ÉTUDE DES PROCÉDÉS DE CALCUL AYANT POUR BUT DE RENDRE MINIMAL LE COUT D'UN RÉSEAU DE DISTRIBUTION D'EAU SOUS PRESSION

PAR Y. LABYE *

Introduction

Nous nous proposons de déterminer les diamètres des canalisations et les cotes des réservoirs afin que le coût du réseau soit minimal.

Nous nous limiterons aux procédés de calcul utilisés à la Section Technique Centrale des Travaux d'Hydraulique du Service du Génie Rural pour le traitement de ces problèmes à l'aide de calculatrices électroniques.

L'essentiel de cet exposé concerne les réseaux ramifiés. Nous terminerons par un simple aperçu sur les méthodes dont on dispose pour le calcul des réseaux maillés.

Le calcul des réseaux ramifiés

Nous traiterons d'abord le problème I correspondant aux hypothèses suivantes :

a) le tracé du réseau, le débit Q sur chaque tronçon, la longueur L de chaque tronçon sont des données du problème;

b) on connaît pour chaque tronçon la série S des canalisations notées *i* susceptibles d'être utilisées, et, pour chacune d'elles, le prix p_i au mètre linéaire, la perte de charge $J_i(Q)$ par mètre de longueur, les bornes inférieure v_i et supérieure V_i de la vitesse. On désignera par S′ la série des canalisations vérifiant ces bornes de vitesse;

c) en tout point M où l'on désire que la charge restante p_m soit au moins égale à un minimum $\overline{p}_M$ fixé, on fournit soit z_M altitude de M, soit le minimum $\overline{Z}_M$ de $z_M + p_M$ (on a $\overline{Z}_M = z_M + \overline{p}_M$);

d) le réservoir R est unique. La cote z_R est fixée, ou, lorsqu'il importe de l'optimaliser, on fournit le prix du réservoir en fonction de z_R et les éléments permettant de calculer le coût du pompage en fonction de la charge à la sortie de la pompe. En général des considérations techniques ou esthétiques conduisent à fixer une borne supérieure $\overline{\overline{Z}}_R$ pour $z_R = Z_R$. Cette borne, lorsqu'elle est fixée, est une donnée du problème.

Toutes ces données (paramètres ou fonctions), qui peuvent d'ailleurs être quelconques et varier d'un tronçon à l'autre, étant fournies, on dispose de deux méthodes donnant la solution mathématique exacte de ce problème I : La méthode du programme linéaire et la méthode discontinue.

Il est bon de préciser que la méthode de calcul des débits de M. Clément peut être utilisée, les procédés ci-dessus n'impliquant aucune corrélation entre les débits de deux tronçons du réseau.

Notons également que la Série S, qui peut varier éventuellement avec le tronçon, peut être choisie arbitrairement et, par suite, comporter soit un seul, soit plusieurs matériaux, une canalisation quelconque de diamètre, matériau et revêtement donnés étant représentée par un nombre ou un indice la définissant sans ambiguïté. De même $\overline{p}_M$ peut varier d'un point M à un autre. Le plus souvent cette

* Docteur ès Sciences, Ingénieur du Génie rural, des Eaux et Forêts, à la Section technique centrale des travaux d'Hydraulique.

borne n'est imposée qu'aux prises ou à certains points hauts du réseau.

1. La méthode du programme linéaire.

Considérons un point M où la charge minimale en M, $\overline{Z}_M$, est imposée. L'arc $\widehat{RM}$ est constitué de tronçons notés k, de longueur L_k, portant un débit Q_k. l_{ik}, qui est une inconnue, est la longueur de la canalisation i sur le tronçon k, en se limitant aux i appartenant à S'_k (fig. 1), ci-contre.

La condition $Z_M \geqslant \overline{Z}_M$ s'exprime par :

$$Z_R - \sum_{i,k} Ji(Q_k)\, l_{ik} \geqslant \overline{Z}_M \qquad (1)$$

avec $i \varepsilon S'_k$, $k \varepsilon \widehat{RM}$ (le symbole ε signifiant : appartenant à).

La relation (2) ci-dessous exprime que la longueur d'un tronçon k est L_k :

$$\sum_{i \varepsilon S'_k} l_{ik} = Lk \qquad (2)$$

Rendre minimal le prix P du réseau, revient à minimiser l'expression (3) :

$$P = \sum_{R} p_i l_{ik}$$

la sommation étant étendue à la totalité du réseau $\mathcal{R}$.

On reconnaît les équations dites du « programme linéaire ». Nous n'avons pas l'intention de développer ici la théorie du programme linéaire qui est classique et due à Dantzig.

