contour C et si a est un point intérieur à ce contour, on a :

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a)$$

Si $f^{(n)}(z)$ est la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $f(z)$, on a également :

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a)$$

Pour :

$$t = 0, \quad m_i = i = y$$

donc :

$$i - y_0 = \frac{\lambda R}{\lambda + \mu} = pR, \quad \text{d'où} \quad y_0 = i - pR$$

En outre pour t suffisamment grand :

$$P(N, t/i) \# P_N$$

encombrement dans le temps.

Dans l'intégrale :

$$\int_0^t P(N, t/i) e^{(\lambda+\mu)t} dt,$$

les termes correspondant à t petit interviennent peu à cause de la croissance rapide du terme exponentiel.

On peut donc écrire :

$$\int_0^t P(N, t/i) e^{(\lambda+\mu)t} dt \# P_N \int_0^t e^{(\lambda+\mu)t} dt = P_N \frac{e^{(\lambda+\mu)t} - 1}{\lambda + \mu}$$

Il vient :

$$y = i - pR + pRe^{(\lambda+\mu)t} - \lambda(R - N)P_N \frac{e^{(\lambda+\mu)t} - 1}{\lambda + \mu}$$

d'où :

$$m_i = pR + (i - pR) e^{-(\lambda+\mu)t} - p(R - N) P_N (1 - e^{-(\lambda+\mu)t})$$

$$m_i = pR \left[1 - \frac{R - N}{R} P_N \right] + \left[i - pR \left(1 - \frac{R - N}{R} P_N \right) \right] e^{-(\lambda+\mu)t} \quad (39)$$

$$\text{Posons : } \varphi = 1 - \frac{R - N}{R} P_N \quad (40).$$

Remarquons que $\varphi = 1$ pour $R = N$. De même, dans la pratique, P_N étant très petit $\varphi \# 1$.

La valeur moyenne cherchée devient :

$$m(t/i) = m_i = pR\varphi + (i - pR\varphi) e^{-(\lambda+\mu)t} \quad (40)$$

Nous pouvons aussi donner une autre forme de φ . D'après (18) :

$$P_a = \frac{\lambda_N}{C} P_N$$

c'est-à-dire, en tenant compte de l'expression de C donnée en 3.2,

$$P_a = \frac{R - N}{R - A_1} P_N$$

d'où :

$$\varphi = 1 - \frac{R - A_1}{R} P_a = 1 - (1 - a_1) P_a$$

or d'après (27) :

$$p = \frac{a}{1 + aP_a} \quad \text{d'où} \quad a = \frac{p}{1 - pP_a}$$

et d'après (21) :

$$a_1 = a(1 - P_a) = \frac{p(1 - P_a)}{1 - pP_a}$$

donc :

$$1 - a_1 = \frac{1 - pP_a - p + pP_a}{1 - pP_a} = \frac{q}{1 - pP_a}$$

d'où :

$$\varphi = 1 - \frac{qP_a}{1 - pP_a} = \frac{1 - P_a}{1 - pP_a} \quad \text{puisque } p + q = 1 \quad (41)$$

Pratiquement, P_a étant très faible :

$$\frac{1}{1 - pP_a} \cong 1 + pP_a \quad (42)$$

d'où, au second ordre près :

$$\varphi \cong 1 - qP_a \quad (43)$$

4.3. Calcul de la variance.

De même, on peut calculer la variance des états possibles du système à l'instant t , s'il se trouvait à l'état i à l'instant initial. Soit $\sigma^2(t/i)$ cette variance que nous noterons σ_i^2 .

D'après (9), on a en effet :

$$\sigma_i^2 = \frac{\partial^2 G_i(1, t)}{\partial u^2} + m_i - (m_i)^2 \quad (44)$$

Pour simplifier l'écriture, posons :

$$v_i = \frac{\partial^2 G_i(1, t)}{\partial u^2}$$

et calculons cette valeur.

Pour ce faire, dérivons par rapport à u l'expression (37).

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial G_i}{\partial u} &= \lambda R G_i + \lambda R(u - 1) \frac{\partial G_i}{\partial u} - (\lambda u + \mu) \frac{\partial G_i}{\partial u} \\ &\quad - \lambda(u - 1) \frac{\partial G_i}{\partial u} - (u - 1)(\lambda u + \mu) \frac{\partial^2 G_i}{\partial u^2} \\ &\quad - \lambda(R - N)[Nu^{N-1}(u - 1) + u^N] P(N, t/i) \end{aligned}$$

Divisons alors les deux membres par $(u - 1)^2$ et intégrons le long d'un petit contour fermé entourant le point $u = 1$, contour décrit dans le sens positif :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \oint \frac{\partial G_i / \partial u}{(u - 1)^2} du \\ &= \oint \frac{\lambda R G_i - (\lambda u - \mu) (\partial G_i / \partial u)}{(u - 1)^2} du \\ &\quad - \oint \frac{\lambda(R - N) u^N P(N, t/i)}{(u - 1)^2} du \\ &\quad + \oint \left[\frac{\lambda R (\partial G_i / \partial u) - \lambda (\partial G_i / \partial u) - (\lambda u + \mu)}{(\partial^2 G_i / \partial u^2) - \lambda N (R - N) u^{N-1} P(N, t/i)} \right] du \end{aligned}$$

Appliquant le théorème de Cauchy, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{dv_i}{dt} &= [\lambda R m_i - (\lambda + \mu) v_i - \lambda m_i] \\ &\quad - \lambda N (R - N) P(N, t/i) \\ &\quad + \lambda R m_i - \lambda m_i - (\lambda + \mu) v_i \\ &\quad - \lambda N (R - N) P(N, t/i) \\ &= 2 \lambda m_i (R - 1) - 2 (\lambda + \mu) v_i \\ &\quad - 2 \lambda N (R - N) P(N, t/i) \end{aligned}$$

d'où en remplaçant m_i par sa valeur (40) :

$$\begin{aligned} \frac{dv_i}{dt} + 2 (\lambda + \mu) v_i \\ = 2 \lambda (R - 1) [p\phi R + (i - p\phi R) e^{-(\lambda + \mu)t}] \\ - 2 \lambda N (R - N) P(N, t/i) \quad (45) \end{aligned}$$

équation différentielle du premier ordre. Pour intégrer, posons $v_i = y e^{-2(\lambda + \mu)t}$, y fonction auxiliaire :

$$\frac{dy}{dt} e^{-2(\lambda + \mu)t} - 2 (\lambda + \mu) y e^{-2(\lambda + \mu)t} = \frac{dv_i}{dt}$$

