

# CONSIDÉRATIONS TECHNIQUES ET ÉCONOMIQUES SUR LES PROJETS DE DIGUES MUNIES D'UN TAPIS FILTRANT

PAR C. THIRRIOT \* ET J. EFTHIMIATOS \*\*

## Introduction

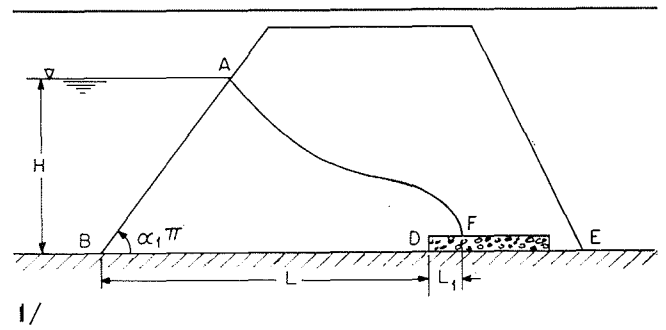
Le problème de l'écoulement à travers un barrage muni à l'aval de tapis filtrant a déjà préoccupé beaucoup d'ingénieurs et de chercheurs. Témoin en est l'excellente synthèse réalisée par le professeur Endre Nemeth [1].

Pourquoi donc cette nouvelle contribution ? Nous avons voulu appliquer à l'étude de quelques cas d'écoulement en milieu poreux les possibilités offertes par les calculateurs électroniques. En effet, ce moyen d'investigation permet aux ingénieurs, sans long cheminement mathématique, d'aboutir à une solution concrète.

Dans ce qui suit, nous parlerons d'abord des différentes voies de résolution du problème physique. Ensuite, nous verrons que les résultats obtenus par le calcul numérique automatique permettent des considérations économiques qui aboutissent à des critères particulièrement simples.

## Position du problème

Soit un barrage homogène et isotrope fondé sur un matériau imperméable et muni d'un tapis filtrant à l'aval (fig. 1). Au fond, cette hypothèse de base s'écarte peu de la généralité. En effet, des affinités permettent de ramener l'étude de certains milieux



anisotropes au cas du barrage à perméabilité isotrope [2].

La présence d'un filtre à l'aval comporte deux avantages dans le cas de construction d'un barrage en terre. D'une part, pour le même débit de filtration, imposé par l'économie générale du projet, il permet dans certains cas la réduction du volume du barrage et, d'autre part, il assure une meilleure sécurité de l'ouvrage en réduisant sensiblement la pression de filtration [2].

Le barrage est défini par les paramètres suivants :

H : niveau de la retenue en amont;

L : largeur du barrage;

K : coefficient de perméabilité de son massif;

$\alpha_1 \pi$  : l'angle du parement amont.

On appelle aussi :

Q : le débit par unité de longueur du barrage.

L'application des règles de l'analyse dimensionnelle nous conduit à établir une relation entre les trois grandeurs :

$$q = \frac{Q}{KH} \quad l = \frac{L}{H} \quad \alpha_1$$

\* Professeur s.c. à la Faculté des Sciences de Toulouse, Professeur à l'E.N.S.E.E.H.T.

\*\* Ingénieur de l'Université Technique d'Athènes, Ingénieur hydraulicien de l'Université de Toulouse, Docteur-ingénieur.

et tracer ensuite les courbes équipotentielles ( $\varphi = Cte$ ) et les lignes de courant ( $\psi = Cte$ ) dont fait partie la surface libre. La connaissance de la ligne de la surface libre nous permet d'apprécier le volume et par conséquent les risques d'émergence de l'eau.

Comme les vitesses d'infiltration sont assez faibles, pour les cas rencontrés dans la pratique, la loi de Darcy reste valable.

D'autre part, pour les valeurs usuelles du coefficient de perméabilité  $K$  ( $K = 1$  à  $100$  m/24 h) les termes qui contiennent une différenciation par rapport au temps dans les équations générales de l'hydro-dynamique, peuvent être négligés dans le cas des mouvements permanents. Ainsi, on peut prouver facilement [3] que dans l'écoulement permanent d'infiltration, la vitesse dérive d'un potentiel  $\varphi$ . L'équation de continuité devient  $\Delta\varphi = 0$  (1) et par conséquent  $\Delta\psi = 0$ .

Donc le problème se ramène finalement à la résolution des équations du type elliptique avec conditions aux limites de type mêlé.

### Solution du problème par Numerov

Numerov, en 1942 [4], ayant fait quelques approximations, a résolu le problème au moins théoriquement et a abouti aux formules que nous donnons ci-dessous sans établir leur démonstration.

$$l \approx \frac{1}{2q} - \frac{q}{2} + \cotg \alpha_1 \pi + qf_2(\alpha_1) \sin \alpha_1 \pi - f_1(\alpha_1) \cos \alpha_1 \pi \quad (2)$$

où :

$$f_1(\alpha) = \frac{1}{\sin \alpha \pi} - \int_0^1 \cotg^{(1-2\alpha)} \left( \frac{\pi y}{2} \right) dy + \int_0^1 y \cotg^{(1-2\alpha)} \left( \frac{\pi y}{2} \right) dy$$

$$f_2(\alpha) = \frac{1}{2 \sin (1-\alpha) \pi} - \frac{1}{4} \int_0^1 (1-y)^2 \cotg^{(1-2\alpha)} \left( \frac{\pi y}{2} \right) dy$$

Pour la surface libre, en utilisant les grandeurs adimensionnelles :

$$x = \frac{X}{H} \quad y = \frac{Y}{H}$$

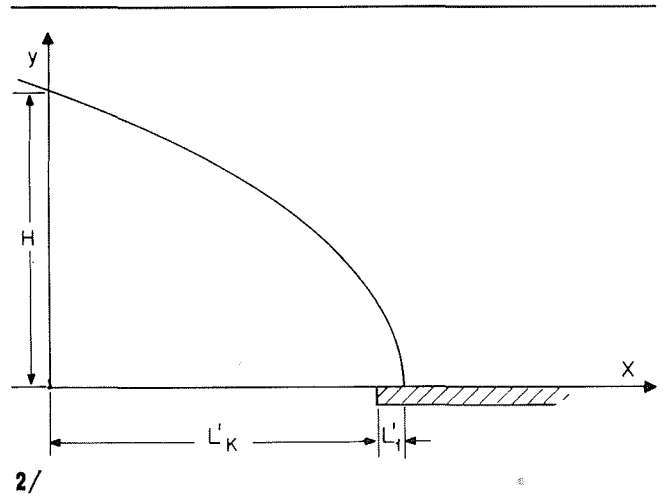
il a obtenu :

$$x \approx \frac{1-y^2}{2q} + \cotg \alpha_1 \pi + qF_2(u, \alpha_1) \tg \alpha_1 \pi - F_1(u, \alpha_1) \quad (3)$$

où :

$$u = \tg \frac{\pi(1-y)}{2q}$$

$$F_1(u, \alpha) = \frac{2 \cos \alpha \pi}{\pi} \int_0^1 \cotg^{(1-2\alpha)} \left[ \frac{\pi t}{2} \text{Arc tg} \left( u \tg \frac{\pi t}{2} \right) \right] dt$$



$$F_2(u, \alpha) = -\frac{2 \cos \alpha \pi}{\pi} \int_0^1 \cotg^{(1-2\alpha)} \left\{ \frac{\pi t}{2} \text{Arc tg} \left( u \tg \frac{\pi t}{2} \right) \left[ 1 - \frac{1}{r} \tg \left( u \tg \frac{\pi t}{2} \right) \right] \right\} dt$$

Nous remarquons que l'application des formules (2) et (3) nécessite au préalable le calcul, par un procédé numérique, des fonctions  $f_1(\alpha)$ ,  $f_2(\alpha)$ ,  $F_1(u, \alpha)$ ,  $F_2(u, \alpha)$ . Des graphiques qui fournissent approximativement les valeurs de ces fonctions sont donnés par Shankin [5]. Pourtant il ne faut pas se faire d'illusions, l'approximation faite sur le calcul des intégrales, même en utilisant un procédé numérique assez précis — comme l'intégration de Gauss par exemple —, peut être assez grossière, surtout dans les cas où la fonction à intégrer n'est pas bornée.