Signalons qu'une démonstration rigoureuse, claire et très simple est exposée dans l'ouvrage de Kaufmann intitulé : « Introduction à la recherche opérationnelle. »

Pour un réseau de n tronçons il y a n équations (2), au plus n équations (1) (en moyenne $n/3$) et $5\,n$ inconnues en moyenne. Sauf pour les très petits réseaux, il faut pratiquement faire appel à des calculatrices géantes et, même avec de tels moyens, le temps de calcul est relativement lent (de l'ordre d'une demi-heure à une heure pour un réseau de 500 tronçons). C'est M. Savy de la Compagnie I.B.M. qui le premier eut l'idée de nous proposer l'emploi de cette méthode, notre rôle s'étant borné à la fourniture du jeu d'essai et des équations ci-dessus, d'ailleurs évidentes.

On résout d'abord le problème pour une valeur de Z_R et on obtient le prix minimal $\mathcal{P}(Z, R)$ en paramètrant sur le second membre. La machine peut détecter si les données ne sont pas contradictoires, mais il faut noter que la fourniture, en général très facile, d'une « solution de base » permet de réduire notablement la durée des calculs (un gain de 50 % est souvent enregistré).

Il n'y a guère de machines pouvant traiter plus de 1 000 inéquations, ce qui correspond à des réseaux de 500 tronçons. Un artifice permet de calculer les réseaux ayant un nombre quelconque de tronçons. On montrera en effet, lors de l'exposé sur la méthode discontinue, qu'un sous-réseau quelconque est équivalent à un simple tronçon auquel correspond une série S' de diamètres fictifs, mais parfaitement déterminés. Si, à un sous-réseau de N tronçons, on substitue le tronçon équivalent, on diminuera de N le nombre d'équations avec $N < N' \leqslant 2\,N$, ce qui permet toujours de réduire le nombre total d'équations de façon qu'il soit inférieur à 1 000.

Il faut remarquer que le programme linéaire permet de résoudre des problèmes plus complexes que le problème P_1 ci-dessus.

Ainsi, fixer une borne supérieure $\overline{\overline{Z}}_P$ en un point P quelconque s'exprime par la relation (4) :

$$Z_R - \sum_{ik} J_i(Q_k)\, l_{ik} \leqslant \overline{\overline{Z}}_P$$

Lorsqu'il y a plusieurs réservoirs notés R_s et plusieurs régimes de débits notés Q_{kj} il y a une équation (1) et une équation (4) pour chaque point P, chaque point M, chaque réservoir et chaque régime de débit :

$$Z_{R_s} - \sum_{ik} J_i(Q_{kj})\, l_{ik} \leqslant \overline{\overline{Z}}_{Pj};$$

$$Z_{R_s} - \sum_{ik} J_i(Q_{kj})\, l_{ik} \geqslant \overline{Z}_{Mj}$$

Ce procédé permet également d'obtenir le prix minimal d'un réseau maillé lorsque les débits sur chaque tronçon sont connus. Pour chaque régime de débit et chaque maille $\mathcal{M}$, on a une relation de la forme :

$$\sum_{(M)} \alpha_k J_i(Q_{kj})\, l_{ik} = Q \qquad (5)$$

où $\alpha_k = +1$ ou -1 selon que le sens de circulation du fluide sur le tronçon k est le même ou opposé au sens de parcours sur la maille.

Pour de telles généralisations, la notion de tronçon équivalent à un sous-réseau n'est pas valable en général. La multiplication des équations risque de rendre le prix trop élevé ou le calcul impossible dans certains cas.

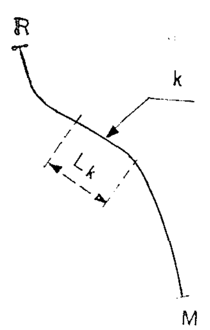
Toutefois, ces remarques sont souvent très utiles. Ainsi, en particulier, un emploi conjoint du programme linéaire et de la méthode discontinue permet d'aborder certains problèmes de réseaux maillés dans des conditions très économiques.

2. Méthode discontinue (1960).

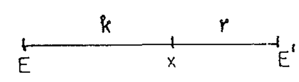
a) *Prix minimal d'un tronçon isolé.*

Considérons un tronçon (EE') de longueur L, la perte de charge sur ce tronçon étant $H = Z_{E'} - Z_E$ et le débit du tronçon Q.

Montrons tout d'abord que pour H quelconque, mais fixé, le prix minimal du tronçon est obtenu lorsqu'il porte au plus deux canalisations de la série S'. Cette condition suffisante est d'ailleurs en général nécessaire.

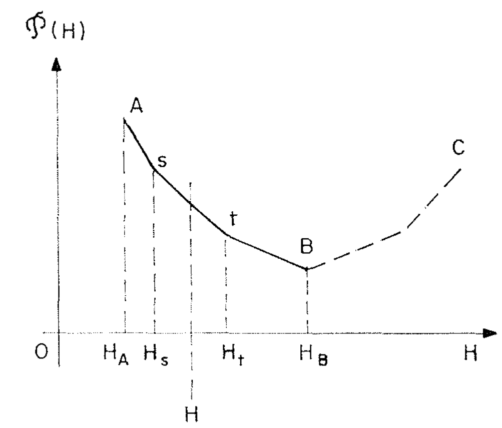


1/



2/

2 bis/



3/

Soit donc une répartition de n canalisations de S′, sur (EE′) telle que $Z_{E'} - Z_E = H$ (fixé), avec $n > 2$.

