SIMULATION PAR MODÈLE MATHÉMATIQUE DES ÉCOULEMENTS SOUTERRAINS PERMANENTS ET TRANSITOIRES. APPLICATION A L'ÉTUDE DE L'EXPLOITATION DES NAPPES

PAR A. LAGARDE * ET M. LANCHON **

Présentation des modèles mathématiques

L'apparition des ordinateurs à grande capacité de mémoires et à grande rapidité permet désormais de mener à bien des calculs qu'il aurait été impossible d'envisager auparavant. C'est ainsi que dans l'étude des écoulements des nappes souterraines (d'huile ou d'eau), on a pu mettre au point des modèles mathématiques qui permettent d'analyser les différents phénomènes intervenant dans ces types d'écoulement. Etant donné la complexité des équations régissant ces phénomènes, on fait toujours analytiquement des approximations (homogénéité, symétries) qui fatalement faussent les résultats. Dans de nombreux cas, on utilise du matériel analogique, cuve rhéographique, réseau R.C. (ou analyseur électrique); cela permet de s'affranchir de ces approximations, mais la cuve ne résout que des problèmes de mouvement permanent et l'analyseur comporte certaines limitations de capacité. Il est évident que le calcul numérique offre une nouvelle dimension à l'étude des écoulements souterrains.

Principe des modèles.

On sait que l'équation aux dérivées partielles de l'écoulement d'un liquide en charge dans un milieu poreux peut s'écrire :

$$\operatorname{div} \left(\frac{hk}{\mu} \vec{\operatorname{grad}} P \right) = h\beta\omega \cdot \frac{\partial P}{\partial t}$$

où h : est la hauteur de la couche;
 k : la perméabilité (dimension L^2) du terrain;
 μ : la viscosité du fluide en écoulement;
 P : la pression motrice;
 ω : la porosité du milieu poreux;
 β : la compressibilité globale du milieu poreux (matrice + fluide).

Equation qui peut s'écrire aussi :

$$\operatorname{div} (T \vec{\operatorname{grad}} H) = S \frac{\partial H}{\partial t}$$

si l'on fait intervenir le niveau piézométrique H et les grandeurs $T = (hk\rho g/\mu)$ (transmissivité) et $S = h\omega\beta\rho g$ (coefficient d'emménagement).

Dans le cas des nappes libres, on sait que, moyennant certaines hypothèses, on arrive à une équation de la même forme pour la détermination de la cote de la surface libre :

$$\operatorname{div} (T \vec{\operatorname{grad}} H) = \varphi' \frac{\partial H}{\partial t}$$

où φ' est la porosité utile, grandeur à laquelle se réduit alors le coefficient d'emménagement.

Ces équations, associées aux conditions initiales et aux conditions aux limites propres à chaque cas, sont résolues par passage aux différences finies. Un réseau maillé rectangulaire est appliqué sur la nappe à étudier. A chaque point du maillage sont affectés un coefficient d'emménagement et un niveau piézométrique et à chaque maille une transmissivité. Une formule à deux points est utilisée pour exprimer les dérivées premières et une à trois points pour les dérivées secondes d'espace (*). Le

* Institut Français du Pétrole.

** Francorelab.

(*) On remarque que cette façon de discrétiser l'espace est identique à celle qui est réalisée sur les réseaux électriques.

temps est également discrétisé; pour chaque pas de temps, on écrit que la dérivée par rapport au temps est égale à la demi-somme des *divergences* au début et à la fin du pas de temps.

Le maillage est numéroté de droite à gauche et de bas en haut. S'il y a M points par ligne un point i est donc représenté comme suit :

Notons $T_x(i)$, la transmissivité d'une maille $(i, i+1)$, et $T_y(i)$, celle d'une maille $(i, i+M)$. En développant le premier membre de l'équation, il vient :

$$\text{div}(\vec{T} \text{ grad } H) = \frac{\partial T_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y} + T_x \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + T_y \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}$$

avec, en passant aux différences finies et en supposant que $\Delta_x = \Delta_y = \Delta$:

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} = \frac{T_x(i) - T_x(i-1)}{\Delta}$$

$$\frac{\partial T_y}{\partial y} = \frac{T_y(i) - T_y(i-M)}{\Delta}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{H(i+1) - H(i-1)}{2\Delta}$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{H(i+M) - H(i-M)}{2\Delta}$$

$$T_x = \frac{T_x(i-1) + T_x(i)}{2}$$

$$T_y = \frac{T_y(i-M) + T_y(i)}{2}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{H(i-1) - 2H(i) + H(i+1)}{2\Delta^2}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{H(i-M) - 2H(i) + H(i+M)}{2\Delta^2}$$

Il vient donc :

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{T} \text{ grad } H)_i &= \\ &= \frac{1}{\Delta^2} \left[\begin{aligned} &T_y(i-M) H(i-M) \\ &+ T_x(i-1) H(i-1) - [T_y(i-M) \\ &+ T_x(i-1) + T_x(i) + T_y(i)] H(i) \\ &+ T_x(i) H(i+1) + T_y(i) H(i+M) \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