Quand on a un parement vertical ( $\alpha_1 \pi = 90^\circ$ ), la formule (2) peut se simplifier et l'on obtient approximativement :

$$l \approx \frac{1}{2q} - \frac{q}{2} + \frac{q}{3} \approx \frac{1}{2q} - \frac{q}{6} \quad (4)$$

### Formules de Dupuit et de Kozeny

L'application des hypothèses de Dupuit au problème posé, nous donne  $L \approx (1/2q) + \cotg \alpha_1 \pi$ . D'après la formule (2), l'examen des abaques de Shankin montre que la solution de Dupuit donne une approximation valable seulement dans les cas où  $q$  est très petit et  $\alpha_1 \pi$  assez grand.

Le problème de Kozeny consiste à étudier le mouvement d'une nappe aquifère reposant sur une couche imperméable horizontale qui, à partir d'une certaine distance, se modifie et devient perméable. On voit donc que la couche perméable constitue ainsi un filtre pour la nappe située en amont (fig. 2). Suivant cette hypothèse, la solution du problème donne :

$$l_k = \frac{1}{2q} - \frac{q}{2} \quad (6)$$

et :

$$x = \frac{1-y^2}{2q}$$

Il apparaît que l'approximation de L par la formule de Kozeny :

$$l = \frac{1}{2q} - \frac{q}{2} + \cotg \alpha_1 \pi$$

est meilleure que celle de Dupuit, mais elle reste seulement valable lorsque q est petit et  $\alpha_1 \pi$  assez grand.

Par contre, la formule approchée de Casagrande [6] :

$$l \approx \frac{1}{2q} - \frac{q}{2} + \cotg \alpha_1 \pi - 0,3 \cotg \alpha_1 \pi$$

est valable pour de petits angles.

**Contribution de P. Guével**

Dans sa thèse, P. Guével [7] donne une excellente étude critique de la solution obtenue analytiquement par Falkovich, qui est valable tant que la surface libre présente un point d'inflexion.

P. Guével étudie en détail l'écoulement correspondant au cas limite du point d'inflexion atteignant la face amont du massif filtrant.

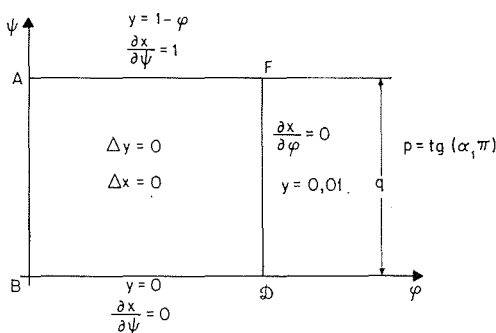
Par utilisation de l'hodographe, l'auteur obtient l'expression de la surface libre en coordonnées paramétriques et la valeur du coefficient de débit q pour l'écoulement limite.

P. Guével signale aussi les résultats qu'il a obtenu à l'aide d'un réseau à résistance dans l'étude des écoulements à travers des massifs dont la paroi amont est soit verticale, soit inclinée à 45°.

**Solution directe du problème par la méthode des différences finies**

Comme le problème fait intervenir une surface libre, on est amené à le résoudre dans le plan  $\omega = \varphi + i\Psi$ , où il se trouve complètement défini. Ainsi, on a admis comme fonctions inconnues  $y = y(\varphi, \Psi)$  et  $x = x(\varphi, \Psi)$  et comme variables indépendantes  $\varphi$  et  $\Psi$ . En utilisant les grandeurs réduites :

$$y = \frac{Y}{H} \quad x = \frac{X}{H} \quad \varphi = \frac{\varphi - KH}{KH} \quad \psi = \frac{\Psi}{KH}$$



on obtient finalement la figure 3 où sont indiquées les conditions aux limites correspondantes :

A l'aval au lieu de  $y = 0$  (théorique) nous admettons une hauteur de filtre  $y = 0,01$ , cas qui correspond le plus fréquemment à la réalité. Si on examine la formule de Dupuit qui constitue le cas limite du problème, on constate que pour  $h = 0,01$  on a très sensiblement :

$$\frac{1 - h^2}{2q} \approx \frac{1}{2q}$$

Donc, il ne doit pas y avoir une grande différence entre les résultats obtenus avec  $y = 0$  et ceux obtenus avec  $y = 0,01$ .

Le problème est résolu d'abord pour la fonction y. Ensuite, on calcule les valeurs de x sur la frontière (AB) par la formule  $x = (1/P) \cdot y$  et on résout le problème pour la fonction x. La valeur de x au point D nous donne la valeur de L cherchée :

$$L = x_D$$

En remplaçant les dérivées par leur expression en termes de différences finies suivant les formules :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_{i,j} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - 2u_{i,j}}{a^2} + 0(a^4)$$

$$a \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2} + 0(a^4)$$

(a étant le pas des différences finies), on obtient un système linéaire dont les inconnues sont les  $x_{i,j}$  et  $y_{i,j}$ .

On a résolu le système obtenu par des méthodes itératives de convergence rapide en particulier par la méthode itérative de Young-Frankel dite méthode de surrelaxation.

Dans le tableau 1, nous avons comparé les résultats donnés par la formule (4) et ceux obtenus par le calcul lorsque  $\alpha_1 \pi = 90^\circ$ .

**Tableau 1**

q	$L_j = \frac{1}{2q} - \frac{q}{6}$	l (calcul)	ECART $\frac{l - l_i}{l} \%$
0,50	0,917	0,918	+ 0,11
0,33	1,460	1,464	+ 0,27
0,25	1,958	1,953	- 0,25
0,20	2,467	2,469	+ 0,08

Comme on peut le remarquer, les écarts sont tout à fait négligeables. Ainsi, on a vérifié par le calcul numérique la validité de la formule approchée (4). Par le même procédé, on a pu aussi vérifier que la longueur du filtre est égale approximativement à  $L_1 = (q/2)$ , résultat déjà proposé par Kozeny.

En utilisant la grande souplesse du programme de calcul numérique, nous avons pu exécuter une étude systématique du problème pour des angles  $\alpha_1 \pi$  variant de 20° à 90° et nous avons tracé des aba-

Tableau 2

$\alpha_1\pi$	DÉBIT $q$	LARGEUR $l$	$l - \Delta l = l_v$	$\frac{1}{2q}$	$l_v - \frac{1}{2q}$	$\frac{q}{6}$	$\delta = l_v - \frac{1}{2q} + \frac{q}{6}$
90° $\delta_{\text{moy}} = 0$	0,50	0,918	0,918	1	-0,082	0,083	0,001
	0,33	1,464	1,464	1,5	-0,036	0,055	+ 0,019
	0,25	1,953	1,953	2	-0,047	0,041	- 0,006
	0,20	2,469	2,469	2,5	-0,031	0,033	0,002
70° $\delta_{\text{moy}} = 0,015$	0,71	0,780	0,598	0,704	-0,106	0,118	0,012
	0,68	0,815	0,632	0,735	-0,103	0,113	0,010
	0,41	1,356	1,174	1,220	-0,046	0,068	0,024
	0,28	1,945	1,753	1,785	-0,032	0,0466	0,014
	0,18	2,955	2,763	2,780	-0,017	0,030	0,013
60° $\delta_{\text{moy}} = 0,050$	0,62	1,037	0,749	0,806	-0,057	0,103	0,046
	0,50	1,259	0,971	1,	-0,029	0,083	0,054
	0,35	1,724	1,436	1,430	+ 0,006	0,058	0,064
	0,20	2,788	2,500	2,500	0	0,033	0,033
50° $\delta_{\text{moy}} = 0,120$	0,62	1,229	0,810	0,806	0,004	0,103	0,107
	0,45	1,577	1,158	1,11	0,048	0,075	0,123
	0,39	1,766	1,347	1,281	0,066	0,065	0,131
	0,33	2,013	1,594	1,515	0,079	0,055	0,134
	0,22	2,762	2,343	2,272	0,071	0,038	0,109
40° $\delta_{\text{moy}} = 0,258$	0,40	2,025	1,429	1,25	0,179	0,066	0,245
	0,28	2,597	2,001	1,785	0,216	0,0466	0,263
	0,18	3,613	3,017	2,78	0,237	0,030	0,267
30° $\delta_{\text{moy}} = 0,460$	0,40	2,507	1,641	1,25	0,391	0,066	0,457
	0,24	3,392	2,526	2,08	0,446	0,040	0,486
	0,17	4,126	3,350	2,94	0,41	0,028	0,438
20° $\delta_{\text{moy}} = 0,945$	0,35	3,669	2,294	1,43	0,864	0,058	0,922
	0,25	4,280	2,905	2	0,905	0,041	0,946
	0,18	5,093	3,718	2,780	0,938	0,030	0,968

ques. Les valeurs calculées sont portées sur le tableau 2. Elles ont permis le tracé de l'abaque de la planche 4.