Il existe donc nécessairement deux points où l'on change de canalisation. Faisons varier les abscisses x_N et $x_{N'}$ de deux quelconques N et N′ de ces points, en laissant H invariant. H et P, prix du tronçon, étant des fonctions linéaires de x_N et $x_{N'}$ il en résulte que l'on a pour H invariant, $P = Ax_N + B$, où A et B ne dépendent que des caractéristiques (perte de charge unitaire et prix unitaire) des quatre canalisations ayant une de leurs extrémités soit en N, soit en N′. Il est donc toujours loisible de déplacer le point N (et par suite N′) de façon que P ne croisse pas, le sens de ce déplacement, qui dépend du signe de A, restant le même tant qu'aucune des quatre canalisations précitées n'a pas entièrement disparu. En poursuivant le déplacement de N, il arrivera nécessairement qu'une au moins de ces quatre canalisations disparaisse, le tronçon ne portant plus, alors, que $n - 1$ canalisations de S′, au plus.

Par suite, en répétant l'opération ci-dessus, au plus $n - 1$ fois, il restera seulement deux canalisations de S′ sur le tronçon. Ceci établit qu'à toute répartition de $n > 2$ canalisations de S′, telles que H ait une valeur fixée, on peut associer une répartition d'au plus deux canalisations d'un prix non supérieur. Par suite, pour H fixé, le prix minimal du tronçon sera obtenu en utilisant au plus deux canalisations de S′, d'ailleurs à déterminer.

Lorsque (EE′) porte seulement deux canalisations k et r de S′ et qu'on fait varier l'abscisse x du point commun à ces deux canalisations, H et P varient linéairement avec x.

Donc P varie linéairement avec H. La fonction P(H) est donc représentée par un segment de droite ayant pour extrémités les points M_k de coordonnées $(H_k = J_k(Q).L,\ P_k = p_k.L)$ et M_r de coordonnées $(H_r = J_r(Q).L,\ P_r = p_r.L)$, correspondant respectivement au cas où le tronçon porte en totalité la canalisation k ou la canalisation r.

Ceci établit que la fonction $\mathcal{P}(H)$ exprimant le prix minimal du tronçon en fonction de H est représentée par une courbe constituée par des segments de droite obtenus en joignant deux à deux certains des points M_i de coordonnées :

$$(H_i = J_i(Q).L,\ P_i = p_i.L).$$

Il en résulte que la courbe $\mathcal{P}(H)$ s'identifie au polygone « enveloppe-inférieure » des points M_i, nécessairement concave vers le haut (fig. 3).

Seules les canalisations de S′ correspondant aux points d'arrêt et aux points anguleux du polygone-enveloppe seront à utiliser.

Dans le cas traité ici (problème I), où le réseau ne comporte qu'un réservoir, la partie utile du polygone-enveloppe se limite à la portion $\widehat{AB}$. (Si cette restriction n'était pas réalisée, il faudrait prendre en entier la courbe ABC pour tout tronçon situé à l'amont d'un point où $\overline{\overline{Z}}_R$ est imposé.)

Pour établir la proposition, il suffit de supposer que le prix minimal du réseau a été obtenu avec $H > H_B$ pour au moins un tronçon du réseau. On remarque alors que si l'on substitue à H la valeur H_B sur ce tronçon, on diminue P, les contraintes de charge minimale restant vérifiées puisque la charge restante est inchangée partout, sauf à l'aval du réseau où elle augmente de $H - H_B$. Ceci entraîne que l'hypothèse d'obtention du prix minimal avec $H > H_B$ est absurde.

On a donc $H_A \leqslant H \leqslant H_B$. Pour H fixé, la figure 3 montre que le tronçon portera les diamètres s et t, correspondant aux valeurs H_s et H_t encadrant H, sur des longueurs respectives L_s et L_t données par les relations :

$$L_s = \frac{H_t - H}{H_t - H_s}.L \qquad \text{et} \qquad L_t = \frac{H - H_s}{H_t - H_s}.L$$

Ceci montre que le problème sera complètement résolu lorsqu'on aura déterminé la perte de charge H sur chaque tronçon.

Lorsque la perte de charge est unique sur le réseau et de la forme $J_i(Q) = J_i.F(Q)$, $\mathcal{P}/L$ s'exprime en fonction de H/LF (Q) à l'aide d'une courbe qui ne dépend que du bordereau de prix. En effet cette courbe affine à $\mathcal{P}(H)$ est le « polygone-enveloppe » A′B′C′ (limité ici à A′B′) des points M'_i de coordonnées $(J_i,\ p_i)$ et les seuls diamètres à utiliser en pareil cas sont ceux correspondant à $\widehat{A', B'}$. Donc, en pareil cas, le diamètre à partir duquel on change de matériau est invariant. Or, très fréquemment, on utilise des lois de pertes de charge de la forme $J_i(Q) = J_i.Q^m$ où m est pris constant sur le réseau.