En groupant dans le premier membre les termes inconnus et, dans le deuxième membre, les termes

connus, l'équation de diffusivité en un nœud du maillage prend alors la forme :

$$\begin{aligned} \Sigma (TH_{EN}) - \left[\Sigma T + \frac{2S\Delta^2}{\Delta t} \right] H_{CN} &= \\ &= \left[\Sigma T - \frac{2S\Delta^2}{\Delta t} \right] H_{CA} - \Sigma (TH_{EA}) + 2Q \end{aligned}$$

Σ : portant sur les quatre directions autour du point considéré;

H_{EN} : niveau piézométrique nouveau des nœuds extérieurs;

Δt : durée du pas de temps;

H_{CN} : niveau piézométrique nouveau du nœud considéré;

H_{CA} : niveau piézométrique ancien du nœud considéré;

H_{EA} : niveau piézométrique ancien des nœuds extérieurs;

Q : débit volumétrique s'il s'agit d'un nœud où il y a soutirage (ou injection).

On arrive à exprimer facilement des conditions aux frontières du type *flux imposé* ou *isopièze imposée*.

Enfin, on impose une carte des isopièzes initiales.

On voit donc qu'à chaque pas de temps on est amené à résoudre un système d'équations linéaires, avec, comme inconnues, les niveaux piézométriques.

Revue des modèles.

Nous disposons actuellement de plusieurs modèles basés sur le principe que nous venons d'exposer. Ils diffèrent entre eux par le nombre plus ou moins important de paramètres qu'ils peuvent faire intervenir et par le type d'écoulement auxquels ils s'appliquent. En fait, ils peuvent se ranger en plusieurs classes :

1° Les modèles bidimensionnels monophasiques.

A 3 000 ou 10 000 points permettant de faire intervenir des conditions ponctuelles de Neumann ou de Dirichlet aux frontières et évidemment aux puits. C'est sur le premier de ces modèles que nous traiterons l'exemple concret qui suivra.

Il faut situer à part un modèle de restitution automatique des perméabilités à partir des observations de pression (ou de niveau) et des mesures de débit sur les puits [5].

2° Les modèles bidimensionnels polyphasiques.

Ces modèles conçus en vue d'application pétrolière sont applicables aux problèmes de l'intrusion des eaux salées dans les nappes d'eau douce.

3° Les modèles tridimensionnels monophasiques [6].

Ces modèles permettent de représenter plusieurs couches et sont donc bien adaptés au problème général de l'étude des systèmes hydrologiques. Ils ont la même capacité que les modèles bidimensionnels.

Mise en œuvre des modèles.

La mise en œuvre des modèles mathématiques nécessite des informations de qualité et exige donc une synthèse et une critique préalables de tous les renseignements disponibles. Mais étant donné la discrétisation de la variable temps, elle oblige à un

lissage des historiques de production et étant donné la discrétisation des variables d'espace, le modèle ne délivre que la pression moyenne (ou niveau moyen) dans une maille de réseau. La mise en œuvre est donc assujettie au départ à un compromis entre la quantité d'information disponible et l'importance des calculs qui en résultent; de plus, d'autres précautions sont à prendre en ce qui concerne le choix des pas d'espace Δx et Δy (généralement $\Delta x = \Delta y = \Delta$) et du pas de temps. Il existe en effet une condition de stabilité du système aux différences finies de la forme $\alpha (\Delta t / \Delta^2) \leq \alpha$ où α est la diffusivité hydraulique, égale au rapport T/S de la transmissivité au coefficient d'emmagasinement. Enfin au moment de toute variation brusque des conditions de débit des puits ou des conditions aux limites, une limitation supplémentaire du pas de temps Δt est à prévoir. Pour toutes ces raisons, lissage d'historique, conditions de stabilité, le pas de temps Δt n'est jamais constant dans la simulation par modèles mathématiques; les contraintes imposées par les variations brusques des conditions sont cependant amorties par la mise à profit du pas de temps maximal permis durant les périodes de production à débit constant.

Application à un exemple concret

Schématisation du problème réel.

C'est vers l'utilisation optimale des eaux souterraines que tendent tous les efforts en matière d'hydrologie; en ce domaine la simulation par modèle mathématique peut être doublement utile : d'abord en aidant à la détermination des caractéristiques des nappes parallèlement à d'autres méthodes classiques, ensuite en permettant d'effectuer rapidement un choix entre diverses solutions possibles d'exploitation dont on ne peut *a priori* choisir la meilleure. Bien entendu l'utilisation de modèles aussi élaborés nécessite, comme nous l'avons déjà fait remarquer, des informations de qualité au départ; les résultats sont alors à la mesure de leurs très grandes possibilités.

Afin de simplifier notre démonstration, l'exemple que nous traitons a été idéalisé à partir d'un problème réel. Le cas qui est étudié pour une géométrie très simple, des conditions aux limites et des données parfaitement déterminées, est évidemment transposable aux cas réels qui peuvent se présenter de façon moins académique. Dans le plus simple des modèles à notre disposition, le modèle 1 000 nœuds bidimensionnel, nous avons donc inscrit une nappe alluviale du type captif de forme rectangulaire (dimensions $40 \times 25 \text{ km}^2$). Cette nappe est supposée alimentée à la face amont (soit à pression, soit à débit imposé), imperméable sur les faces latérales, et supposée se déverser, à pression constante prise comme pression de référence, dans une nappe ou dans un fleuve, ou encore dans la mer. Sur notre modèle, par raison de simplification, l'exploitation n'est prévue que par quatre puits, trois de soutirage, un d'injection (réalimentation artificielle), comme le montre le croquis représenté sur la figure 1.