Dans le cas d'une digue à parement vertical, on obtient une bonne approximation de la surface libre en utilisant la parabole de Koseny translatée vers l'aval, de façon à respecter la longueur exacte de la digue :

$$l \approx \frac{1}{2q} - \frac{q}{6}$$

et non pas la longueur donnée par la formule de Koseny :

$$l \approx \frac{1}{2q} - \frac{q}{2}$$

(cf. planche 5).

Nous pensons que les résultats obtenus par le calcul aux différences finies sont assez précis et que les abaques tracés (\*) permettront aisément une bonne estimation des éléments nécessaires d'un projet. Si on demande une meilleure précision, il faut choisir entre le calcul des intégrales (2) et (3) et le calcul direct. Bien que le calcul direct soit stable, (il donne une bonne précision même pour un pas  $a$  assez grand de l'ordre de  $a = 0,1$ ), le calcul

des intégrales a le grand avantage d'un petit temps de calcul à l'ordinateur. Pourtant le calcul direct devient par contre plus précis dans le cas où la hauteur du filtre à l'aval n'est pas tout à fait négligeable.

**Formule approchée  
pour le calcul de la largeur  
de la digue**

Un critère économique important est le volume du massif.

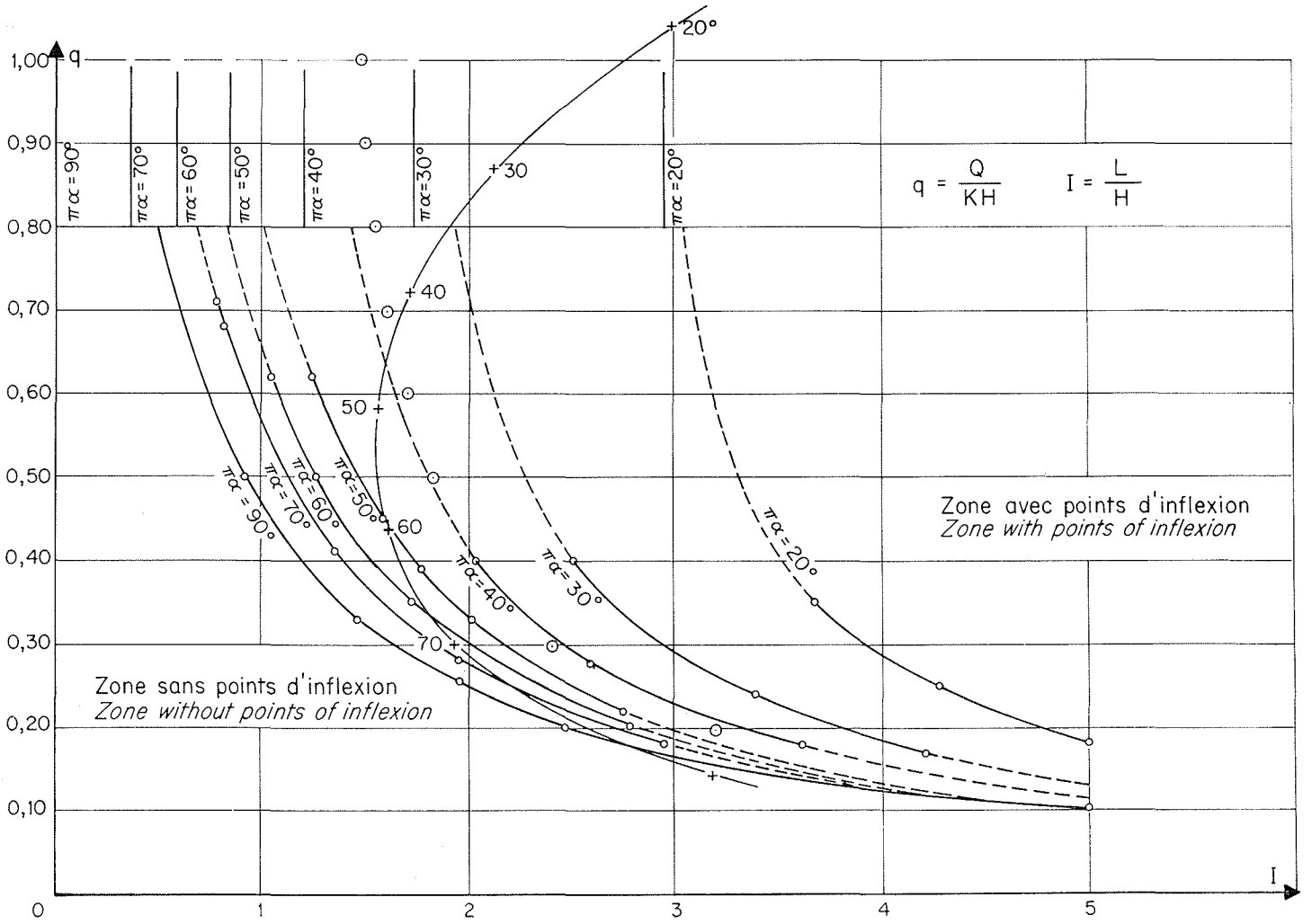
Lorsque le parement amont est fixé, on peut donc se demander quelle est, du parement aval vertical ou du parement incliné, la solution qui conduit au moindre volume.

Dans ce but, nous avons remplacé la largeur réelle du barrage à parement incliné par celle d'un barrage à parement amont vertical, présentant le même volume.

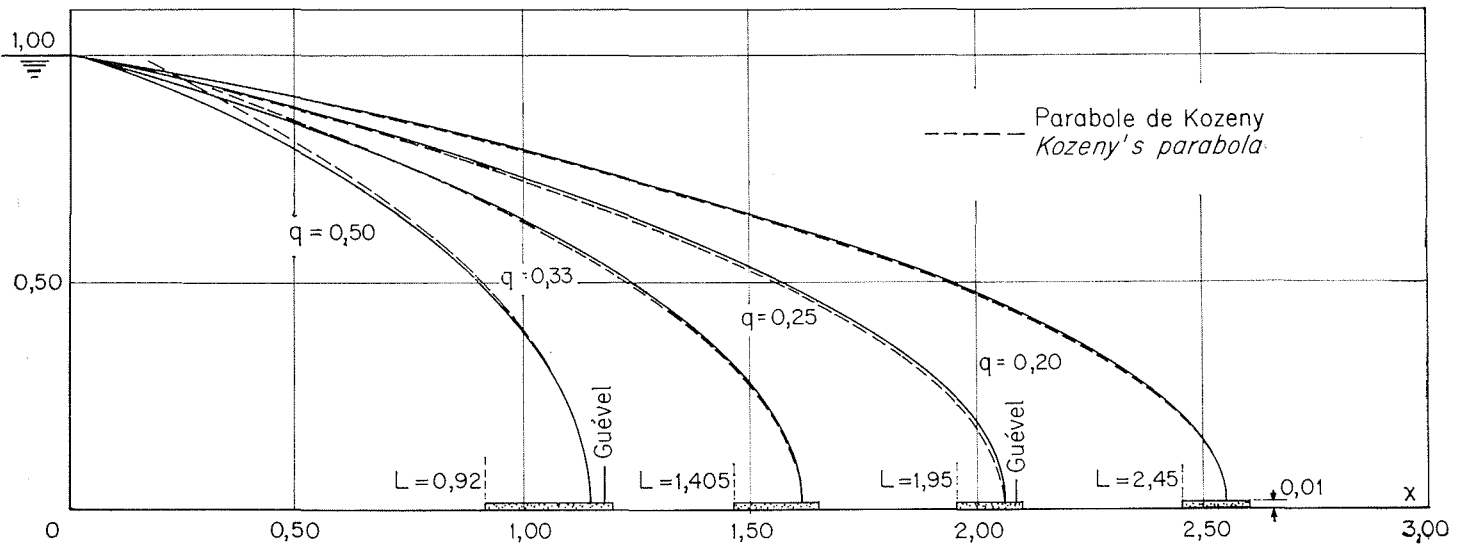
D'après la planche 6, on remarque qu'on peut remplacer la partie gauche du barrage par une autre, ayant un parement amont vertical situé à :