En remplaçant dans (45), il vient :

$$\begin{aligned} dy &= 2 \lambda (R - 1) [p\phi R e^{2(\lambda + \mu)t} + (i - p\phi R) e^{(\lambda + \mu)t}] dt \\ &\quad - 2 \lambda N (R - N) P(N, t/i) e^{2(\lambda + \mu)t} dt \\ y - y_0 \\ &= \frac{2 \lambda (R - 1)}{\lambda + \mu} \left[\frac{p\phi R}{2} e^{2(\lambda + \mu)t} + (i - p\phi R) e^{(\lambda + \mu)t} \right] \\ &\quad - 2 \lambda N (R - N) \int_0^t P(N, t/i) e^{2(\lambda + \mu)t} dt \end{aligned}$$

Pour $t = 0$, on doit avoir $\sigma_i^2 = 0$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} v_i + i - i^2 &= 0, \quad v_i = i(i - 1) = y \\ i(i - 1) - y_0 &= p(R - 1) [p\phi R + 2(i - p\phi R)] \end{aligned}$$

Pour la même raison que celle exposée en 4.2, on peut écrire :

$$\int_0^t P(N, t/i) e^{2(\lambda + \mu)t} dt \neq P_N \frac{e^{2(\lambda + \mu)t} - 1}{2(\lambda + \mu)}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} v_i &= i(i - 1) e^{-2(\lambda + \mu)t} \\ &\quad - p(R - 1) [p\phi R + 2(i - p\phi R)] e^{-2(\lambda + \mu)t} \\ &\quad + p(R - 1) [p\phi R + 2(i - p\phi R) e^{-(\lambda + \mu)t}] \\ &\quad - pN(R - N) P_N (1 - e^{-2(\lambda + \mu)t}) \end{aligned}$$

Si l'on tient compte de (44), les calculs conduisent alors à l'expression de $\sigma_i^2 = \sigma^2(t/i)$

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= pR [\phi + p\phi(R - 1 - R\phi) - N(1 - \phi)] \\ &\quad + (i - p\phi R) [1 + 2p(R - 1 - R\phi)] e^{-(\lambda + \mu)t} \\ &\quad + \{pR [p\phi(R - 1 - R\phi) + N(1 - \phi)] \\ &\quad - i(1 + 2p(R - 1 - R\phi))\} e^{-2(\lambda + \mu)t} \end{aligned}$$

(46)

4.4. Formules pratiques approchées.

Dans la pratique, P_a est généralement très faible ce qui entraîne $\phi \neq 1$. En outre, d'après (32), $\lambda + \mu = (1/q\theta)$.

La formule de la moyenne (40) devient :

$$m_i = pR + (i - pR) e^{-(t/q\theta)} \quad (47)$$

et la formule de la variance (46) :

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= pR(1 - p) + (i - pR)(1 - 2p) e^{-(t/q\theta)} \\ &\quad - [p^2R - i(1 - 2p)] e^{-(2t/q\theta)} \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= pqR + (q - p)(i - pR) e^{-(q/t\theta)} \\ &\quad - [(q - p)i + p^2R] e^{-(2t/q\theta)} \quad (48) \end{aligned}$$

expression que l'on peut encore écrire :

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= pqR(1 - e^{-(2t/q\theta)}) \\ &\quad + (q - p)(i - pR)(1 - e^{-(t/q\theta)}) e^{-(t/q\theta)} \quad (49) \end{aligned}$$

4.5. Interprétation de la formule de la moyenne.

La formule (47) représente donc le nombre moyen m_i de prises ouvertes à l'instant t , si i prises étaient ouvertes à l'instant initial. Si l'on reprend les notations du chapitre 3, si l'on appelle, par raison d'homogénéité, $m_i = A_i$, et si l'on prend comme unité de temps $q\theta$, c'est-à-dire que l'on pose $\tau = (t/q\theta)$, il vient :

$$A_i = A + (i - A) e^{-\tau}$$

L'interprétation de cette formule est évidente sous la forme :

$$A_i - A = (i - A) e^{-\tau} \quad (50)$$

et se représente graphiquement par une courbe exponentielle dépendant d'un paramètre i qui peut prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et N (fig. 2).

En moyenne, la demande tend donc à se stabiliser toujours au niveau d'équilibre A en suivant une loi exponentielle. Par exemple, si la demande est en pointe à un instant donné ($i = N$), on constate que cette pointe sera écrétée de 63 % au bout d'un temps $t = q\theta$ et de 86,5 % au bout du temps $t = 2q\theta$. Plus q est petit, c'est-à-dire plus la liberté individuelle est petite, plus le temps de stabilisation

est faible. En d'autres termes, le réseau tend d'autant plus vite vers l'état d'équilibre stable A que la liberté individuelle est faible et la durée moyenne d'un arrosage petite.

4.6. Interprétation de la formule de la variance.

La formule (49) représente de même la dispersion du nombre de prises ouvertes à l'instant t , si i prises étaient ouvertes à l'instant initial.

Si l'on reprend les mêmes notations qu'en 4.5 :

$$\sigma_i^2 = qA \left[1 - e^{-2\tau} + \frac{(q-p)(i-A)}{qA} (e^{-\tau} - e^{-2\tau}) \right] \quad (51)$$

Posons alors :

$$s = \frac{q-p}{q} \cdot \frac{i-A}{A} \quad (52)$$

$$\sigma_i^2 = qA [1 - e^{-2\tau} + s(e^{-\tau} - e^{-2\tau})] \quad (53)$$

et posons :

$$v = 1 - e^{-2\tau} + s(e^{-\tau} - e^{-2\tau}) \quad (54)$$

$$\sigma_i^2 = qA \cdot v \quad (55)$$

Remarquons que s est minimal pour $i = 0$. Or comme généralement :

$$p > 0,2, \quad s > -0,75$$

s est maximal pour $i = N$.

$$s_{\max} = \frac{q-p}{q} \cdot \frac{N-A}{A}$$

si l'on tient compte de (35),

$$s_{\max} = U \frac{q-p}{\sqrt{qA}}$$

Pour un petit réseau de l'ordre de 100 prises $s_{\max} \approx 0,3$. On en déduit que, dans la pratique :

$$-0,75 < s < 0,3$$

La représentation graphique de v est la suivante :

3/

La dispersion tend également à se stabiliser au niveau $qA = pqR$ d'autant plus vite que la liberté individuelle est faible et la durée moyenne d'un arrosage petite.

4.7. Il est intéressant de remarquer que les formules (47) et (49) qui ont été obtenues en supposant $\varphi \neq 1$, c'est-à-dire P_a très faible, auraient été identiques si l'on avait posé $R = N$. En d'autres termes les formules sont valables aussi bien pour des réseaux où la saturation n'est pas possible (puisque $R = N$) que pour des réseaux où l'encombrement d'appel est très faible. Dans les deux cas, les processus sont sensiblement équivalents. On peut donc appliquer les formules pendant les périodes intermédiaires lorsque l'irrigation n'est pas encore totalement développée sur le périmètre (R étant inférieur à la capacité N du réseau, on est évidemment dans le cas $R = N$).

Mais, en outre, il est intéressant de retrouver directement les formules (47) et (49) dans le cas $R = N$ très proche du cas général des réseaux.