Cette propriété fournit aux constructeurs, en considérant les bordereaux nationaux, les bordereaux de prix moyens de vente et de revient, une possibilité d'apprécier l'opportunité de poursuivre certaines fabrications et d'évaluer les rabais qui doivent être consentis pour qu'une canalisation devienne compétitive.

b) *Prix minimal d'un réseau-tronçon :*

Il s'agit d'un réseau constitué d'un seul tronçon (EE′). On désignera respectivement par Z_E et Z la charge en E et en E′, ce dernier point étant l'extrémité amont du réseau tronçon. Nous nous proposons de déterminer $\mathcal{P}$ (Z) prix minimal du réseau-tronçon en fonction de Z.

Pour Z donné il faut rendre maximal :

$$H = Z - Z_E$$

avec $H \leqslant H_B$ puisque $\mathcal{P}(H)$ décroît avec H.

On a :

$$\max H = Z - \overline{Z}_E \text{ si } Z \leqslant Z_B = \overline{Z}_E + H_E$$

et :

$$\max H = H_B \quad \text{si} \quad Z \leqslant Z_B$$

Par suite $\mathcal{P}(Z)$ est représenté par la courbe obtenue en faisant subir à $\mathcal{P}(H)$ une translation de longueur $\overline{Z}_E$ et en prolongeant la courbe ainsi obtenue, par une horizontale, au-delà du point B (fig. 4).

On a donc :

$$Z_E = \overline{Z}_E \quad \text{si} \quad Z \leqslant Z_B;$$

$$\overline{Z}_E = \overline{Z}_E + Z - Z_B = Z - H_B \quad \text{si} \quad Z \geqslant Z_B;$$

$$p_E = \overline{p}_E \quad \text{si} \quad Z \leqslant Z_B;$$

$$p_E = \overline{p}_E + Z - Z_B \quad \text{si} \quad Z \geqslant Z_B;$$

$$\mathcal{P}(Z) = \mathcal{P}^*(Z - \overline{Z}_E) \quad \text{si} \quad Z \leqslant Z_B;$$

$$\mathcal{P}(Z) = \mathcal{P}(H_B) \quad \text{si} \quad Z \geqslant Z_B$$

On a de plus :

$$Z \geqslant Z_A = \overline{Z}_E + H_A.$$

avec :

$$\mathcal{P}^*(Z - \overline{Z}_E) = \mathcal{P}(H) \quad \text{pour} \quad H = Z - \overline{Z}_E$$

Enfin lorsque $\overline{Z}$ est imposé, la partie utile de la courbe est limitée aux valeurs de Z supérieures ou au moins égales à la plus grande des deux quantités $\overline{Z}$ et Z_A.

Une courbe telle que $\mathcal{P}(Z)$ ou $\mathcal{P}(H)$ formée de droites dont le coefficient angulaire négatif ou nul croît avec (Z ou H) sera dite du type C.

c) *Généralisation.*

Cas d'un réseau ramifié quelconque.

Z étant la charge à l'extrémité amont d'un réseau ou sous-réseau quelconque le prix minimal $\mathcal{P}(Z)$ de ce réseau ou sous-réseau, en fonction de Z, est représenté par une courbe du type C.

Cette proposition se démontre par récurrence de la façon suivante :

Supposons la proposition vraie pour tout réseau ou sous-réseau ayant au plus N tronçons.

Considérons p réseaux notés $\mathcal{R}_j$, ayant chacun au plus N tronçons, ces réseaux ayant une extrémité commune M, la charge en ce point étant Z. $\mathcal{P}_j(Z)$ étant le prix minimal du réseau $\mathcal{R}_j$ en fonction de Z, le prix minimal $\mathcal{P}(Z)$ en fonction de Z, de l'ensemble de ces p réseaux est donc :

$$\mathcal{P}(Z) = \sum \mathcal{P}_j(Z)$$

Une somme de fonctions du type C étant elle-même de type C, $\mathcal{P}(Z)$ est donc elle-même du type C. En désignant par A_j le point d'arrêt à gauche de la courbe $\mathcal{P}_j(Z)$, la partie utile de $\mathcal{P}(Z)$ est limitée aux valeurs de Z au moins égales à la plus grande des deux quantités $\overline{Z}$ et $\max Z_{A_j}$.