1/ Modèle - 1 000 nœuds.
1 000-node model.

Détermination des caractéristiques de la nappe à partir du mouvement permanent (recherche des transmissivités).

La recherche des transmissivités par cette méthode suppose qu'avant exploitation la nappe peut être considérée comme étant en mouvement permanent, ou tout au moins en régime oscillatoire stabilisé, et que l'on possède une carte piézométrique relevée sur le terrain. Le problème consiste alors à ajuster une distribution de transmissivités qui redonne, par stimulation sur le modèle mathématique, la carte naturelle. Cet ajustement est identique dans son principe à ceux réalisés sur modèle potentiométrique (cuve rhéologique, papier conducteur).

L'avantage de la détermination des transmissivités à partir d'un état de la nappe qu'on peut considérer comme permanent est de pouvoir s'affranchir de la connaissance des coefficients d'emmagasinement; une restriction apparaît cependant : si l'on applique en effet la loi de Darcy à un tube de courant entre deux isopièzes H_1 et H_2 :

$$q = AK \frac{(H_1 - H_2)}{\Delta s}$$

on voit que H_1 , H_2 , Δs et A étant connus, la connaissance de K ne peut être atteinte que si le débit q est connu. Étendue à la nappe entière, cette restriction

2

Carte des transmissivités adoptées.
Assumed transmissiveness pattern.

2 bis/

Etat permanent de la nappe avec transmissivités exactes.
Steady aquifer state with exact transmissiveness values.

3

Carte des transmissivités approchées.
Approximate transmissiveness pattern.

3 bis

Etat permanent de la nappe avec transmissivités approchées.
Steady aquifer state with approximate transmissiveness values.

4/ Alimentation variable - 10^e année - Carte piézométrique au 1^{er} juin.

Variable inflows - 10th year - Pressure plot for 1st June.

6/ Alimentation variable : loi de variation du maximum d'écart de pression sur l'axe de symétrie du modèle en fonction de la distance à la limite amont (10^e année).

Variable inflow: maximum pressure difference on model axis of symmetry vs. distance from upstream boundary (tenth year).

5/ Alimentation variable - 10^e année - Carte piézométrique au 1^{er} décembre.

Variable inflows - 10th year - Pressure plot for 1st December.

6 bis/ Alimentation variable : variation dans le temps (10^e année) des pressions sur l'axe de symétrie du modèle et à différentes distances de la limite amont.

Pressure on the model symmetry axis at various distances from the upstream boundary during 10th year of variable inflows.

astreint à ce que le bilan hydrologique de la nappe soit bien connu, mais aussi à ce que les lignes de courant limites, constituant les frontières imperméables de la nappe et fixant la section de passage S , soient aussi bien déterminées.

Dans l'exemple que nous traitons, la schématisation du problème réel est complétée par le choix *a priori* des transmissivités de la nappe; notre démonstration s'en trouve simplifiée, car la carte piézométrique naturelle est alors fixée très exactement et donc la comparaison avec une autre carte calculée résultant d'une distribution de transmissivité différente de la réalité, en est facilitée. Sur la figure 2, nous avons représenté la carte des transmissivités adoptée. Inspirée de la réalité et constituée par mille couples de valeurs (longitudinalement ou transversalement) correspondant aux mille nœuds du modèle, elle nous a permis de déterminer la carte fictive et le débit circulant dans la nappe dans les conditions suivantes : hauteur de la nappe supposée constante, niveau piézométrique à l'aval égal à 0, niveau piézométrique à l'amont égal à 100. La carte piézométrique délivrée par le calculateur nous a ainsi fourni les hauteurs piézométriques en chaque nœud du modèle, valeurs à partir desquelles nous avons tracé, sur la figure 2 bis, les lignes isopièzes. C'est cette figure qui correspond à ce que l'on peut raisonnablement espérer avoir au mieux comme donnée de base dans la réalité, car cela suppose un quadrillage assez serré de la nappe avec des piézomètres.

Dans le cas que nous avons imaginé, où l'absence d'informations ne permet pas d'apprécier la zone de mauvaises transmissivités, la carte de transmissivités approchée que l'on peut par exemple essayer (fig. 3), conduit à une carte piézométrique (fig. 3 bis) nettement différente de la carte exacte. On s'aperçoit ainsi que l'adoption de transmissivités trop élevées dans la mauvaise partie de la nappe se répercute non seulement dans cette zone (où les isopièzes ne sont pas assez resserrées) mais partout ailleurs.

Une série de simulations est donc nécessaire dans la réalité pour converger vers la distribution probable des transmissivités, c'est-à-dire celle qui assure la meilleure concordance entre les hauteurs piézométriques réellement observées et les auteurs calculées sur le modèle mathématique avec cette distribution. L'utilisation des techniques numériques modernes accélère ce processus, assez lent sur modèles analogiques, et permet surtout de tenir compte d'un plus grand nombre de puits sans inconvénient supplémentaire.

Simulation avec conditions aux limites variables.