$$\Delta l = \frac{1}{2} \cotg(\alpha_1\pi) \tag{7}$$

(\*) En annexe les planches 13 à 18 présentent les surfaces libres obtenues pour différentes inclinaisons du parement amont et quelques valeurs du débit.



4/ Dignes avec un filtre horizontal à l'aval :  
 Dykes with a horizontal filter on their downstream side:  
 $q = Q/KH$     $I = L/H$ .



5/ Digue avec filtre horizontal à l'aval :  
 Dyke with a horizontal filter on its downstream side:  
 $\alpha = 90^\circ$     $q = Q/KH$ .

de son extrémité, de façon que le volume ne soit pas modifié.

La largeur  $l_1$  du filtre — ayant une largeur  $h'$  très petite — peut être calculée très approximativement par la formule :

$$l_1 \approx \frac{q}{2} - h' \quad (8)$$

Cette largeur ne dépend pas de manière sensible de l'inclinaison du parement aval.

Si on désigne par  $l_v$  la largeur correspondant à la digue à parement amont vertical, on sait que :

$$l_v = \frac{1}{2q} - \frac{q}{6} \quad (9)$$

et :

$$l_v = \frac{1}{2q} - \frac{q}{6} + \left( \frac{q}{2} - h' \right) \quad (10)$$

D'après la figure 6 :

$$l' = \Delta l + l_v + \delta$$

et donc :

$$l = \Delta l + l_v + \delta \quad (11)$$

On remarque, d'après le tableau 2, que  $\delta$  varie très peu avec le débit. On peut donc évaluer une valeur moyenne de  $\delta$  et chercher une représentation approchée de la fonction  $\delta(\alpha_1\pi)$ .

La représentation graphique de  $\delta$  en fonction de  $x = \cotg(\alpha_1\pi)$  nous incite à chercher une corrélation de la forme :

$$\left( \frac{\delta}{x} \right)^2 = y = cx + b$$

Pour déterminer les coefficients inconnus  $c$  et  $b$ , nous avons utilisé la méthode des moindres carrés.

Les données sont indiquées sur le tableau 3.

Tableau 3

$n$	1	2	3	4	5	6
$\alpha_1\pi$	70°	60°	50°	40°	30°	20°
$x$	0,364	0,577	0,839	1,192	1,732	2,747
$\delta_{\text{moyen}}$	0,015	0,050	0,120	0,258	0,460	0,945
$y$	0,017	0,0075	0,0205	0,0468	0,0707	0,1185
$\delta = 0,224 x \sqrt{x - 0,36}$	0,012	0,060	0,130	0,244	0,454	0,951

On obtient le système :

$$c \sum_1^6 x_i^2 + b \sum_1^6 x_i = \sum_1^6 y_i x_i$$

$$c \sum_1^6 x_i + 6 b = \sum_1^6 y_i$$

Finalement, on trouve :

$$c \approx 0,050 \quad b \approx 0,018$$

et :

$$\delta = 0,224 x \sqrt{x - 0,36}$$

ou :

$$\delta \approx 0,224 \cotg \alpha_1\pi \sqrt{\cotg \alpha_1\pi - 0,36} \quad (13)$$

La planche 7 montre l'écart entre les deux courbes représentant  $\delta$  moyen déduit des essais numériques et  $\delta$  obtenu par la formule (13).

Ainsi, nous obtenons une formule qui nous donne avec une très bonne approximation la largeur du massif : la formule (13) n'est évidemment valable que pour  $\alpha_1\pi < 70^\circ$ . De toute façon, pour  $70^\circ < \alpha_1\pi < 90^\circ$ , la grandeur de  $\delta$  est négligeable devant la largeur du barrage.

$$l \approx \frac{1}{2q} - \frac{q}{6} + \frac{1}{2} \cotg \alpha_1\pi + 0,224 \cotg \alpha_1\pi \sqrt{\cotg \alpha_1\pi - 0,36} \quad (14)$$

$$l \approx \frac{1}{2q} - \frac{q}{6} + 0,5 \cotg \alpha_1\pi [1 + 0,45 \sqrt{\cotg \alpha_1\pi - 0,36}]$$

### Etude du volume optimal lorsque l'inclinaison du parapet amont est imposée par le projet

D'après les graphiques des surfaces libres tracées, on peut remarquer qu'en aval, elles coïncident très approximativement avec la parabole de Kozeny, dont le sommet est pris comme origine des axes  $Ox$ ,  $Oy$  et d'équation :

$$x = -\frac{y^2}{2q} \quad (15)$$

L'assimilation de la surface libre avec une parabole, courbe aux nombreuses propriétés géométriques simples, va permettre une évaluation simple du volume du barrage.

Pour toute inclinaison  $\alpha_2\pi$ , le volume du barrage minimal correspondra à la position extrême du parement aval tangent à la surface libre.

La droite GE tangente à la parabole au point de coordonnées  $(x, y)$  planche 8, a comme équation :

$$X - x = \frac{dx}{dy} (Y - y_0) = -\frac{y}{q} (Y - y)$$

$$X = AY + B$$

D'après la relation (15), on a :

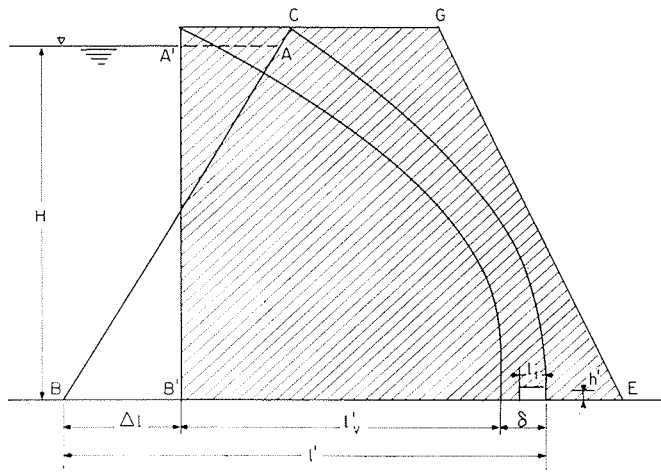
$$A = -\cotg \alpha_2\pi = -\frac{y}{q} \quad \text{et} \quad B = \frac{y^2}{2q}$$

d'où :

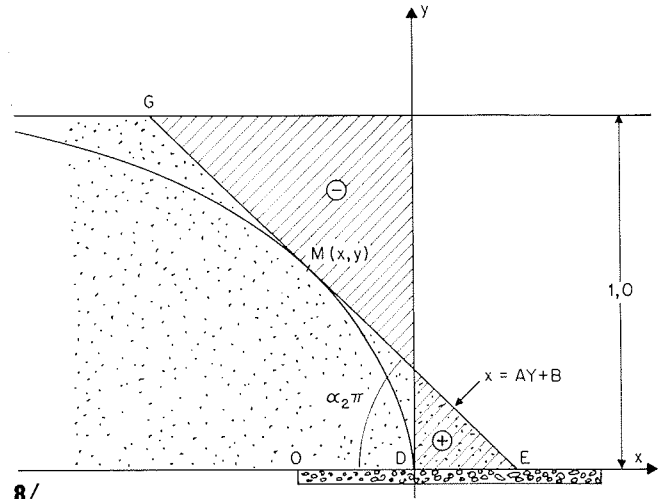
$$X = -\frac{y}{q} Y + \frac{y^2}{2q}$$

La différence du volume par rapport à la solution à parement aval vertical est :