Considérons maintenant un réseau $\mathcal{R}_1$ ayant au plus N tronçons, dont l'extrémité amont M est l'extrémité aval d'un tronçon (2) ayant lui-même pour extrémité amont le point M'. Z et Z' étant respectivement la charge en M et M' on désignera par $\mathcal{P}_1(Z)$, $\mathcal{P}_2(H)$ avec $H = Z' - Z$, et $\mathcal{P}_{1+2}(Z')$ les prix minimaux de $\mathcal{R}_1$ en fonction de Z, de (2) en fonction de H, de l'ensemble $(1 + 2)$ en fonction de Z' (fig. 5, 6, et 7).

La valeur la plus petite possible de Z' est évidemment $a = a_1 + a_2$. Par suite la courbe $\mathcal{P}_{1+2}(Z')$ part du point A' tel que $\overrightarrow{O'A'} = \overrightarrow{O_1A_1} + \overrightarrow{O_2A_2}$.

Soit Z'^* une valeur particulière de Z'. Si l'on prend pour H une valeur H^* on aura :

$$Z = Z^* = Z'^* - H^*.$$

Dans ces conditions, on a en désignant par P le prix du réseau $(1 + 2)$:

$$P_{1+2}(Z'^*, H^*) = \mathcal{P}_1(Z'^* - H^*) + \mathcal{P}_2(H^*)$$

On a alors :

$$\mathcal{P}_1 = F_1E_1 = b_1 - D_1E_1; \; P_2 = F_2E_2 = b_2 - D_2E_2$$

$$P_{1+2} = E'F' = b' - D'E$$

d'où :

$$P_{1+2} = b' - (D_1E_1 + D_2E_2) = b' - D'E;$$

donc :

$$D'E' = D_1E_1 + D_2E_2$$

On aura donc P_{1+2} minimal en choisissant H^* de façon que D'E', donc la longueur $D_1E_1 + D_2E_2$, soit maximal. Il en résulte que la courbe $\mathcal{P}_{1+2}(Z')$ s'obtient de la façon suivante :

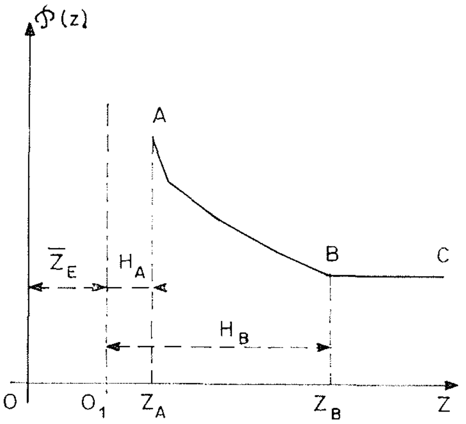
$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \text{etc.}, \beta_1, \beta_2, \ldots$$

étant respectivement les coefficients angulaires des droites constituant $\mathcal{P}_1(Z)$ et $\mathcal{P}_2(H)$, on classe par ordre croissant (décroissant en valeur absolue) l'ensemble (α, β) de *tous* ces coefficients angulaires. On porte ensuite successivement à partir de A', des segments équivalents aux éléments de droites constituant $\mathcal{P}_1(Z)$ et $\mathcal{P}_2(H)$ *dans l'ordre donné* par cette classification.

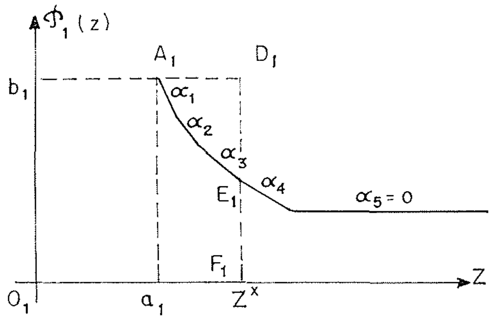
On obtient ainsi nécessairement le minimum; en effet, pour une valeur différente de H^*, les éléments de courbe $\overset{\frown}{A_1E_1}$ et $\overset{\frown}{A_2E_2}$ comporteraient des segments de droites ayant des coefficients angulaires dont la valeur ne pourrait être qu'égale ou supérieure à ceux que nous avons utilisés. Ceci ne pourrait donc que laisser invariant ou augmenter le prix P.

De même, on voit facilement que l'arc $\overset{\frown}{A'E'}$ permet de reconstituer les éléments de courbes $\overset{\frown}{A_1E_1}$ et $\overset{\frown}{A_2E_2}$ et par suite Z et H pour Z' donné. Ceci permettra, lorsque Z_R sera déterminé, d'obtenir de proche en proche les valeurs successives des Z et des H sur tous les tronçons.