L'état de la nappe en mouvement permanent étant déterminé et les caractéristiques, transmissivités, débit d'alimentation, coefficients d'emmagasinement, connues, nous avons changé le type de conditions à la limite amont. Au lieu d'imposer $P = Cte$, moyennant quoi les débits élémentaires entrant à chaque nœud étaient déterminés automatiquement, ce sont ces débits que nous avons imposés ensuite, cela afin de pouvoir simuler les conditions d'alimentation variables dans le temps.

ALIMENTATION VARIABLE.

La simulation de cette alimentation variable à

l'amont a été faite sur une dizaine d'années avec une modulation annuelle des débits constante dans le temps et telle que le débit cumulé sur une année reste égal au débit du mouvement permanent. Cette modulation est figurée ci-dessous :

Pour la même condition de pression ($P = 0$) à la limite aval, et pour ces nouvelles conditions d'alimentation à l'amont, la nappe passe ainsi de l'état permanent initial à un état oscillatoire stabilisé par l'intermédiaire d'un transitoire.

Au bout de 1 an, 8 ans, 9 ans et tous les deux mois de 9 à 10 ans, des cartes de niveau piézométrique ont été sorties qui permettent de se rendre compte comment la nappe réagit et en particulier se stabilise.

On s'aperçoit ainsi qu'après 10 ans le régime est stabilisé; c'est ainsi que chaque année à la même saison la carte des isopièzes se retrouvera identique à elle-même, après avoir tout au cours de l'année évolué. Cette oscillation périodique de la carte des isopièzes est évidemment d'autant plus déphasée dans le temps de celle des débits que l'on s'éloigne de la limite amont, mais en même temps les écarts de pression de ce régime oscillatoire par rapport au régime permanent initial sont d'autant plus faibles. La solution obtenue n'est d'ailleurs que la généralisation des solutions analytiques développées dans les ouvrages d'hydrologie pour le cas d'un écoulement linéaire en milieu homogène. Parmi les nombreux résultats qu'on pourrait présenter, nous avons choisi :

a) Deux cartes d'isopièzes à six mois d'intervalle dans la nappe en régime stabilisé oscillatoire (fig. 4 et 5).

b) La loi de variation du maximum d'écart de pression sur l'axe de symétrie de la nappe au cours de la dixième année, en régime oscillatoire stabilisé (fig. 6).

d) L'évolution tout au long de la dixième année des pressions sur cet axe de symétrie (fig. 6 bis).

Remarques :

Le régime oscillatoire d'alimentation aurait pu être obtenu aussi bien en imposant au modèle numérique une condition de niveau variable dans le temps à la limite amont. Ce type de condition est généralement celui qui convient lorsque l'alimentation est due principalement à une rivière dont on connaît les niveaux ou lorsque, à la limite d'alimentation, la nappe est bien pourvue en piézomètres permettant de repérer les variations de niveau dans le temps.

Si l'exemple de détermination des transmissivités a été réalisé à partir d'un mouvement permanent de la nappe, il est bien évident que la connaissance du régime variable d'une nappe permet d'atteindre le même objectif.

7/ Vidange de la nappe. Carte des hauteurs piézométriques après 20 000 jours de vidange.

Emptying case. Pressure levels after emptying for 20,000 days.

VIDANGE DE LA NAPPE.

A titre de curiosité, au bout de dix ans d'alimentation à régime variable, et donc en régime oscillatoire stabilisé de la nappe, nous avons simulé la vidange de la nappe, simplement en gardant la condition $P = 0$ à la limite aval et en annulant le débit d'alimentation à la limite amont.

Là encore il est possible d'obtenir l'état des niveaux piézométriques à n'importe quel moment de l'histoire. Nous avons tracé une carte de niveaux piézométriques en fin de vidange (20 000 j après son commencement), et la loi de variation du débit de fuite à la limite aval (fig. 7 et 7 bis).

On observe qu'il faut attendre environ 500 j pour que le débit de fuite à l'aval obéisse à la loi exponentielle généralement admise.

7 bis/ Vidange de la nappe.
Emptying case.

8/ Evolution du débit de fuite de la nappe durant son exploitation.

Operational aquifer leakage curve.

9/ Evolution des pressions aux puits durant l'exploitation de la nappe.

Pressures at the wells during aquifer operation.

Simulation de l'exploitation de la nappe.

HISTORIQUE.

L'état initial de la nappe étant le mouvement permanent, déjà déterminé, cette exploitation de la nappe se compose de trois périodes :

- une période de dix ans où la nappe produit à un débit q inférieur à son débit Q d'alimentation;
- une période de cinq ans où la nappe produit à un débit q supérieur à son débit Q d'alimentation;
- une période de dix ans où la nappe, continuant à produire plus qu'elle n'est alimentée à l'amont, est réalimentée artificiellement, de manière à

10/ Etat initial de la nappe. Carte des isopièzes en mouvement permanent.
Initial aquifer state. Equal pressure lines in steady motion.

11/ Carte des isopièzes après 5 ans d'exploitation.
Equal pressure lines after 5 years' operation.

12/ Carte des isopièzes après 10 ans d'exploitation.
Equal pressure lines after 10 years' operation.