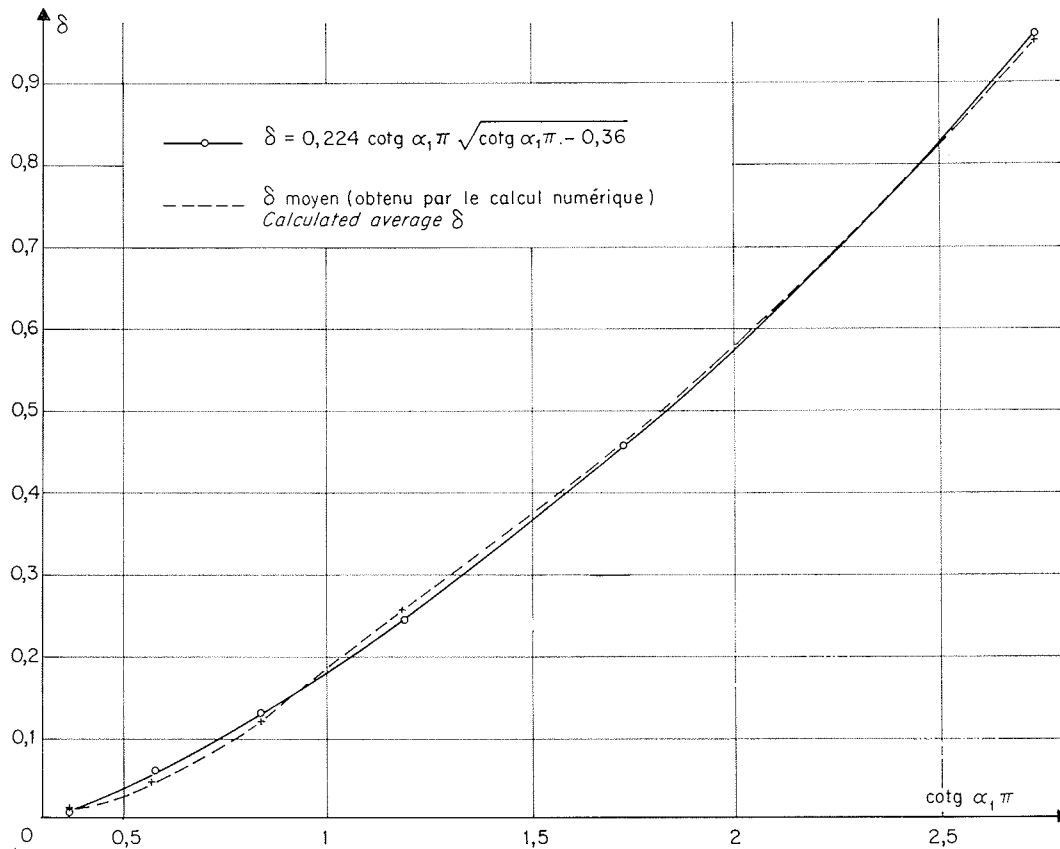
$$-\Delta\Omega = -\int_0^1 X dY = \frac{y}{2q} - \frac{y^2}{2q} = \frac{y(1-y)}{2q} \quad (16)$$



6/



8/



7/ Valeur de  $\delta$  en fonction de  $\cotg \alpha_1 \pi$  /  $\delta$  versus  $\cot \alpha_1 \pi$ .

Elle devient maximale pour  $y = 1/2$ , ou :

$$\cotg \alpha_2 \pi = \frac{1}{2q} \quad (17)$$

La relation (17) détermine la pente du parement aval, la plus économique lorsque l'inclinaison du parement amont est déjà fixée.

Le gain sur le volume du massif par rapport à la solution du parement aval vertical est alors

$$|\Delta\Omega| = \frac{1}{8q}$$

Ainsi donc, le parement aval doit être d'autant plus incliné que l'on désire réduire les pertes d'eau.

### Etude du volume global optimal dans le cas des barrages à parements symétriques

La relation (16) peut encore s'écrire sous la forme :

$$-\Delta\Omega = \frac{\cotg \alpha_2 \pi [1 - q \cotg \alpha_2 \pi]}{2} \quad (18)$$

En désignant par  $\Omega$  le volume total, et par  $\Omega_v$  le volume du barrage équivalent, ayant des parements verticaux, on obtient :

$$\Omega = \Omega_v + \delta(\alpha_1, \pi) - \frac{\cotg \alpha_2 \pi [1 - q \cotg \alpha_2 \pi]}{2}$$

Avec l'hypothèse  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$  le problème se ramène à chercher le minimum de la fonction :

$$f(\alpha) = \delta(\alpha\pi) - \frac{\cotg \alpha\pi [1 - q \cotg \alpha\pi]}{2}$$

ou en utilisant le symbole  $x = \cotg \alpha\pi$  :

$$f(x) = \delta(x) - \frac{x(1 - qx)}{2}$$

Pour trouver le minimum, il suffit en principe de chercher les racines de l'équation dérivée :

$$\frac{df(x)}{dx}$$

Mais ici, se pose un problème :  $\delta(x)$  n'est donné que de manière empirique et, dans ce cas, l'opération de dérivation est très délicate. Pour améliorer la précision, on a utilisé la dérivée logarithmique. On a :

$$\frac{d\delta}{\delta} = K \frac{dx}{x} \quad (19)$$

d'où :

$$K = \frac{d \text{Log } \delta}{d \text{Log } x}$$

On a porté sur un graphique les valeurs de  $\text{Log } \delta$  et  $\text{Log } x$ , et on a calculé  $K$  graphiquement.

Finalement on obtient :

$$q_{\text{optimal}} = \frac{1}{2x} \left( 1 - \frac{2K}{x} \delta \right) \quad (20)$$

Nous avons reproduit la relation (20) sur la planche 9, qui nous fournit pour chaque valeur de  $q$  la valeur de l'angle  $\alpha\pi$  optimal. Sur ce graphique, est aussi représentée la condition  $q(\alpha\pi)$  rendant minimal le volume de la partie aval du barrage, dans les cas où le parement amont est fixé.

Cette dernière courbe représentative  $q(\alpha\pi)$  est d'ailleurs la courbe asymptote du lieu  $q(\alpha\pi)$  traduisant la condition de volume global minimal. Car lorsque  $\alpha\pi$  tend vers  $90^\circ$ ,  $\delta$  devient négligeable. L'évaluation de gain de volume obtenue en choisissant l'inclinaison optimale plutôt que la solution à parements verticaux sera facilitée par l'utilisation de l'abaque de la planche 10.

### Construction de la surface libre par interpolation

Enfin, en marge des considérations économiques précédentes, nous voudrions ajouter une remarque sur la détermination rapide et approchée des surfaces libres.

En effet, le nombre des cas étudiés numériquement n'est pas très grand, et il sera généralement impossible de déterminer la surface libre afférente à un projet par coïncidence avec une des surfaces libres déjà tracées.