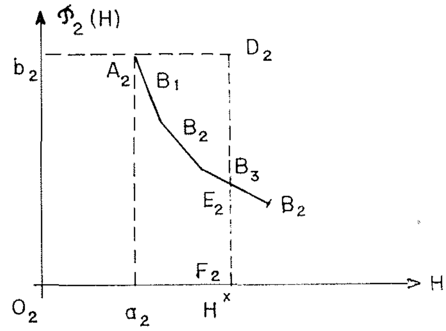
La proposition a été démontrée pour $N = 1$ (réseau-tronçon). Il en résulte qu'elle est vraie quel



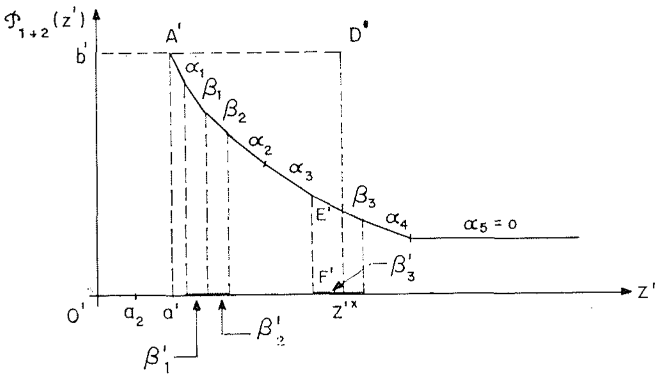
4/



5/



6/



7/

que soit N, un réseau quelconque pouvant toujours être constitué à partir de tronçons et réseaux-tronçons à l'aide d'additions du type ci-dessus.

La dernière courbe $\mathcal{P}(Z')$ est la courbe $\mathcal{P}(Z_R)$ relative au réservoir.

On remarque qu'une courbe qui joue le rôle de $\mathcal{P}(Z)$ jouera le rôle de $\mathcal{P}(Z')$ lors de l'opération suivante dans la « montée » vers le réservoir. Ces rôles sont inversés lors de la « redescente » de l'amont vers l'aval.

Il est inutile de conserver $\mathcal{P}(Z)$; il suffit en effet, pour déterminer H lors de la redescente, d'avoir conservé les abscisses des extrémités des projections β' des segments β relatifs à $\mathcal{P}(H)$.

Cette remarque particulièrement importante est due à M. Edet de la Société I.M.S.A.C. A chaque stade, on conserve donc, en dehors des abscisses des β', seulement la dernière courbe $\mathcal{P}(Z)$ obtenue qui servira pour l'opération suivante et qu'on éliminera ensuite. On voit immédiatement que le nombre de segments α croît très vite lorsqu'on va vers l'amont; par contre, le nombre de segments β (donc de β') est de l'ordre de 4 ou 5 en moyenne. On évite ainsi un encombrement inutile de l'unité centrale, donc les « entrées-sorties » et par suite la vitesse du calcul augmente. On simplifie aussi le travail en utilisant les fonctions $\mathcal{P}'(Z)$ et $\mathcal{P}'(H)$ au lieu de $\mathcal{P}(Z)$ et $\mathcal{P}(H)$. On voit en effet que $\mathcal{P}'(Z)$ et $\mathcal{P}'(H)$ sont fonctions en escalier dont les ordonnées sont les valeurs des α et des β. Comme on dispose pour chaque $\mathcal{P}(Z)$ d'un point dont on connaît l'ordonnée (le point correspondant au cas où on utilise partout le plus petit diamètre sur le sous-réseau à l'aval de M'); on peut déduire immédiatement $\mathcal{P}(Z)$ à partir de $\mathcal{P}'(Z)$.

Il convient de noter qu'il n'y a pas lieu d'accorder en matière de calcul un rôle particulier à la canalisation de refoulement. Le prix $\mathcal{P}(Z_R)$ du réservoir en fonction de Z_R est une fonction concave. On peut donc considérer le réservoir comme équivalent à un tronçon en dérivation, car, dans la méthode discontinue, ce qui importe ce n'est pas le signe des α et β, mais le fait que $\mathcal{P}(Z)$ et $\mathcal{P}(H)$ sont des fonctions concaves. Il suffit donc d'ajouter ensuite, en série, le tronçon constitué par la canalisation de refoulement pour avoir le prix minimal $\mathcal{P}(Z_S)$ du réseau en fonction de la charge Z_S à la sortie de la pompe.

L'existence d'une borne $\overline{\overline{Z}}_R$ ne fait que limiter la partie utile de $\mathcal{P}(Z)$ ce qui ne crée aucune difficulté; on ajoute à $\mathcal{P}(Z_S)$ le prix de la station de pompage et des frais de pompage, en fonction de Z_S, ce qui permet de déterminer en fonction de Z_S le coût minimal de l'ensemble du réseau, et par suite la valeur Z_S donnant le prix minimal.

Le prix unitaire des canalisations p_i est obtenu en fixant une valeur moyenne des pièces spéciales (vannes, coudes, etc.). Il faut noter qu'on pourrait prendre en considération le prix exact de ces éléments. La seule différence serait que les courbes $\mathcal{P}(Z)$ ne seraient plus du type C, ce qui ne constituerait aucune difficulté théorique, mais alourdirait les calculs. Une retouche de la solution théorique effectuée au besoin à la machine peut très facilement lever cette difficulté. En effet, si le calcul donne 95 m de 100 mm et 5 m de 125 mm sur un tronçon, il est certain qu'à la réalisation on mettra partout du 100 mm, ne serait-ce que dans un but de simplification. Signalons que le nombre de tronçons où l'on change de diamètre est de l'ordre de 10 % du nombre total de tronçons. Cette circonstance, qui s'explique d'ailleurs théoriquement, se produit surtout sur des antennes en dérivation où la perte de charge est le plus souvent si élevée que pratiquement aucun problème ne se pose. De même, le fait que $P(Z_R)$ ne soit pas concave ne constituerait aucune difficulté théorique.