13/ Carte des isopièzes après 15 ans d'exploitation.
Equal pressure lines after 15 years' operation.

TAB. DE CORRESPONDANCE

0	= -8,000
1	= -4,000
2	= 0
3	= 4,000
4	= 8,000
5	= 12,000
6	= 16,000
7	= 20,000
8	= 24,000
9	= 28,000
10	= 32,000
11	= 36,000
12	= 40,000
13	= 44,000
14	= 48,000
15	= 52,000
16	= 56,000
17	= 60,000
18	= 64,000
19	= 68,000
20	= 72,000
21	= 76,000
22	= 80,000
23	= 84,000
24	= 88,000
25	= 92,000

NUMERO	ENLIEU
1	100
2	100
3	100
4	100
5	100
6	100
7	100
8	100
9	100
10	100
11	100
12	100
13	100
14	100
15	100
16	100
17	100
18	100
19	100
20	100
21	100
22	100
23	100
24	100
25	100

TAB. DE CORRESPONDANCE

0	= -8,000
1	= -4,000
2	= 0
3	= 4,000
4	= 8,000
5	= 12,000
6	= 16,000
7	= 20,000
8	= 24,000
9	= 28,000
10	= 32,000
11	= 36,000
12	= 40,000
13	= 44,000
14	= 48,000
15	= 52,000
16	= 56,000
17	= 60,000
18	= 64,000
19	= 68,000
20	= 72,000
21	= 76,000
22	= 80,000
23	= 84,000
24	= 88,000
25	= 92,000

NUMERO	ENLIEU
1	100
2	100
3	100
4	100
5	100
6	100
7	100
8	100
9	100
10	100
11	100
12	100
13	100
14	100
15	100
16	100
17	100
18	100
19	100
20	100
21	100
22	100
23	100
24	100
25	100

14/ Carte des isopièzes après 20 ans d'exploitation.
Equal pressure lines after 20 years' operation.

15/ Carte des isopièzes après 25 ans d'exploitation.
Equal pressure lines after 25 years' operation.

rétablir un bilan positif, par un seul puits I situé en amont des trois puits de production.

Durant toute l'exploitation, nous avons supposé que l'alimentation se faisait à débit constant (*) et que la condition aval restait inchangée ($P = 0$). Cette exploitation se fait à partir de trois puits, 1, 2 et 3 situés dans la partie aval et à des débits respectifs constants durant chaque période selon le tableau ci-après.

Schéma de l'exploitation de la nappe

PÉRIODE	0-10 ANS	10-15 ANS	15-25 ANS
Puits n° 1.....	— 0,343 Q	— 0,343 Q	— 0,343 Q
Puits n° 2.....	— 0,343 Q	— 0,885 Q	— 0,885 Q
Puits n° 3.....	— 0,161 Q	— 0,161 Q	— 0,161 Q
Puits d'injection.	0	0	+ 0,480 Q
Bilan général...	+ 0,153 Q	— 0,389 Q	+ 0,091 Q

ANALYSE DES RÉSULTATS.

Si l'on analyse les résultats fournis par le modèle mathématique, principalement l'évolution des niveaux piézométriques aux puits (fig. 9), les cartes d'isopièzes (fig. 10 à 15) et le débit de fuite à l'aval (fig. 8), plusieurs remarques intéressantes sont à faire :

Durant la première période d'exploitation de 10 ans, où le débit soutiré q de la nappe est inférieur à son débit d'alimentation Q , le débit de fuite à l'aval diminue, mais sans que cette période soit suffisamment longue pour qu'il se stabilise à la valeur $Q - q$, autrement dit sans que le nouvel état permanent soit atteint. Cette remarque permet de se rendre compte de l'intérêt d'un modèle faisant intervenir la dimension temps, car s'il est bien évident que la connaissance de l'état stabilisé de la nappe en exploitation est intéressant d'un point de vue académique, il est certain que, dans la plupart des cas, de nouvelles modifications des conditions d'exploitation ont lieu avant qu'il soit obtenu.

Durant la deuxième période, d'une durée de 5 ans, où la production d'eau passe à un débit $q > Q$, du seul fait de la très forte augmentation du puits n° 2, on constate (fig. 13) que se crée au voisinage de ce puits et aussi du puits n° 3 une inversion de l'écoulement qui n'atteint cependant pas tout à fait la limite aval; il y a rebroussement des lignes de courant qui avaient initialement tendance à sortir à la limite aval, mais il n'y a pas encore alimentation par cette limite, comme le montre la consultation des influx partiels nœud par nœud à cette limite. Par contre cette inversion de l'écoulement va se réaliser durant les cinq années suivantes, malgré la réalimentation artificielle (fig. 14). En effet l'examen des résultats de la simulation durant la

troisième période correspondant à 10 ans de réalimentation artificielle montre que :

- ou bien le puits d'injection, situé en amont, est trop éloigné de la zone des puits de production, ce fait étant aggravé par la zone à mauvaise transmissivité voisine;
- ou bien dans le cas où cette position correspondrait réellement à une obligation, la réalimentation artificielle a démarré trop tard.