Si nous avons N prises sur un réseau calibré pour transporter le débit total possible des N prises, tout se passe comme si nous avions N organes de liaison et N sources identiques et indépendantes. Le processus en cause est la somme de N processus identiques et indépendants.

Considérons alors un processus comportant un organe et une source. Deux états sont possibles $j = 0, j = 1$:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \lambda & \mu_0 &= 0 \\ \lambda_1 &= 0 & \mu_1 &= \mu \end{aligned}$$

Si l'on pose en outre :

$$p = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \quad q = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \quad \lambda + \mu = \frac{1}{q\theta}$$

les équations générales (12) donnent :

$$\left. \begin{aligned} P(1, t/0) &= p(1 - e^{-(t/q\theta)}) \\ P(0, t/0) &= 1 - p(1 - e^{-(t/q\theta)}) \\ P(1, t/1) &= 1 - q(1 - e^{-(t/q\theta)}) \\ P(0, t/1) &= q(1 - e^{-(t/q\theta)}) \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

On en déduit pour le processus limite :

$$P_0 = q \quad P_1 = p$$

Mais, en outre, les fonctions génératrices sont, d'après (2.3) :

$$\left. \begin{aligned} g_0(u, t) &= 1 + (u-1)p(1 - e^{-(t/q\theta)}) \\ g_1(u, t) &= 1 + (u-1)[p + qe^{-(t/q\theta)}] \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

La fonction génératrice du processus à N sources sera alors :

$$G_i(u, t) = [g_1(u, t)]^i \cdot [g_0(u, t)]^{N-i}$$

puisque la fonction génératrice d'une somme de variables indépendantes est égale au produit des fonctions génératrices.

Si l'on applique alors les formules (9) en tenant compte du fait que $g_1(1, t) = g_0(1, t) = 1$, on retrouve, après des calculs très simples, exactement les formules (47) et (49).

Ajoutons enfin, pour être complet, que l'on peut calculer :

$$P(j, t/i) = \sum_{k=0}^j C_k^{j-k} (p + qe^{-(t/q\theta)})^{j-k} \\ [q(1 - e^{-(t/q\theta)})]^{i-j+k} C_{N-i}^k [p(1 - e^{-(t/q\theta)})]^k \\ [q + pe^{-(t/q\theta)}]^{N-i-k}$$

d'où l'encombrement $P(N, t/i)$.

4.8. Formule de la demande généralisée.

Le nombre de prises ouvertes à l'instant t si i prises étaient ouvertes à l'instant initial est donc caractérisé par une distribution statistique variable avec le temps dont on vient de déterminer la moyenne et la dispersion. Comme il est légitime de le faire, on peut avec une bonne approximation, assimiler cette distribution à celle résultant de la loi du hasard ou loi normale. Il y aura donc au plus un nombre $N(t/i)$ de prises ouvertes qui sera :

$$N(t/i) = A_i + U \sqrt{\sigma_i^2} \quad (58)$$

U ayant exactement la même signification que dans la première formule de la demande. Il est intuitif que l'on peut généraliser les résultats obtenus lors de l'établissement de la deuxième formule en adoptant comme valeur de U celle résultant de (33). En effet, les raisons profondes exposées en 3.5.4 qui expliquent la différence entre les deux formules restent valables pour la formule temporelle.

Un raisonnement plus rigoureux, mais qui devient d'une rare complexité sans grand intérêt, conduit à retrouver sensiblement ce résultat.

Dans ces conditions, la formule de la demande généralisée devient :

$$N(t/i) = A + (i - A) e^{-\tau} \\ + U \sqrt{qA + (q - p)(i - A)(e^{-\tau} - e^{-2\tau}) - qAe^{-2\tau}}$$

C'est-à-dire, en posant $I = (i - A)/A$.

$$N(t/i) = A \\ \left[1 + Ie^{-\tau} + U \sqrt{\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{R}\right)(1 - e^{-2\tau})} \right. \\ \left. + I\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{2R}\right)(e^{-\tau} - e^{-2\tau}) \right] \\ \text{avec : } H(U) = P_a A \sqrt{\frac{1}{A} - \frac{1}{R}} \\ \text{et : } I = \frac{i - A}{A}, \quad \tau = \frac{t}{q\theta} \quad (59)$$

que l'on peut aussi écrire :

$$N(t/i) = pR(1 + Ie^{-\tau}) \\ + U \sqrt{pqR \left[\frac{1 - e^{-2\tau}}{q} + \frac{q - p}{q} I(e^{-\tau} - e^{-2\tau}) \right]} \\ \text{avec : } H(U) = P_a \sqrt{Rpq} \\ I = \frac{i - A}{A}, \quad \tau = \frac{t}{q\theta} \quad (60)$$

On remarque que, pour $t \rightarrow \infty$, $N(t/i)$ ne dépend plus de l'état initial et tend vers N . Ceci est une pro-

priété très générale de certains processus stochastiques. On retrouve évidemment la deuxième formule de la demande (33) ou (35).

On notera en outre que ces formules ne sont qu'approchées au voisinage de $i = N$ et pour des encombrements d'appels faibles. Par définition, en effet, il faut que :

$$N(t/i) \leq N$$

Or la formule peut conduire à des valeurs supérieures. La raison de cette anomalie doit être recherchée dans les approximations faites au cours du calcul, mais cela est sans importance dans les applications.

D'ailleurs les formules (59) ou (60) sont d'un emploi réduit dans la pratique. Nous en avons fait état surtout pour être complet au terme de l'étude mathématique et parce que cela n'est pas sans intérêt sur le plan théorique.

Par contre, les formules de la moyenne et de la variance (47) et (49) conduisent directement à des applications pratiques importantes pour la régulation des ouvrages hydrauliques.

5. La régulation des ouvrages d'alimentation des réseaux

5.1. Considérons un réseau d'irrigation alimenté par une station de pompage. Comme les débits de la station ne peuvent prendre qu'une série de valeurs discrètes correspondant aux combinaisons possibles des diverses pompes composant la station, un réservoir est nécessaire pour assurer à chaque instant la satisfaction de la demande avec un rendement acceptable.

Si l'on a calculé le réseau avec une valeur de $r < 1$, cela revient à admettre que la pointe journalière ne se manifeste que pendant une proportion r des 24 h de la journée. On peut donc choisir de ne calibrer la station de pompage que pour un débit $N.d.r$, le volume du réservoir devant être de $r(1 - r) N.d.24$, si d est exprimé en m^3/h . La régulation de la station est obtenue très simplement à partir de capteurs de niveaux dans le réservoir.

Toutefois, cette option ne conduit par nécessairement à la solution la plus économique. En outre, si, comme nous le pensons, la pointe se manifeste en fait tout au long de la journée et peut durer plusieurs jours, ce raisonnement n'est plus valable et d'ailleurs r est pratiquement égal à 1. Il faut donc nécessairement que le débit maximal de la station soit égal à Nd , l'existence d'un réservoir ne permettant plus de réduire ce débit, sauf s'il était d'une capacité très importante.