L'intérêt de la méthode discontinue réside dans le fait qu'elle est de 50 à 100 fois plus rapide et par suite beaucoup moins coûteuse que la méthode du programme linéaire. On a considéré qu'un avantage du programme linéaire était la possibilité de voir l'action sur le prix d'une variation de la charge minimale $\bar{Z}$ aux points où la topographie est telle que l'existence d'une prise risque de peser lourdement sur le coût de l'ensemble du réseau. En réalité, si la variation de $\bar{Z}$ est assez importante, ce qui est en général nécessaire, le coût du calcul supplémentaire risque d'être assez élevé, beaucoup plus que le procédé suivant :

Comme le prix $\mathcal{P}(Z)$ d'un sous-réseau quelconque est de type C, on peut considérer que ce sous-réseau est équivalent à un tronçon où :

$$\bar{Z}_E = 0, \qquad Q = 1, \qquad L = 1$$

portant des diamètres fictifs où J_i et p_i sont représentés par les coordonnées des points d'arrêt et anguleux de $\mathcal{P}(Z)$. On peut même se limiter à un nombre plus réduit de points et obtenir ainsi un nombre de diamètres fictifs réduits tout en conservant une précision acceptable. Pour mesurer l'action d'une prise située en un point M quelconque, sur le prix du réseau, il suffit de considérer ce point comme extrémité amont et de déterminer $\mathcal{P}(Z_M)$. Comme le réseau comporte peu de tronçons lorsqu'on a remplacé chaque sous-réseau se branchant sur M par un tronçon équivalent, le coût de l'opération est dérisoire.

La méthode discontinue fut programmée pour la première fois en 1960 par la Société IMSAC, elle est utilisée depuis 1965 par la Compagnie I.B.M. (*) qui l'a substituée au programme linéaire pour le calcul des réseaux ramifiés. Une variante de cette méthode, permettant de résoudre le problème lorsqu'on s'impose de ne pas changer de diamètre sur chaque tronçon est exploitée depuis 1963 par la Compagnie Bull (M. Bernadat).

A la suite de recherches effectuées en collaboration avec mon camarade Vellinger, Ingénieur en Chef du Génie Rural, le procédé ci-dessus a été étendu au cas d'un réseau ramifié comportant un nombre quelconque de stations de pompage et réservoirs. De plus de nombreux autres problèmes ont été étudiés. (Renforcement, réutilisation de canalisations, etc.). L'expérience a montré que le calcul optimal des réseaux ramifiés permet de faire un gain variant de 0,5 à 8 % sur le coût des réseaux. En évaluant, à titre de précaution, le gain moyen à 3 %, la généralisation de ces méthodes permettrait de faire des économies considérables, en raison de l'ampleur des travaux réalisés.

Il est hors de propos de se demander si l'incertitude des données et l'imprécision des lois de perte de charge rend ou non illusoire l'intérêt d'employer de tels procédés de calcul, puisque, avec les mêmes données, les mêmes lois de perte de charge, donc avec au moins la même sécurité, ils donnent *toujours* un prix inférieur à celui fourni par les procédés de calcul habituels. En conséquence, le gain n'est pas aléatoire, il est certain. (Les résultats ci-dessus mentionnés ont été obtenus en comparant avec les projets établis par des projeteurs très entraînés. Des gains de 10 et 12 % ont été obtenus avec des projeteurs moyens.). Le prix du calcul est de l'ordre du dix-millième du coût du réseau.

(*) MM. Mitrani et Benichou pour IBM, M. Edet pour l'IMSAC.

Aperçu sur les réseaux maillés

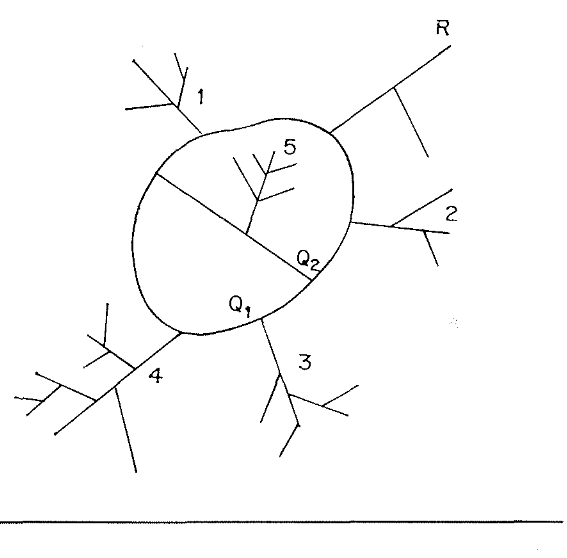
Il n'existe pas actuellement de méthodes susceptibles de donner l'optimum mathématique exact dans le cas le plus général présenté par les réseaux maillés. On peut même citer des cas de réseaux à n mailles où l'on serait conduit à classer 2^n optimums relatifs correspondants aux cas où les dérivées partielles par rapport aux paramètres indépendants changent de signe.