On s'aperçoit que, même après 10 ans de réinjection, l'inversion de l'écoulement à la limite aval est encore effective (fig. 15). Comme il s'agit ici d'une démonstration, c'est volontairement que nous nous sommes mis dans un tel cas; ainsi la nécessité de simuler de tels projets est évidente, car un tel modèle peut à la fois tenir compte de la dimension temps et des hétérogénéités de transmissivité et de coefficient d'emménagement, paramètres qui sont impérativement à prendre en compte simultanément, pour prétendre atteindre une représentation fidèle des phénomènes réels, ce qui n'est pas le cas de la solution analytique, méthode de l'exponentielle intégrale + méthode des images, ni de certaines solutions analogiques, comme cuves ou papier conducteur.

Conclusions

A partir d'un problème réel que nous avons schématisé en traitant séparément :

- 1° L'écoulement permanent avec alimentation constante;
- 2° L'écoulement oscillatoire stabilisé résultant d'une alimentation variable dans le temps;
- 3° La vidange de la nappe résultant de l'alimentation nulle à l'amont et de la condition $P = 0$ à l'aval, et enfin;
- 4° L'exploitation proprement dite en réalimentation naturelle puis en réalimentation artificielle, nous pensons avoir démontré, dans le cas particulier du modèle à deux dimensions de simulation d'une nappe en charge, toute l'efficacité des modèles mathématiques en général dans l'application à l'étude de l'exploitation optimale des nappes.

Bibliographie

- [1] LÉVY-LAMBERT (A.). — Etude sur l'utilisation optimale des nappes souterraines. *Mém. Trav. S.H.F.*, 1965, 1.
- [2] GUILLLOT (M.). — Etude par modèle mathématique du Chott Ech Chergui. *Ann. Ponts Chauss.*, nov.-déc. 1962.
- [3] LAGARDE (A.). — Un exemple de résolution analogique à l'aide d'un réseau R.C. d'un problème de diffusivité dans une nappe aquifère. *Mém. Trav. S.H.F.*, 1963, 11.
- [4] MULLER-FEUGA (R.), RUBY (P.). — Alimentation artificielle de la nappe des alluvions de la Basse-Durance. *Mém. Trav. S.H.F.*, 1965, 1.
- [5] JACQUARD (P.), JAIN (C.). — Recherche sur l'interprétation des mesures de pression. *Communic. n° 19*, extrait des « Comptes rendus du deuxième Colloque A.R.T. F.P., Ruil-Malmaison, 31 mai-4 juin 1965 ». *Editions Technip*, Paris, 1965.
- [6] LANCHON (M.). — Modèle numérique à trois dimensions des écoulements monophasiques dans un gisement. *Rev. Inst. Franç. du Pétrole*, 1966, XXI-I, 81.

(*) On aurait pu d'ailleurs adopter le débit d'alimentation variable dans le temps qui a été utilisé précédemment; en fait ce perfectionnement est inutile d'après les figures 4 et 5.

Discussion

Président : M. POTTIER

M. LANCHON indique, comme préambule, que son exposé comportera deux parties : la présentation d'un modèle mathématique et l'étude d'un cas simplifié d'exploitation de nappe d'eau. M. LANCHON ajoute que cette deuxième partie aurait été mieux traitée par M. LAGARDE, absent de Paris et qui s'en excuse.

M. BIESEL rappelle que MM. LAGARDE et LANCHON présentent dans leur communication des méthodes de calcul qui ont été utilisées par SOGREAH il y a plusieurs années (probablement pour la première fois au monde) et dont le principe a été exposé à plusieurs reprises*. Sans chercher à faire un procès d'antériorité aux auteurs, M. BIESEL souhaite que M. ZAOUÏ puisse exposer ici aujourd'hui ses commentaires et les perfectionnements apportés depuis cette époque à ce genre de calcul.

M. le Président précise qu'il ne s'agit pas pour MM. LAGARDE et LANCHON de dépasser ce qui a été fait avant sur le plan purement scientifique et sur le plan des techniques numériques, mais qu'avec le développement des questions d'eaux souterraines, leur effort actuel consiste à informer toutes les personnes qui ont des responsabilités dans ces questions des possibilités des modèles. Tous les organismes peuvent vraiment travailler ensemble pour arriver à ce résultat.

M. THIRRIOT s'associe à la remarque de M. le Président.

M. ZAOUÏ rappelle qu'effectivement SOGREAH a réalisé pour le compte de l'administration intéressée une étude sur modèles mathématiques du fonctionnement hydraulique du Chott Ech Chergui (Algérie) de 1957 à 1963.

M. LANCHON fait remarquer que le rapport de synthèse de l'étude du Chott Ech Chergui est cité en bibliographie (référence 2 de l'article). M. LANCHON s'associe de toute façon au président pour ne considérer le modèle mathématique présenté que comme un progrès et non une nouveauté. Ce progrès est important, puisque l'étude du Chott Ech Chergui ne fut faite qu'avec un modèle à 77 mailles, au lieu des 10 000 disponibles actuellement dans les modèles cités.