La solution classique consiste à prévoir un petit réservoir destiné à la commande des pompes à partir de capteurs de niveaux. La capacité est calculée très simplement pour que le temps d'arrêt des pompes ne soit pas inférieur à une certaine valeur. Mais on peut envisager des méthodes plus finies.

5.2. Régulation de stations de pompage par débitmètre.

Considérons donc un réseau comportant R prises et calculé pour satisfaire la demande de N prises, branché sur un réservoir alimenté par une station

de pompage d'un débit Q . Imposons à la station de conserver un débit constant pendant un temps t , c'est-à-dire qu'il n'y aura ni démarrage ni arrêt pendant ce temps t . Cherchons à quelle valeur doit être fixée le débit Q à l'instant initial pour que le réseau soit constamment alimenté pendant l'intervalle de temps $0, t$.

Si à l'instant 0 , i prises sont ouvertes simultanément, le débit demandé est $id = D_0$ qui est indiqué par le débitmètre. A l'instant t , le débit demandé D est une variable aléatoire dont les caractéristiques sont données par (50) et (51), en posant toujours $(t/q\theta) = \tau$:

$$D \left\{ \begin{array}{l} E(D) = d [A + (i - A) e^{-\tau}] \\ \text{Var}(D) = d^2 [qA(1 - e^{-2\tau}) + (q - p)(i - A)(e^{-\tau} - e^{-2\tau})] \end{array} \right\} \quad (61)$$

En première approximation, largement suffisante pour les besoins de la pratique ainsi que nous l'avons déjà avancé, on peut toujours admettre que la variable D est laplacienne. Mais sa moyenne et sa dispersion sont deux fonctions du temps τ .

Elle est donc de la forme :

$$m(\tau) + u\sigma(\tau),$$

u étant une variable aléatoire laplacienne.

Sous cette hypothèse simplificatrice, le processus temporel correspondant peut être considéré, pour une valeur donnée du débit initial, comme un processus à accroissements aléatoires indépendants. Il en résulte que le caractère laplacien de la variable se conserve par sommation et la moyenne ou la variance de la somme est égale à la somme des moyennes ou variances.

Soit V le volume d'eau qui sera demandé dans l'intervalle de temps $0, t$. On a :

$$V \left\{ \begin{array}{l} E(V) = \int_0^\tau E(D) d\tau \\ \text{Var}(V) = \int_0^\tau \text{Var}(D) d\tau \end{array} \right. \quad (62)$$

$$E(V) = d [A\tau + (i - A)(1 - e^{-\tau})] \quad (62)$$

Posons :

$$\alpha = 1 - e^{-\tau} = \tau - \frac{\tau^2}{2!} + \frac{\tau^3}{3!}$$

et :

$$\alpha' = dA\tau - dA(1 - e^{-\tau}) = Ad(\tau - \alpha)$$

il vient :

$$E(V) = \alpha D_0 + \alpha' \quad (63)$$

De même :

$$\text{Var}(V) = d^2 \left[qA \left(\tau - \frac{1}{2} + \frac{e^{-2\tau}}{2} \right) + (q - p) \times (i - A) \left(1 - e^{-\tau} - \frac{1}{2} + \frac{e^{-2\tau}}{2} \right) \right] \quad (64)$$

Posons :

$$\beta = \frac{d(q - p)}{2} (1 - 2e^{-\tau} + e^{-2\tau})$$

$$= \frac{d(q - p)}{2} (1 - e^{-\tau})^2 = \frac{d(q - p)}{2} \alpha^2$$

et :

$$\beta' = \frac{d^2 q A}{2} (2\tau - 1 + e^{-2\tau}) - \frac{d^2 A (q - p)}{2} \alpha^2$$

$$\beta' = \frac{d^2 A}{2} [2q(\tau - \alpha) + p\alpha^2]^2$$

il vient :

$$\text{Var}(V) = \beta D_0 + \beta' \quad (65)$$

Remarquons que pour τ petit, c'est-à-dire t faible devant $q\theta$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1 - e^{-\tau} \cong \tau \\ \alpha' = Ad(\tau - \alpha) \cong \frac{Ad\tau^2}{2} \\ \beta = \frac{d(q - p)}{2} \alpha^2 \cong \frac{d(q - p)}{2} \tau^2 \\ \beta' = \frac{d^2 A}{2} [2q(\tau - \alpha) + p\alpha^2] \cong \frac{Ad^2 \tau^2}{2} \end{array} \right\} \quad (66)$$

Si S_0 est le volume contenu dans le réservoir à l'instant 0 , le volume S contenu dans le réservoir à l'instant t ou τ est encore une variable aléatoire normale de caractéristiques :

$$S \left\{ \begin{array}{l} E(S) = S_0 + Q\tau - \alpha D_0 - \alpha' \\ \text{Var}(S) = \beta D_0 + \beta' \end{array} \right\} \quad (67)$$

On a donc les relations :

$$P_r \left(\frac{S - E(S)}{\sqrt{\text{Var}(S)}} \leq U \right) = \Pi(U)$$

$$P_r \left(\frac{S - E(S)}{\sqrt{\text{Var}(S)}} \geq U \right) = 1 - \Pi(U)$$

$\Pi(U)$ étant la fonction de répartition de la loi de Laplace-Gauss.

La première relation correspond au déversement du réservoir et la seconde à la défaillance.

Si l'on appelle $1 - P_p$ la probabilité de déversement et $1 - P_d$ la probabilité de défaillance, les tables donnent aisément :

$$U_p(P_p) \quad \text{et} \quad U_d(P_d)$$

En général, d'ailleurs :

$$U_d < 0 \quad \text{si} \quad P_d < 0,5$$

Il en résulte que :

$$0 \leq E(S) + U_d \sqrt{\text{Var}(S)} \leq S$$

$$\leq E(S) + U_p \sqrt{\text{Var}(S)} \leq C$$

C étant la capacité totale du réservoir.

On en déduit :

$$\boxed{ \begin{array}{l} S_0 + Q\tau \leq C + \alpha D_0 + \alpha' - U_p \sqrt{\beta D_0 + \beta'} \\ S_0 + Q\tau \geq \alpha D_0 + \alpha' - U_d \sqrt{\beta D_0 + \beta'} \end{array} } \quad (68)$$

Ces deux équations permettent d'établir le graphique 4 en S_0, D_0 qui donne le débit Q de la pompe

4/

5/

pour qu'il n'y ait ni déversement ni défaillance pendant le temps $t = q\theta\tau$ lorsque, à l'instant initial, le volume contenu dans le réservoir est S_0 et le débit demandé D_0 .