Quoique imparfaites, si l'on se place au point de vue de la théorie pure, les méthodes employées qui conduisent le plus souvent à des dérivations ou à l'emploi des multiplicateurs de Lagrange donnent des résultats très intéressants dans de nombreux cas.

Citons par exemple la méthode utilisée par M. Renouard du Gaz de France.

Dans les projets d'irrigation, où le nombre de mailles est toujours très réduit, nous employons à la S.T.C.T.H. le procédé suivant (fig. 8) :

Dans un réseau tel que celui correspondant à la figure 8, on remplace les grands réseaux ramifiés 1 à 5, aboutissant aux mailles, par le tronçon équivalent. On a alors affaire à un réseau très simple où les débits indépendants sont Q_1 et Q_2. On essaye plusieurs couples (Q_1, Q_2) et pour chacun d'eux on calcule le réseau à l'aide de la méthode du programme linéaire. Comme le coût du calcul des tronçons équivalents à l'aide de la méthode discontinue est à très bon marché, on peut ainsi obtenir un résultat très valable pour un prix abordable. On peut d'ailleurs améliorer la solution à partir du couple (Q^*_1, Q^*_2) retenu, en faisant des variations locales ΔQ_1, ΔQ_2 et Δl_{ik} de Q_1, Q_2, l_{ik}. On est ramené à un programme linéaire local. On peut d'ailleurs lorsqu'on a obtenu une distribution de débit (Q^n, Q_2^n) au bout de n itérations, recalculer à l'aide du



8/

programme linéaire des l_{ik} exacts relatifs à cette distribution. On poursuit alors en répétant l'opération jusqu'à l'obtention d'un minimum, qui a des chances d'être le minimum absolu ou très près de ce minimum en raison de la détermination du couple de départ (Q^*_1, Q^*_2). Mais il est évident que ce procédé n'est pas mathématiquement rigoureux et qu'il ne peut être appliqué pratiquement que lorsque le nombre de mailles est très réduit.

Signalons, à titre de curiosité, que certains utilisateurs ont calculé le prix minimal de leurs réseaux de transfert de fluide, en démaillant et en calculant les réseaux ainsi obtenus à l'aide de la méthode discontinue. Quoique le procédé soit théoriquement éminemment critiquable, ils estiment avoir gagné 10 % du montant des travaux, soit 5 millions de francs sur 50 millions de francs en 1965.

Enfin mentionnons pour terminer que la méthode Hardy-Cross ne donne évidemment ni la distribution des débits optimaux sur les tronçons, ni même le prix minimal relatif pour la distribution des débits qu'elle détermine; ceci est évident, puisque les prix des canalisations n'interviennent pas dans le calcul. Si, pour les réseaux anciens, il est parfaitement légitime de l'employer pour les calculs de renforcement ou d'extension, toujours relativement limités par rapport à l'ensemble existant dont les diamètres sont donc fixés, il est beaucoup plus légitime de se fixer les débits dans le cas des réseaux neufs. L'équilibrage est quasi immédiat dans le cas où l'on ne recherche pas l'optimum. De plus, sans recherche cet idéal, il est toujours possible d'améliorer la solution de départ en recherchant un minimum relatif, ainsi que le montre l'exemple ci-dessus.

Conclusion

Il ne fait aucun doute que le calcul automatique des réseaux en vue d'en diminuer le prix constitue un apport non négligeable en raison des économies qu'il provoque sur le coût des réseaux et du fait qu'il évite aux projeteurs des calculs longs et fastidieux, ce qui permet d'affecter ce personnel spécialisé à des tâches à la fois plus rentables et plus intéressantes.

Bibliographie

LABYE (Yves). — Thèse secondaire. Toulouse (1964).

Discussion

Président : M. DROUHIN

M. le Président rappelle que M. LABYE a brillamment soutenu, en juin 1965, une thèse sur : « Etudes des régimes transitoires dans les canalisations alimentées par un ou plusieurs réservoirs » et qu'il a mis également au point différentes méthodes de calcul.

M. le Président remercie M. LABYE pour la communication qu'il vient de présenter et se réjouit de l'occasion qui lui a été donnée de présider à tous ces exposés.

M. le Président remercie enfin tous les auditeurs d'être venus si nombreux à cette séance.

La séance est levée à 17 h 50.