M. ZAOUÏ poursuit :

« Les équations de base étaient comparables, à la différence près que le modèle du Chott simulait en outre les échanges verticaux avec les terrains de couverture. La méthode de résolution employait aussi les différences finies, par discrétisation de l'espace et du temps selon un schéma implicite, mais il est bon d'ajouter que ce procédé très général n'est pas le seul utilisable et que dans certains cas, en particulier dans des aquifères homogènes, les méthodes intégrales donnent d'excellents résultats. Pour en revenir aux différences finies, on aboutit à un système linéaire d'ordre élevé dont la résolution par des méthodes itératives peut se révéler extrêmement longue. Il est nécessaire alors d'adapter des procédés de surrelaxation qui peuvent donner d'excellents résultats ou de faire appel à des méthodes directes. Les capacités de mémoire actuelles permettent de prendre en compte un grand nombre de mailles (M. LANCHON a cité le chiffre de 10 000) mais il faut proportionner la finesse et la complexité du modèle mathématique à l'abondance des données réelles dont on dispose. En effet, l'exemple présenté suppose prédéterminées les caractéristiques hydrodynamiques de l'aquifère alors qu'en réalité, la tâche essentielle du modèle consiste à les évaluer par reconstitution des observations piézométriques effectuées. C'est un travail de tâtonnements longs et fastidieux mais riche d'enseignements. Nous avons tenté le calcul direct des perméabilités, mais 30 % des coefficients obtenus étaient négatifs. On peut cependant penser que d'autres procédés (par exemple du type de recherche opérationnelle) pourraient être plus

fructueux. Une dernière remarque : les auteurs calculent les régimes permanents à l'aide du modèle du régime transitoire, ce qui est parfaitement légitime, mais ceci peut conduire à des calculs inutilement longs.

« En définitive, l'exemple présenté montre bien la puissance et l'efficacité des modèles mathématiques appliqués aux études de nappes souterraines, mais nous avons voulu souligner la difficulté et la variété des méthodes concevables pour aboutir à des modèles commodes et économiques l'emploi. »

M. LANCHON répond à M. ZAOUÏ :

« Il est certain que le faible temps imparti pour la présentation de la communication ne lui a pas permis de mettre suffisamment l'accent sur tous les aspects du problème.

« En ce qui concerne la discrétisation, M. LANCHON indique que le schéma de Crank-Nicholson dont il a parlé conduit à la résolution d'un système d'équations linéaires pentadiagonal à autant d'équations et d'inconnues qu'il y a de nœuds dans le maillage. On peut aussi imaginer d'autres schémas que celui de Crank-Nicholson et, en particulier, on peut s'orienter vers le choix d'un schéma explicite qui, comme son nom l'indique, donne directement la solution sans avoir à résoudre un système d'équations, mais il faut alors satisfaire aux conditions de stabilité. »

En ce qui concerne le calcul du régime permanent, M. LANCHON précise que, le modèle ayant été écrit initialement en vue d'utilisation pétrolière, le problème ne se posait pas (la condition initiale se traduisant facilement dans ce cas en imposant un potentiel identique en tous points). Le choix du procédé « par suite d'états transitoires » est celui qui s'adaptait le mieux au programme existant. En effet, le procédé itératif utilisé pour résoudre le système d'équations impose une condition de convergence qui n'est pas satisfaite quand on veut calculer le régime permanent.

M. ZAOUÏ pense qu'il peut être effectivement commode d'utiliser pour la détermination des régimes permanents (état initial ou simulation d'une exploitation prolongée de la nappe), un modèle établi pour le calcul des régimes transitoires mais que cette facilité risque de coûter cher en temps de machine, car le procédé de calcul direct de ces régimes qu'il a utilisé s'est révélé d'exécution beaucoup plus rapide. M. ZAOUÏ souligne aussi comme un inconvénient le fait que le modèle ait une forme obligatoirement rectangulaire.

M. LANCHON indique la possibilité d'adapter le modèle à n'importe quelle forme géométrique en inscrivant cette dernière dans le maillage et en transportant artificiellement les conditions aux frontières à l'aide de fortes perméabilités (fig. 1).

1/

M. ZAOUÏ estime que le procédé indiqué par M. LANCHON peut se révéler satisfaisant dans certains cas particuliers mais qu'il n'est pas susceptible de s'adapter à toutes les natures de conditions aux limites, dans le cas par exemple des débits constants non nuls.

M. THIRRIOT dit qu'il peut paraître surprenant que, dans ce problème de détermination des régimes permanents à

(*) J. ZAOUÏ. — Quelques applications des ordinateurs aux problèmes d'écoulements souterrains. IX^e Congrès de l'A.I.R.H., Dubrovnik (septembre 1961).

J. ZAOUÏ. — Le problème de l'alimentation artificielle de nappes : puits d'injection, zone d'épandage, intervention des modèles mathématiques. *La Houille Blanche*, n° 3 (mai 1965).

l'aide d'un problème numérique propre aux régimes transitoires, les méthodes spécifiques de type elliptique soient jugées plus rapides que les méthodes de type parabolique. Mais M. THIRRIOT pense qu'en définitive les deux points de vue se rejoignent puisqu'en résolvant le système linéaire, non plus en fonction du temps réel, mais en fonction du temps de calcul, on fait intervenir un coefficient dépendant des transmissivités et qui pourrait être considéré comme un coefficient de surrelaxation.

M. ZAOUI pense que ce sont là des tours de main un peu « terre à terre » mais que le champ des méthodes mathématiques n'est pas limité aux méthodes itératives de résolution.