Il suffit que le point M représentatif de l'état du système se trouve dans une zone du graphique. Les débits possibles de la station de pompage ne pouvant prendre qu'une série de valeurs discrètes, on déterminera les caractéristiques des pompes composant la station, de façon que toute la zone déterminée par le graphique précédent soit entièrement couverte. A chaque point M de la zone doit correspondre pour toute valeur de D_0 ($0 \leq D_0 \leq Nd$), un débit possible Q de la station pour toute valeur de $0 \leq S_0 \leq C$.

On remarquera que des équations (68) on déduit que la régulation n'est possible que si :

$$C \geq (U_p - U_d) \sqrt{\beta D_0 + \beta'}$$

et comme ceci doit être vrai pour toute valeur de D_0 :

$$C \geq (U_p - U_d) \sqrt{\beta Nd + \beta'} \quad (69)$$

La solution de ce problème, extrêmement simple, est figurée sur le graphique 5.

C est quelconque, mais supérieur à la valeur donnée par (69).

Les débits possibles de la station sont représentés par :

$$\frac{Aa}{\tau} = Nd \quad \frac{Bb}{\tau} \quad \frac{Cc}{\tau}$$

On peut alors se poser le problème de la détermination de l'optimum économique. La station de pompage étant constituée d'un certain nombre de pompes, les débits possibles obtenus par combinaisons de une ou plusieurs pompes sont $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ rangés par valeurs croissantes.

On doit avoir :

$$Q_n \geq Nd$$

$$Q_{n-1} \geq Nd - (C/\tau)$$

$$Q_{n-2} \geq Nd - 2(C/\tau)$$

$$Q_1 \geq Nd - (n-1)(C/\tau)$$

avec :

$$\frac{Nd\tau}{n} \geq C \geq (U_p - U_d) \sqrt{\beta Nd + \beta'}$$

Il convient de déterminer $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ et C de manière que le coût total soit minimal. La solution de ce problème est maintenant classique et l'exposé sortirait du cadre de cette étude. Indiquons simplement que le calcul est particulièrement adapté aux ordinateurs modernes.

Les caractéristiques de la station et du réservoir ainsi déterminées, la régulation sera commandée par deux capteurs (un capteur de débit placé sur la canalisation principale du réseau à l'aval du réservoir et un capteur de niveau dans le réservoir) qui donneront les deux valeurs D_0 et S_0 . A des intervalles de temps $t = \tau q\theta$ prédéterminés, une horloge commandera la marche ou l'arrêt de certains groupes de pompage de manière que les relations (68) soient vérifiées.

La régulation se représente d'ailleurs très simplement sur le graphique 6 en S_0, D_0 qui découpe dans le plan plusieurs zones correspondant au fonctionnement de 0, 1, 2, ... ou n pompes.

En fait, seule n'intervient dans les ordres à donner à la station, que la deuxième relation (68) que l'on peut d'ailleurs, dans la pratique, assimiler à une droite.

On pourrait aussi prévoir d'arrêter les pompes, dans un certain ordre, lorsque le réservoir est plein,

6/

pour éviter tout déversement. Mais la probabilité d'un tel événement étant en principe très faible ($\leq 1 - P_p$), cela n'est pas nécessairement intéressant, car on impose de ce fait un redémarrage sous faible délai (avec une probabilité encore plus faible, il est vrai).

Remarque : Les relations (68) ne sont qu'approchées du fait de l'assimilation de la loi de probabilité de S à la loi normale. On constate par exemple que la deuxième relation donne une valeur du débit maximal des pompes légèrement supérieur à Nd . Mais ces écarts sont sans importance pratique, car les calculs ne doivent pas être menés avec une grande précision et les résultats seront finalement à ajuster à des valeurs rondes.

Exemple d'application : Soit un réseau de 600 ha dont les besoins en eau atteignent 300 l/s. Supposons en outre $R = 400$ prises, $d = 3$ l/s et $r = 1$.

On a alors :

$$p = 0,25 \quad q = 0,75$$

$$Rp = A = 100 \quad Rpq = 75 \quad \sqrt{Rpq} = 8,6$$

Si l'on applique la deuxième formule de la demande avec :

$$P_a = 1 \%, \quad H(U) = 0,085$$

d'où $U' = 1,77$,

$$N = 100 + 1,77 \times 8,6 = 115 \text{ prises}$$

Le débit des pompes doit atteindre :

$$115 \times 3 = 345 \text{ l/s}$$

Si l'on prévoit une régulation classique à partir des niveaux dans le réservoir et si l'on impose que les pompes doivent se mettre en route toutes les demi-heures au plus, le volume du réservoir doit être de :

$$115 \times 3 \times 1800 = 620 \text{ m}^3$$

Adoptons la méthode préconisée :

$$\tau = \frac{t}{q\theta} = \frac{1}{2 \times 0,75 \times 8} = \frac{1}{12}$$

si l'on suppose une durée d'arrosage de 8 heures,

$$\alpha \# \frac{1}{12} \quad \alpha' \# \frac{100 \times 3}{2 \times 144} = 1,04$$

$$\beta \# \frac{3 \times 0,5}{2} = \frac{1}{144} \times \frac{1}{192} \quad \beta' \# \frac{9 \times 100}{2 \times 144} = 3,14$$

Adoptons en outre des probabilités de défaillance et de déversement de 1 % :

$$U_p = -U_d = 2,324$$

d'où :

$$C_{\min} = 4,648 \sqrt{\frac{115 \times 3}{192} + 3,14} = 10,3$$

soit, en m^3 :

$$C = 10,3 \times \frac{0,75 \times 8 \times 3600}{1000} = 10,3 \times 21,6 = 223 \text{ m}^3$$

Il ne faut en effet pas oublier que dans les relations (68) et (69) l'unité de temps est $q\theta$ et donc, si les débits sont exprimés en l/s, il convient de multiplier par $q\theta$ (en secondes).

Si l'on avait choisi des probabilités de 5 %, on aurait trouvé $C = 158 \text{ m}^3$. La méthode préconisée entraîne donc des économies d'investissements très importantes, puisqu'elle permet de réduire de près de 200 % le volume des réserves.

Calculons la deuxième relation (68) :

$$S_0 + 1,8 Q \geq 21,6 \left[\frac{D_0}{12} + 1,04 + 2,324 \sqrt{\frac{D_0}{192} + 3,14} \right]$$

si Q est en l/s et S_0 en m^3 ,

$$S_0 + 1,8 Q \geq 1,8 D_0 + 22,4 + 0,17 \sqrt{D_0 + 602}$$

Mais pour :

$$D_0 = 0 \quad 0,17 \sqrt{D_0 + 602} = 4,2$$

et pour :

$$D_0 = Nd = 345 \text{ l/s} \quad 0,17 \sqrt{D_0 + 602} = 5,5$$

On peut donc écrire, avec une bonne approximation :

$$S_0 + 1,8 Q \geq 1,8 D_0 + 27$$

Si l'on établit les graphiques explicités plus haut, on voit que :

— si $C = 250 \text{ m}^3$, la première relation devient :

$$S_0 + 1,8 Q \leq 1,8 D_0 + 267$$

et il faut prévoir 1 pompe de 80 l/s et 2 pompes de 140 l/s chacune;

— si $C = 325 \text{ m}^3$, on peut ne prévoir que 2 pompes de 180 l/s chacune.