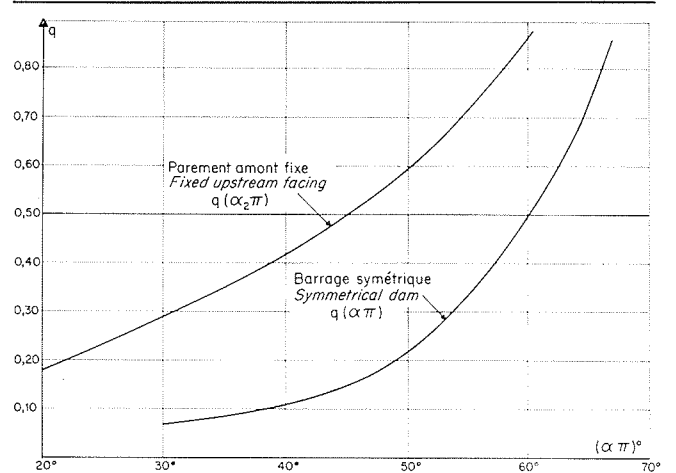
Mais nous avons vérifié que nous pouvions, avec une excellente approximation, utiliser l'interpolation non point globale, mais fractionnée.

Dans la partie aval, la surface libre dépend uniquement du débit et présente d'ailleurs la forme d'une parabole indépendante de l'angle du parement amont.

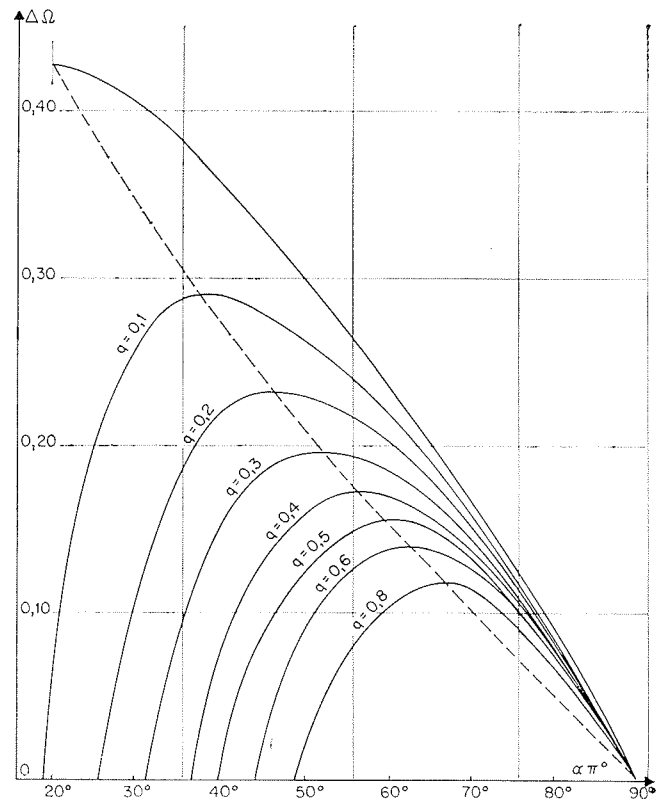
Après translation qui donne même sommet à plusieurs lignes d'eau correspondant à plusieurs débits, on peut, par interpolation graphique, obtenir rapidement les courbes afférentes aux débits intermédiaires. La planche 11 présente un exemple de ce type d'interpolation pour  $\alpha\pi = 60^\circ$ .

Ensuite, on cale l'extrémité de la partie aval de la ligne d'eau, au point ayant pour abscisse la largeur donnée par la formule (14).

Reste enfin la détermination de la partie amont de



9/ Condition optimale de volume :  
Optimum volume condition:  
 $q = f(\alpha\pi)$ .



10/ Gain optimal de volume :  
Optimum volume gain:  
 $(\Delta\Omega) = f(q, \alpha\pi)$ .



la ligne d'eau, qui sera effectuée par interpolation à partir du faisceau de courbes ayant même origine.

**Exemple concret**

Soit à étudier le projet d'un barrage en terre avec enrochements dont la base, consolidée par des injections de ciments, peut être considérée comme imperméable. Les caractéristiques du barrage sont les suivantes :

- $K_1 = 1\ 000$  m/j. . . perméabilité des roches;
- $K = 0,0043$  m/j. . . perméabilité du noyau;

- $H = 25$  m. . . hauteur de la retenue moyenne;
- $\Delta = 150$  m. . . longueur du barrage;
- $R = 2\ 000$  m<sup>3</sup>. . . pertes d'eau annuelles admises par infiltration.

Etant donné que  $K_1/K \gg 100$ , les pertes de charge à travers les roches sont tout à fait négligeables et l'étude des infiltrations va porter uniquement sur le massif du noyau imperméable. La stabilité du barrage étant assurée par les enrochements, on va chercher la section la plus économique du noyau. Ainsi, afin d'éviter le suintement à son parement aval, on va construire un tapis filtrant ayant une hauteur de 25 cm au-dessus de la base.

On a :

$$Q = \frac{R}{\Delta \cdot 365} = \frac{2\ 000}{150 \times 365} = 0,0365 \text{ m}^3/\text{j}$$

par unité de longueur.

Donc.

$$q = \frac{Q}{KH} = \frac{0,0365}{0,0043 \times 25} = 0,338$$

D'après le graphique (planche 9) on trouve que pour  $q = 0,338$  l'angle optimal est  $\alpha\pi = 55^\circ$  pour un noyau à parements symétriques. En appliquant la formule (14), on calcule la largeur :

$$l = \frac{1}{2} \cotg 55^\circ + \frac{1}{2q} - \frac{q}{6} + 0,0224 \cotg 55^\circ \sqrt{\cotg 55^\circ - 0,36} = 1,864$$

d'où :

$$L = l \cdot H = 1,864 \times 25 = 46,6 \text{ m}$$

Pour calculer la longueur du filtre nécessaire, on applique la formule (8) :

ici :

$$h' = \frac{0,25}{25} = 0,01$$

et :

$$l_1 \approx \frac{q}{2} - h' = 0,169 - 0,01 = 0,159$$

d'où :

$$L_1 = l_1 H = 0,159 \times 25 = 3,975 \text{ m}$$

D'après les propriétés des tangentes à la parabole, l'extrémité du parement aval se situe à une distance  $l_{DE}$  du début du filtre, égale en valeur absolue à l'abscisse  $x = (y^2/2q)$  du point M de tangence, donc si :

$$y = q \cotg \alpha\pi$$

$$l_{DE} = \frac{q \cotg^2(\alpha\pi)}{2} = \frac{0,338 \times 0,7^2}{2} = 0,083$$

et :

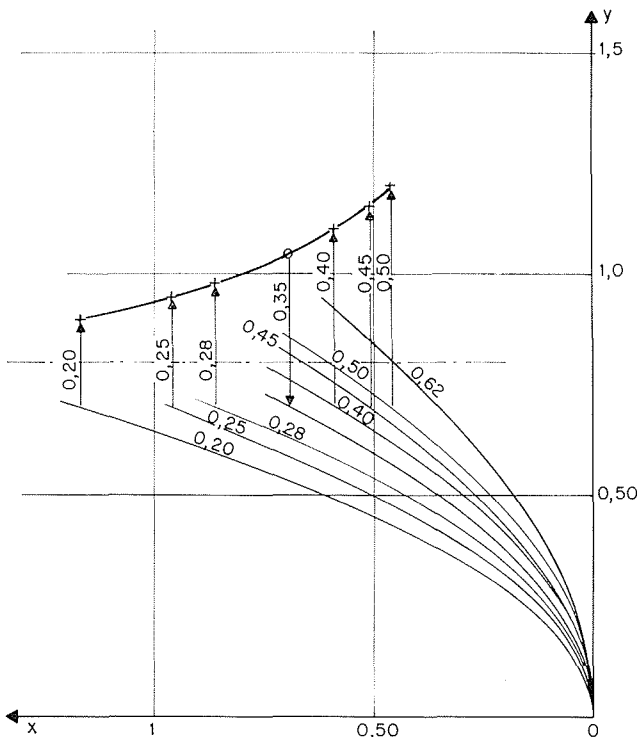
$$L_{DE} = 0,083 \times 25 = 2,070 \text{ m}$$

d'où :

$$L_{(base)} = 46,6 + 3,975 + 2,07 \approx 52,65 \text{ m}$$

Les valeurs calculées doivent finalement être augmentées suivant le taux de sécurité admis.