M. THIRRIOT estime que M. ZAOUI minimise sa remarque, car le passage d'un système elliptique à un système parabolique et l'utilisation d'un coefficient de surrelaxation peuvent être considérés non comme des « tours de main » mais comme des « idées », du même ordre que celle que M. ZAOUI exprime en proposant la résolution « en bloc » du système linéaire.

D'ailleurs, le point de vue « terre à terre » a son importance et M. THIRRIOT demande à M. LANCHON combien coûte un tel modèle.

M. LANCHON répond que le prix est fonction du « temps ordinateur » nécessaire, et que ce temps peut varier de façon importante suivant le problème étudié (suivant que la nappe est plus ou moins homogène, qu'il y a plus ou moins de variations de débit aux puits, etc.). Par exemple, la détermination de l'état permanent qui, dans ce cas particulier, concernait un milieu relativement homogène et sans variation des conditions aux frontières, a nécessité de faire tourner le modèle sur 36 000 jours; il a fallu pour cela 35 mn d'IBM 7040, ce qui correspond à une dépense d'environ 500 F. Dans un autre cas : l'étude de « l'albien du Bassin parisien » il a fallu environ une heure d'ordinateur pour simuler les écoulements dans la nappe entre 1880 et 1965; ici il y avait de nombreuses discontinuités de débit sur les puits.

M. PRUDHOMME reconnaît l'intérêt d'améliorer les techniques de programmation pour la résolution par modèles mathématiques des problèmes de mécanique des fluides en milieu poreux et signale le développement de travaux originaux réalisés dans cette voie par Géopétrole en collaboration avec la Société d'Informatique Appliquée.

D'autre part, M. PRUDHOMME remarque que les modèles mathématiques, dont M. LANCHON vient de présenter un exemple, constituent un type particulier de simulateur, mais qu'il existe d'autres types tels que les modèles analogiques par exemple. Le choix de simulateur doit être fonction du problème à résoudre. C'est ainsi que les simulateurs faisant intervenir un milieu continu pour représenter l'aquifère (cuve rhéoelectrique par exemple) sont mieux adaptés à la détermination des transmissivités à partir du champ des hauteurs piézométriques que ceux nécessitant un découpage en mailles (réseaux électriques ou programmes mathématiques) car ils n'imposent aucune hypothèse sur la distri-

bution des transmissivités à l'intérieur de chaque maille élémentaire.

M. LANCHON fait remarquer que le présent rapport n'a pour objet que de traiter des possibilités de simulation par modèles mathématiques, mais que l'Institut Français du Pétrole dispose aussi de simulateurs analogiques électriques, en particulier une cuve rhéographique avec quatre-vingts générateurs de courant à réglages indépendants (correspondant à quatre-vingts puits ou groupes de puits) et un réseau résistance-capacité répétitif à 158 mailles. Un exemple de simulation du comportement d'une nappe à l'aide d'un tel réseau a d'ailleurs été présenté.

M. LANCHON précise que son modèle de 10 000 points tourne sur un ordinateur à 32 000 mémoires. Or, il y a déjà en Europe des ordinateurs capables de 130 000 mémoires, qui vont encore évoluer au point de vue technologique et accroître leurs possibilités.

En ce qui concerne les simulateurs à milieu continu, M. LANCHON pense que leur emploi pour l'étude des mouvements permanents est intéressant mais que, en hydrogéologie, comme l'avait fait remarquer ici même M. CHAPOUTHIER, « la vraie permanence n'existe pas; comme la santé, selon Knock, elle est un état précaire qui ne présage rien de bon » — les modèles mathématiques sont de toute façon mieux adaptés aux problèmes transitoires résultant de la compressibilité des nappes mises en exploitation. Comme l'ajustement des transmissivités sur un modèle transitoire de nappe ayant un passé d'exploitation est un problème qui est soluble et qui donne de meilleurs résultats, l'étude sur modèle analogique des mouvements permanents n'est qu'un pas de l'étude, si un tel passé existe.

M. THIRRIOT n'est pas d'accord avec l'objection de principe de M. PRUDHOMME : en effet, celle-ci repose sur la discrétisation habituelle donnant l'approximation du laplacien en un point. Mais on peut prendre un algorithme numérique fondé sur une pondération de l'équation autour du point de calcul. Il suffit, pour ce faire, de transformer une intégrale de surface en une intégrale curviligne (dans le cas d'un modèle plan) à l'aide de la transformation de Green. On tient compte alors de la variation de transmissivité.

M. PRUDHOMME objecte que cette méthode n'enlève pas la nécessité d'une hypothèse, au moins de forme, sur la distribution des transmissivités dans chaque maille lorsqu'on cherche à déterminer les transmissivités à partir du champ des hauteurs piézométriques, en utilisant un modèle mathématique.

M. LANCHON pense que l'objection est valable peut-être pour la mise en œuvre, mais se demande si l'on arrive à modéliser, au point de vue homogénéité, une cuve à la précision de 10 000, puisque, de son côté, il propose un modelage à 10 000 points.

M. PRUDHOMME ajoute que le programme à 10 000 points mentionné n'est pas conçu pour la détermination des transmissivités à partir du champ des hauteurs piézométriques.

Bois gravé du XVI^e siècle