5.3. Régulation d'un canal.

5.3.1. Le problème de la régulation d'un canal desservant des réseaux d'irrigation fonctionnant à la demande est beaucoup plus complexe. Une solution classique consiste à prévoir une régulation par l'aval « type Neyric », mais elle est en général assez onéreuse, car elle impose des berges horizontales dont le supplément de coût en génie civil est loin d'être négligeable par rapport au coût d'un canal dont les berges seraient parallèles au radier. D'ailleurs, cette solution consiste finalement à projeter un canal-réservoir et il est presque évident qu'il doit exister d'autres types de régulation plus économiques en volume de réserves nécessaires. Dans la mesure où elle est correctement calculée, la régulation par l'aval ne peut en effet conduire à aucune défaillance de l'alimentation du canal, alors qu'il serait normal, par raison d'homogénéité, d'admettre une probabilité de défaillance du même ordre de grandeur que celle choisie pour les réseaux branchés sur ce canal.

En outre, la régulation par l'aval est une technique qui ne peut être employée, très généralement, pour la modernisation des vieux ouvrages qui n'ont

1/

pas été conçus en conséquence, car elle suppose des pentes assez faibles du profil en long. Or ce problème important se pose déjà et se posera de plus en plus dans l'avenir en France, dans un pays qui se modernise et où les besoins en eau croissants et la limitation des ressources imposent la recherche de solutions économiques assurant un meilleur rendement des ouvrages existants et la réduction des pertes.

Les progrès spectaculaires de l'électronique permettent d'envisager l'installation le long d'un canal d'un système de télémessure et de télécommande susceptible d'indiquer à chaque instant l'état du canal (débits et niveaux du plan d'eau) et les débits des prises des réseaux branchés sur ce canal.

Par la télécommande, il est alors possible d'agir au même instant sur les ouvrages d'alimentation du canal pour adapter son débit aux besoins. Mais un canal est un système hydraulique à réactions lentes, car les ondes de crue ou de décrue se propagent à vitesse relativement faible. Aussi est-il indispensable de prévoir la manœuvre suffisamment à l'avance pour éviter un déversement ou une défaillance.

La régulation proposée est donc du type « par l'amont » sur programme à court terme actualisé d'une manière continue.

Ce problème est toutefois très complexe et demanderait des développements importants. Nous nous contenterons dans cette note de schématiser les solutions.

5.3.2. Considérons le dernier bief aval d'un canal comportant, à son extrémité, une prise d'un réseau d'irrigation fonctionnant à la demande et alimenté en tête par un débit Q .

A chaque débit demandé D , correspond une ligne d'eau supérieure sans déversement et une ligne d'eau inférieure sans défaillance. Ces deux lignes d'eau correspondent aux deux courbes de remous extrêmes (graphique 7).

Le volume d'eau contenu entre ces deux lignes est une fonction $C(D)$ calculable par les formules de l'hydraulique. La forme de cette fonction est, certes, complexe, mais son calcul ne pose pas de problèmes, tout au moins avec les ordinateurs modernes.

Par ailleurs, toute variation du débit Q en tête se répercute à l'extrémité aval au bout d'un temps t qui dépend de l'état du canal, mais que nous pouvons parfaitement considérer, avec une excellente approximation en regard de la précision des calculs, comme constant. Posons alors :

$$t = q\theta.\tau$$

A l'instant initial, où le débit demandé est D_0 , soit S_0 le volume réellement contenu dans le réservoir de capacité $C(D_0)$. S_0 est donc le volume situé au-dessus de la ligne de défaillance.

8/

Les relations (68) qui donnent l'état du stock S à l'instant τ sont toujours valables, sauf à remplacer $Q\tau$ par $\int_0^\tau Q d\tau = v$, puisque le débit entrant n'est plus constant.

On en déduit :

$$\begin{aligned} S_0 + v &\leq C(D) + \alpha D_0 + \alpha' - U_p \sqrt{\beta D_0 + \beta'} \\ S_0 + v &\geq \alpha D_0 + \alpha' - U_d \sqrt{\beta D_0 + \beta'} \end{aligned} \quad (70)$$

Or $C(D)$ est une fonction monotone décroissante de D . Il convient donc de choisir pour D , dans la formule ci-dessus, la plus grande valeur possible soit, à équivalence de probabilité :

$$E(D) + U_p \sqrt{\text{Var}(D)}$$

Posons alors :

$$C[E(D) + U_p \sqrt{\text{Var}(D)}] = C'(D_0, U_p)$$

Les relations deviennent :

$$\begin{aligned} S_0 + v &\leq C'(D_0, U_p) + \alpha D_0 + \alpha' - U_p \sqrt{\beta D_0 + \beta'} \\ S_0 + v &\geq \alpha D_0 + \alpha' - U_d \sqrt{\beta D_0 + \beta'} \end{aligned} \quad (71)$$

Il est donc possible de tracer le graphique 8, analogue à celui du paragraphe 5.2, mais la fonction $C'(D_0, U_p)$ étant décroissante, « la bande de confiance » se rétrécit quand D_0 croît.

Les valeurs de S_0 et D_0 étant connues à chaque instant par les capteurs de télémessure, il suffit de modifier le débit Q de telle manière que la valeur de v enregistrée entre les instants $-\tau$ et 0 ramène le point représentatif M dans la bande de confiance. Les débits qui modifieront l'état du bief du canal entre les instants 0 et τ sont en effet ceux qui sont passés en tête du canal entre les instants $-\tau$ et 0 .

On remarquera en outre que la régulation n'est possible que si :

$$C'(D_0, U_p) \geq (U_p - U_d) \sqrt{\beta D_0 + \beta'}$$

et comme ceci doit être vrai pour toute valeur de D_0 :

$$C(Nd) \geq (U_p - U_d) \sqrt{\beta D_0 + \beta'} \quad (72)$$

Comme on pouvait s'y attendre, cette condition impose que le canal soit légèrement surcalibré par rapport au débit maximal Nd , car il n'y a pas de régulation possible sans un minimum de réserve. Mais les applications montrent aisément que cette condition n'est pas sévère et les volumes obtenus sont très faibles par rapport à ceux imposés par la régulation par l'aval.

5.3.3. Le schéma précédent se généralise sans difficultés au cas d'un bief de canal comportant une prise d'un réseau, mais devant restituer à l'aval un débit déterminé. De proche en proche, il est ainsi possible de modéliser la régulation d'un canal complet à plusieurs biefs.