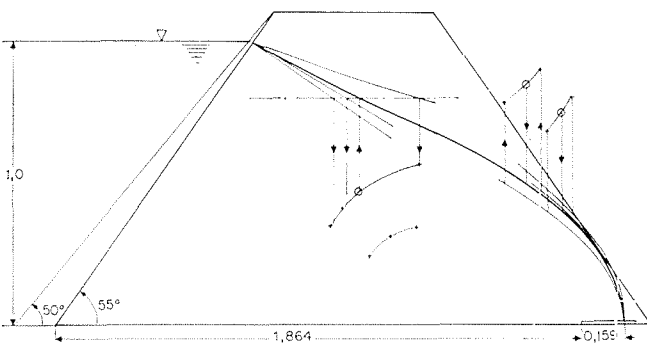
La construction par interpolation de la surface libre est donnée par la planche 12.



**11/ Détermination de la surface libre à l'aval du barrage. Exemple d'interpolation graphique :**

*Determination of free surface downstream from the dam. Graphical interpolation example:*

$\alpha\pi = 60^\circ$ .



**12/ Tracé de la surface libre par la méthode de l'interpolation :**

*Plotting the free surface by the interpolation method:*

$(\alpha\pi)^\circ = 55^\circ$ .

**Conclusion**

La résolution numérique à l'aide de formalismes aux différences finies a permis d'établir avec suffisamment de précision, quelques monographies d'écoulement à travers des barrages munis de filtre. Mais là n'est pas, à notre avis, l'essentiel des résultats. Il est, bien sûr, très intéressant d'avoir à sa disposition un programme de calcul automatique sur ordinateur qui permette d'obtenir rapidement les caractéristiques d'un projet. Mais il s'agit d'une vue fragmentaire du problème, d'un coup de sonde, qui ne donne pas d'indication sur l'influence de la variation des paramètres. L'avantage de l'étude systématique, même portant sur un nombre réduit de cas, a été de permettre, par interpolation, la généralisation des résultats obtenus (bien sûr, seulement dans la plage explorée de variation des paramètres). Ainsi, on atteint une vision synthétique que seul le calcul analytique peut donner habituellement.

L'imprécision indélébile liée à la détermination des facteurs essentiels tels que le coefficient de perméabilité K ou la tolérance de perte d'eau annuelle permet d'affirmer que le plus souvent l'étude d'un projet à partir des formules ou abaques proposés est largement satisfaisante.

Ainsi, paradoxalement, l'utilisation onéreuse et complexe d'un ordinateur permet de proposer des procédés de calcul simples et à bon marché pour l'évaluation de la longueur d'un barrage et de l'inclinaison de ses parements.

**Bibliographie**

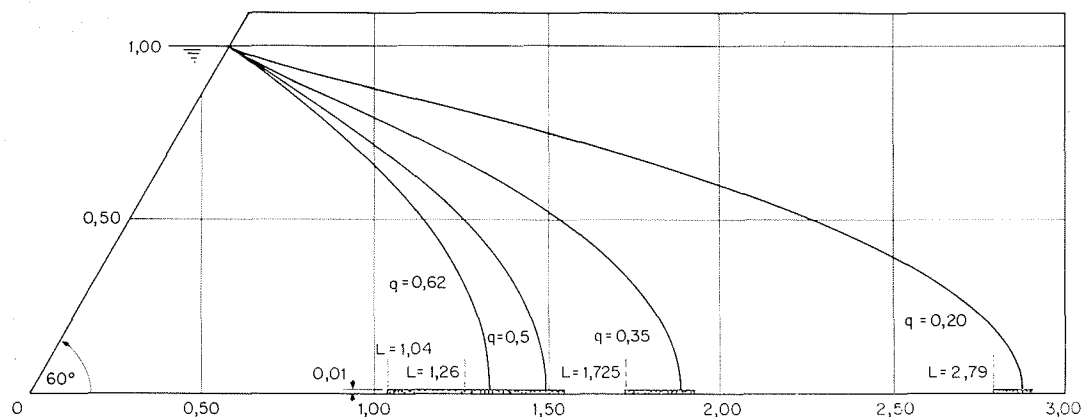
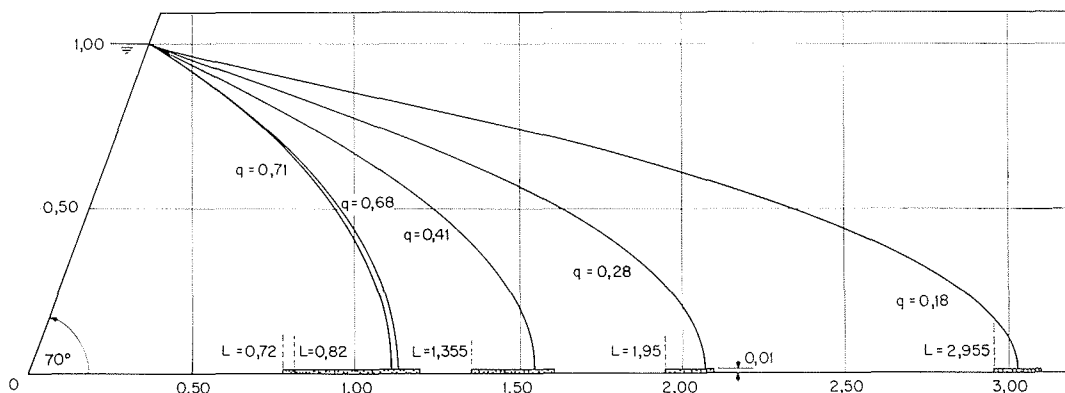
- [1] Dr NÉMETH ENDRE. — Hydromechanika, *Tankönyukido*, Budapest (1963), pp. 551-580.
- [2] J. EFTHIMIATOS. — Contribution à l'étude des infiltrations à travers les digues et barrages en terre. Thèse. Toulouse, juin 1965.
- [3] P. POLUBARINOVA-KOCHINA. — Theory of ground water movement. *Princeton University Press*, pp. 17-26.
- [4] S. NUMEROV. — Solution of problem of seepage without evaporation or infiltration of water from free surface, *P.M.M.*, vol. 6, 1942.
- [5] P. SHANKIN. — Computations for seepage through earth dams. *Rechizdat*, Moscow, 1945.
- [6] A. CASAGRANDE. — Seepage through dams. *Journal of New England water works Association*, June 1937.
- [7] P. GUÉVEL. — Contribution à l'étude théorique des écoulements d'infiltration. Thèse, Toulouse, octobre 1964.

**ANNEXE**

**13/** Digue avec filtre horizontal à l'aval.

*Dyke with a horizontal filter on its downstream side.*

$\pi\alpha = 70^\circ \quad q = Q/KH$



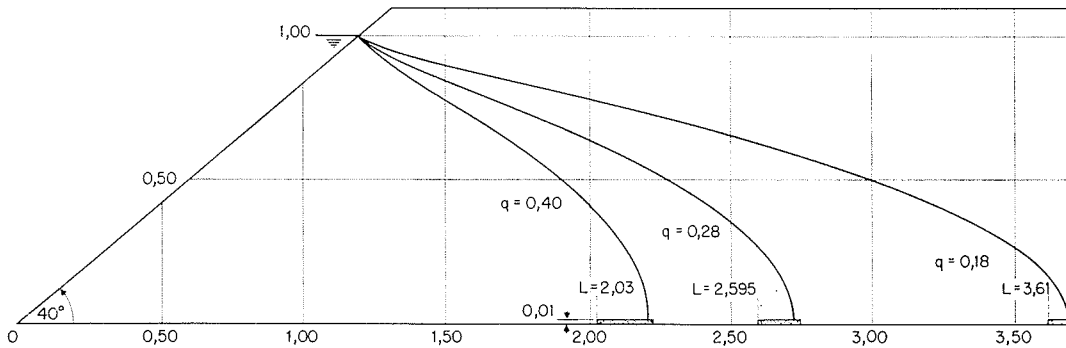
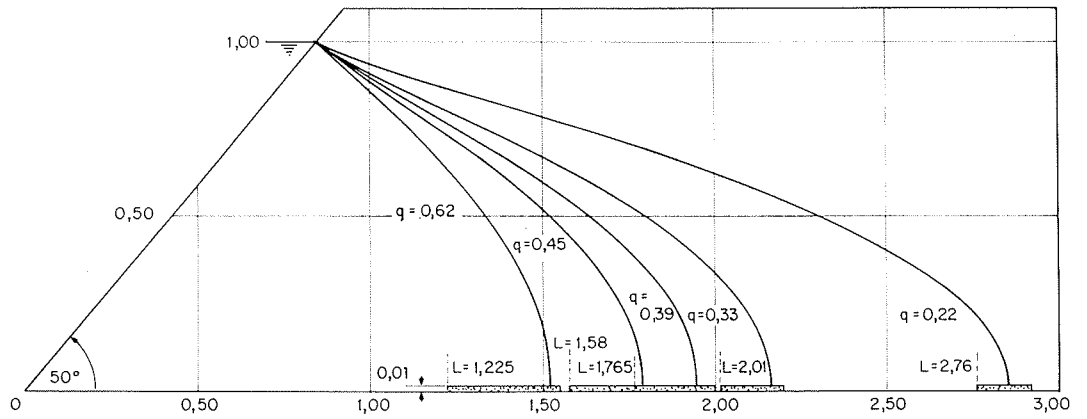
**14/** Digue avec filtre horizontal à l'aval.