On pourrait aussi envisager le cas d'un bief comportant plusieurs prises. Le schéma correspondant s'établit comme le précédent, mais exige toutefois une attention soutenue à cause de l'introduction nécessaire de doubles indices. La présentation serait fastidieuse et son intérêt pratique n'est pas évident. A l'intérieur d'un même bief, en effet, il semble beaucoup plus opportun, si le bief n'est pas trop long, d'assimiler les diverses prises à une prise fictive unique en partant des formules (50) et (51) calculées sur l'ensemble des réseaux dépendant de ces prises. Ce faisant, on tient compte du foisonnement relatif de la demande sur les divers réseaux, alors que la séparation des prises élimine ce phénomène.

5.4. Nous arrêterons là ces développements sur l'utilisation pratique des formules (50) et (51).

Les applications nous paraissent importantes et mériteront encore de nombreuses études complémentaires. Beaucoup de choses restent encore à approfondir et notre seul but a été d'indiquer une voie possible de recherche qui nous semble être fructueuse.

Dans le domaine de la régulation des ouvrages

hydrauliques alimentant des réseaux fonctionnant à la demande, l'introduction des ordinateurs permet de concevoir des modèles beaucoup plus complexes susceptibles d'entraîner des économies importantes. Or, il n'y a pas de rapport de coût entre des équipements en matériel électronique même complexes et le surdimensionnement des ouvrages de génie civil imposé par l'emploi de méthodes plus classiques et plus simples.

Si la recherche de la simplicité restera toujours nécessaire, la complexité de certains modèles, si elle subsiste, ne peut plus être considérée comme une tare inguérissable.

Bibliographie

P. LE GAL. — Les systèmes avec ou sans attente et les processus stochastiques, *Dunod*.

R. FORTET. — Calcul des probabilités, *C.N.R.S.*

R. CLÉMENT. — Note sur le calcul des débits dans les réseaux d'irrigation.

J. de BOISSEZON et J.R. HAÏR. — Calcul des débits dans les réseaux d'irrigation, *La Houille Blanche*, n° 2, 1965.

C.D. EFSTRATIADIS. — Mode de calcul des réseaux d'irrigation sous pression, d'après la méthode de M. Clément, *L'Irrigazione a pioggia*, n° 4, 1960.

R. PORCHERON. — Note sur le calcul dans les réseaux d'irrigation sous pression. Note intérieure à la Société du canal de Provence, du 6 janvier 1965.

Discussion

Président : M. DROUHIN

M. le Président, avant de donner la parole à M. CLÉMENT, le présente en ces termes :

« M. CLÉMENT suit depuis une quinzaine d'années les principaux problèmes posés par la réalisation des ouvrages de la Société du Canal de Provence. Il s'est spécialisé dans le domaine de l'irrigation agricole et des ouvrages nécessaires à l'irrigation, notamment ceux nécessaires à l'irrigation par aspersion. Il avait mis au point en 1955 une formule bien connue qui permet de déterminer le diamètre des canalisations d'un réseau d'irrigation par aspersion dans le cas le plus fréquent où ces canalisations sont appelées à transporter des débits variables suivant les endroits et dans le temps, ceci en fonction de la probabilité d'ouverture simultanée des prises qui alimentent ces canalisations.

« Cette formule de Clément est utilisée par les ingénieurs projeteurs pour le calcul des réseaux d'irrigation par aspersion.

« M. CLÉMENT, aujourd'hui, saisit l'occasion de cette session du Comité Technique de la Société Hydrotechnique de France pour présenter une formule améliorée qui résulte d'une analyse plus poussée du problème posé par la probabilité de fonctionnement simultané de plusieurs prises. »

M. le Président remercie M. CLÉMENT de son exposé. Les applaudissements des auditeurs montrent tout l'intérêt qu'ils ont pris à cette communication.

M. MORLAT présente l'intervention qu'il a bien voulu résumer comme suit :

« L'emploi des processus stochastiques pour représenter le fonctionnement des réseaux d'irrigation est certainement susceptible de rendre des services considérables aux proje-

teurs, comme les travaux exposés par M. CLÉMENT le montrent; on ne saurait trop louer ses études, et nous voulons seulement présenter quelques remarques d'importance diverse :

« 1° Un problème difficile (et les téléphonistes le savent bien) est de choisir une hypothèse concernant le sort réservé à des appels qui trouvent le réseau saturé : ces appels sont-ils intégralement reportés, ou définitivement découragés ? Il nous semble que le modèle qui conduit à la première formule de la demande suppose implicitement le report, alors que le modèle développé pour la seconde formule de la demande, suppose implicitement l'élimination des appels qui trouvent le réseau saturé. Peut-être le comportement des exploitants, si on pouvait l'observer, mènerait-il à une hypothèse intermédiaire, dans laquelle une certaine proportion des appels refusés est perdue, et une certaine proposition simplement reportée.

« De toute façon, s'il est bien vrai que les deux formules de la demande présentées par M. CLÉMENT, font implicitement, sur ce sujet, des hypothèses opposées; alors, on peut se demander si ce fait n'explique pas au moins en partie les divergences numériques auxquelles conduisent les deux formules en fonction du nombre des prises.

« 2° Il est probable que le modèle développé serait susceptible de perfectionnement divers, si l'on était en mesure de revoir certaines hypothèses d'indépendances (entre les demandes des divers exploitants à un instant donné par exemple) ou d'homogénéité dans le temps (fluctuations horaires des probabilités de la demande). Mais il est sans doute très difficile d'obtenir des observations de bonne qualité permettant d'estimer les liaisons ou les variations horaires.

« 3° Pour finir une remarque de détail : lorsqu'on calcule la variance du volume d'eau demandé au cours d'un intervalle de temps, on a le droit d'additionner les variances relatives aux volumes demandés par les différents utilisateurs (si l'on postule l'indépendance) — mais non pas d'intégrer les variances des volumes demandés en fonction du temps, qui ne sauraient en aucun cas être regardés comme indépendants. Nous pensons que la formule incriminée ne constitue qu'une négligence de rédaction, et que les calculs ont été effectués de façon correcte. »

M. le Président demande des précisions au sujet de la notion d'encombrement d'appels et de défaillances. Le modèle préconisé paraît très satisfaisant pour l'étude d'un central automatique téléphonique.

Mais, dans un réseau en charge, quand le réseau est saturé, si quelqu'un ouvre sa prise, il coule quand même de l'eau. Une petite baisse de pression générale se répercute, mais ce n'est pas du « tout ou rien ». Comment interprète-t-on cela avec le modèle et les calculs ?

M. CLÉMENT répondant d'abord à la question de M. le Président indique qu'il convient de distinguer le problème théorique du problème pratique.

Sur le plan théorique, la méthode consiste à calculer un réseau qui doit satisfaire une demande donnée *a priori*. Elle suppose ainsi la fixation d'un certain nombre de paramètres. Elle constitue donc un schéma peut-être simple, mais elle permet d'arriver à un résultat. Si le réseau n'est pas capable de satisfaire la demande calculée, il y a défaillance ou encombrement dans le temps.

La pratique, heureusement d'ailleurs, est moins exigeante et apporte une souplesse plus grande que la théorie ne le laisse supposer. La défaillance réellement observable sera beaucoup plus faible que la défaillance théorique. En effet, les pertes de charge variant comme le carré des débits, la pression ne baissera que légèrement au voisinage de la saturation théorique. Ce n'est que lorsque le nombre de prises ouvertes dépassera largement le nombre calculé que la baisse de pression sur le réseau deviendra sensible à l'utilisateur.

M. CLÉMENT répond ensuite aux trois remarques présentées par M. MORLAT.

1° Il est vrai que le modèle qui conduit à la première formule de la demande suppose le report des appels refusés, alors que le second modèle correspond à un processus sans attente où les appels refusés sont découragés. Ce deuxième modèle conduit ainsi aux formules exactes (23) et (24), dans lesquelles les valeurs de p ont une signification différente de celles admises pour la première formule. Mais les approximations faites dans la suite du raisonnement consistent essentiellement, d'après (30), à assimiler le p de la seconde formule à la probabilité individuelle d'ouverture d'une prise. Il en résulte de ce fait que la formule (23) devient à peu près évidente et qu'elle ne correspond pas

exactement à un modèle sans attente. Bien au contraire, les hypothèses concernant le sort réservé aux appels refusés deviennent sensiblement les mêmes dans les premières et deuxième formules. Les divergences numériques auxquelles conduisent l'application des deux formules ne semblent donc pas pouvoir être expliquées par des hypothèses opposées sur ce sujet.

2° Il est certain que le modèle pourrait être perfectionné en revoyant certaines hypothèses. Il ne semble pas que celles concernant l'indépendance des demandes des diverses prises soient profondément critiquables, ni mériteraient pour l'instant, en l'absence d'expériences, d'entraîner une révision du modèle. La prise en compte de phénomènes contagieux complique sérieusement les calculs sans avantage évident en contrepartie. Par contre, de toute évidence, l'hypothèse d'homogénéité dans le temps mériterait d'être perfectionnée. En particulier, il serait séduisant d'établir un modèle dans lequel le paramètre λ serait une fonction du temps, d'une forme plus ou moins sinusoïdale, comme semble bien le confirmer l'expérience. Mais la théorie exacte devient extrêmement complexe.

Cependant, comme M. MORLAT l'a indiqué lui-même, il importe, avant de perfectionner la théorie ou la compliquer, d'accumuler des observations expérimentales.

3° La troisième remarque de M. MORLAT est la conséquence, sans doute, d'une rédaction insuffisamment détaillée qui peut laisser place à une mauvaise interprétation.

Si l'on suppose que la variable aléatoire représentant le débit demandé est en première approximation du type de Laplace, le processus temporel correspondant peut être considéré, pour une valeur du débit initial donnée, comme un processus à accroissements aléatoires indépendants (processus de Wiener-Lévy).

Sous ces hypothèses simplificatrices, et sous celles-là seulement, on peut donc admettre que la variance de la somme est égale à la somme des variances.

M. de SAINT-VAULRY indique que M. CLÉMENT a mentionné dans sa communication que, dans un état donné des pompes, le débit était constant et indépendant de la hauteur de refoulement. En fait, si le réservoir se vide partiellement, le débit des pompes augmente.

M. CLÉMENT indique que cette remarque est très exacte, mais que le phénomène évoqué peut être négligé, car les variations relatives sont très faibles. D'ailleurs, rien n'empêche dans le modèle de prendre en compte ces variations en remplaçant le débit par le volume correspondant.

M. de SAINT-VAULRY pense que cela se justifie pour des réservoirs à niveau libre et non pour des réservoirs sous pression.

M. CLÉMENT répond que, dans les formules en cause, il convient de prendre non pas le débit de la pompe à une certaine pression (initiale ou finale), mais le débit à la pression moyenne correspondant à celle du réservoir.

CENTRE DE DOCUMENTATION DU C.N.R.S.

15, quai Anatole-France, PARIS-VII^e — Tél. : 705-93-39 +

TARIF DES ABONNEMENTS AU BULLETIN SIGNALÉTIQUE

ANNÉE 1965

S E C T I O N S		P R I X	
		FRANCE	ÉTRANGER
M E N S U E L L E S	1. MATHÉMATIQUES.	F 30	F 35
	2. ASTRONOMIE, ASTROPHYSIQUE, PHYSIQUE DU GLOBE.	40	45
	3. PHYSIQUE I. - Généralités. Physique mathématique. Mécanique. Acoustique. Optique. Chaleur. Thermodynamique.	50	55
	4. PHYSIQUE II. - Electricité.	40	45
	5. PHYSIQUE NUCLÉAIRE. - Noyaux. Particules. Energie atomique.	40	45
	6. STRUCTURE DE LA MATIÈRE. - Cristallographie. Solides. Fluides. Atomes. Ions. Molécules.	40	45
	7. CHIMIE I. - Chimie générale. Chimie physique. Chimie minérale. Chimie analytique. Chimie organique.	100	105
	8. CHIMIE II. - Chimie appliquée. Métallurgie.	80	85
	9. SCIENCES DE L'INGÉNIEUR.	60	65
	10. SCIENCES DE LA TERRE I. - Minéralogie. Géochimie. Pétrographie.	25	30
	11. SCIENCES DE LA TERRE II. - Physique du Globe. Géologie. Paléontologie.	40	45
	12. BIOPHYSIQUE. BIOCHIMIE. - Chimie analytique biologique.	40	45
	12. SCIENCES PHARMACOLOGIQUES. TOXICOLOGIE.	40	45
	14. MICROBIOLOGIE. VIRUS. BACTÉRIOPHAGES. IMMUNOLOGIE. GÉNÉTIQUE.	40	45
	15. PATHOLOGIE GÉNÉRALE ET EXPÉRIMENTALE.	60	65
	16. BIOLOGIE ET PHYSIOLOGIE ANIMALES.	100	105
	17. BIOLOGIE ET PHYSIOLOGIE VÉGÉTALES.	50	55
	18. SCIENCES AGRICOLES. ZOOTECHNIE, PHYTIATRIE ET PHYTO-PHARMACIE, ALIMENTS ET INDUSTRIES ALIMENTAIRES.	60	65
Abonnement pour les Sections groupées 1 à 11.		250	290
Abonnement pour les Sections groupées 12 à 18.		250	290

- Dans ces prix sont compris les index « auteurs » et « matières » correspondant à chacune des rubriques.
- Une réduction de 25 % sera accordée sur le montant des abonnements à 2 sections et plus.
- La même remise sera consentie aux abonnés qui désirent plusieurs exemplaires d'une même section.
- Une remise de 50 % sur le tarif des abonnements est accordée aux personnels du C.N.R.S. et des Établissements universitaires français. Pour en bénéficier, les abonnés doivent adresser leur commande directement à nos bureaux. Cependant cette réduction ne peut être cumulée avec la remise de 25 % indiquée ci-dessus.