*Dyke with a horizontal filter on its downstream side.*

$\pi\alpha = 60^\circ \quad q = Q/KH$

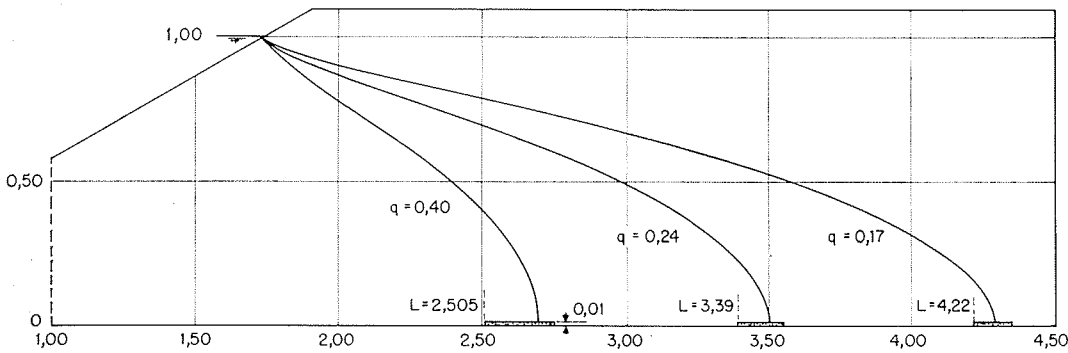
**15/** Digue avec filtre horizontal à l'aval.  
 Dyke with a horizontal filter on its downstream side.

$\pi\alpha = 50^\circ \quad q = Q/KH$



**16/** Digue avec filtre horizontal à l'aval.  
 Dyke with a horizontal filter on its downstream side.

$\pi\alpha = 40^\circ \quad q = Q/KH$

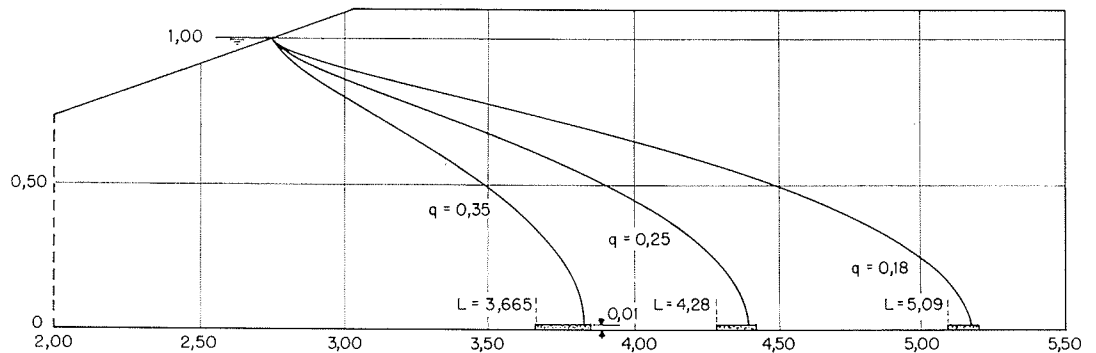


**17/** Digue avec filtre horizontal à l'aval.  
 Dyke with a horizontal filter on its downstream side.

$\pi\alpha = 30^\circ \quad q = Q/KH$

**18/** Digue avec filtre horizontal à l'aval.  
 Dyke with a horizontal filter on its downstream side.

$\pi\alpha = 20^\circ \quad q = Q/KH$



## Abstract

## Technical and economic considerations on dams with pervious blankets

by C. Thirriot \* and J. Efthimiatos \*\*

The article discusses the very common hydraulics problem of seepage through a homogeneous isotropic dam standing on an impervious sub-stratum and with a pervious blanket on its downstream side (Fig. 1), which enables both dam volume and seepage pressure to be reduced [2].

The characteristic non-dimensional parameters involved are the following :

$$l = \frac{L}{H} = \frac{\text{Dam width}}{\text{Upstream head of water}}$$

$$\alpha = \text{Upstream facing angle}$$

$$q = \frac{Q}{KH} = \text{Non-dimensional discharge.}$$

With the potential function  $\phi$  or the stream function  $\psi$ , the steady flow equation is  $\Delta \phi = 0$  or  $\Delta \psi = 0$ . This elliptical-type problem is made more complicated by the fact that the boundary conditions are of the composite type and that the position of the free surface region boundary is not known.

After a few approximations, Numerov gives the solution in the form of formulae (2) and (3). For  $\alpha = 90^\circ$ , formula (2) turns expression (4). Numerical calculation of these functions was accomplished by Shankin [5].

Kozeny considers flow towards a slit and obtains formula (6), which is a better approximation than Dupuit's formula.

Casagrande [6] has put forward a relationship applicable for small angles  $\alpha$ .

Guével [7] uses the hodograph method to find discharge and free surface expressions for the case where the latter features a point of inflexion just on the upstream face of the dam.

Numerical solution of the problem in the  $\omega = \phi + i\psi$  plane with the conventions of Figure 3 requires a successive approximation procedure, as the boundary condition  $x = l$  is unknown to begin with. The solution is first found for the function  $y$ , and then for the function  $x$  after calculation of the value of  $x$  on the boundary (AB).

By replacing the derivatives by standard interpolation formulae, one obtains a linear system, which one then solves by the Young-Frankel iteration method.

Table 1 compares the direct numerical calculation results with those given by formula (4).

Thanks to the remarkable flexibility of numerical calculation, it has been possible to accomplish a systematic study for angles varying from  $20^\circ$  to  $90^\circ$ . The results are listed in Table 2 and shown in Figures 4, and 13 to 18.

By considering instead of the real dam a hypothetical one of the same volume with a vertical facing, the authors found an approximation for the dam width from the numerical calculation data (see formulae (8) to (14)). for their economic dam volume study, they assumed the downstream free surface to be parabolic in shape (Kozeny's assumption), for which the optimum downstream slope is given by formula (17) and the gain in volume over a design with a vertical downstream facing is  $\Delta\Omega = 1/8q$ . For a symmetrical dam, the minimum volume condition defines the relationship between discharge and angle of inclination, as shown in Figure 9. Figure 10 makes evaluation of the gain in volume easier. An example (Fig. 11) shows how the free surface can be constructed by interpolation. The various formulae and graphs are applied to a practical case.

It is concluded that application of a systematic numerical study to a necessarily limited number of cases has enabled the results to be generalised by interpolation and simple quick "synthetic" formulae to be obtained.

\* Professeur s.c. à la Faculté des Sciences de Toulouse, Professeur à l'E.N.S.E.E.H.T.

\*\* Ingénieur de l'Université Technique d'Athènes, Ingénieur hydraulicien de l'Université de Toulouse, Docteur-ingénieur.