

**MÉTHODES APPROCHÉES
DE CALCUL
DES COUPS DE BÉLIER
DANS DES CONDUITES
RELATIVEMENT LONGUES**

PAR CL. THIRRIOT *

Introduction

Souvent, dans la résolution de problèmes particuliers mais très complexes, on utilise des méthodes générales (d'autant plus intéressantes qu'elles sont simples). Et paradoxalement pour l'étude d'un problème fondamental, on peut parfois user avec profit de procédés particuliers pour obtenir un résultat général.

La théorie des caractéristiques, dont la méthode graphique de Bergeron est une élégante illustration, permet d'aborder et de résoudre la majorité des problèmes d'écoulements transitoires. Bergeron lui-même en a donné une magnifique démonstration en traitant des cas très complexes faisant intervenir cavitation, réservoir d'air, cheminées d'équilibre, machines hydrauliques fonctionnant en sens normal ou à contre-courant. Mais le résultat obtenu est alors particulier et présenté sous forme discrète.

A l'opposé, on peut envisager d'utiliser des approximations pour obtenir sous forme analytique une réponse approchée mais générale. Suivant cette idée nous avons essayé d'étudier la propagation d'une onde de choc dans une conduite.

Les hypothèses

Pour rendre plus concret l'exposé, nous considérerons l'écoulement transitoire provoqué par la fer-

meture brusque d'une vanne à l'extrémité aval d'une conduite.

1. La perturbation créée à l'aval à l'instant initial ($T = 0$) se propage vers l'amont avec une vitesse peu différente de la célérité propre C des ondes de petite amplitude. Ainsi à l'instant T , le front d'onde a atteint l'abscisse $X = CT$. A l'amont de cette abscisse rien n'est changé dans l'hypothèse d'un écoulement initial permanent de débit Q_0 . Nous nous intéresserons donc uniquement à l'écoulement derrière le front d'onde de choc. Dans le plan X, T , le domaine (D) d'étude est donc le domaine ouvert compris entre les droites $X = 0$ et $X = CT$.

2. Connaissant la loi de débit à l'aval $Q(0, T)$, on peut à chaque instant effectuer un bilan de masse pour la portion d'écoulement atteinte par la perturbation.

La différence de volume :

$$\int_0^T [Q(CT, u) - Q(0, u)] \cdot du$$

est accumulée entre les sections $X = 0$ et $X = CT$, d'une part à cause de la dilatation de la conduite et d'autre part comme conséquence de la compression de l'eau.

La dilatation de la conduite ménage une augmentation de volume égale à :

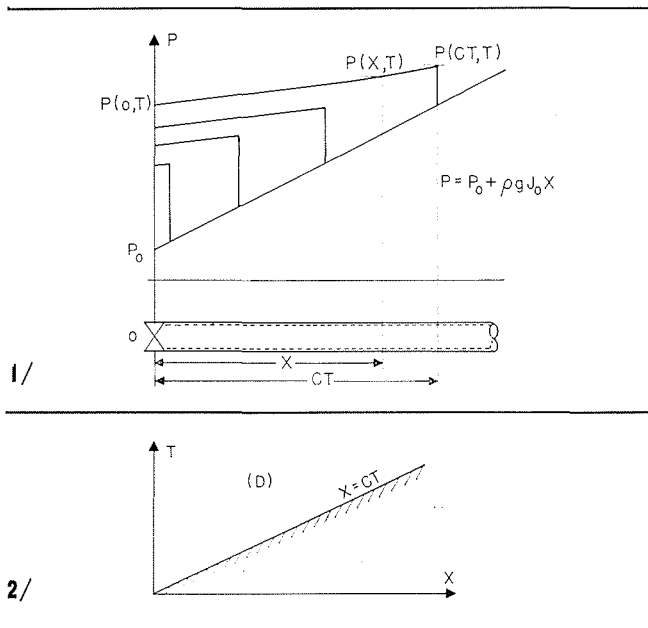
$$\int_0^{CT} \left(\frac{1}{E} \frac{D}{e} \right) [P(X, T) - P(X, 0)] dX$$

E : module d'élasticité de l'acier de la conduite;

e : épaisseur de l'enveloppe;

D : diamètre moyen de la conduite.

* Professeur S/C à la Faculté des Sciences de Toulouse.



L'effet de la compressibilité de l'eau entraîne l'accumulation d'une masse :

$$\int_0^{CT} \rho \beta [P(X, T) - P(X, 0)] dX$$

ρ : masse spécifique moyenne du fluide;
 β : coefficient de compressibilité de l'eau.

Ainsi donc, pour la portion d'écoulement atteinte par la perturbation, on obtient la relation globale :

$$\int_0^{CT} \rho \left(\beta + \frac{1}{E} \frac{D}{e} \right) [P(X, T) - P(X, 0)] dX = \int_0^T \rho [Q(CT, u) - Q(0, u)] du \quad (1)$$

Lorsque la perturbation est due à une variation brusque du débit à l'aval qui reste ensuite fixé à une valeur Q_0 , le second membre admet l'expression très simple :

$$\rho [Q(0, 0) - Q_0] T$$

La théorie des caractéristiques montre que :

$$C^2 = \frac{1}{\rho \left(\beta + \frac{1}{E} \frac{D}{e} \right)} \quad (2)$$

C étant la célérité propre des ondes.

L'équation de continuité ci-dessus prend alors la forme :

$$\int_0^{CT} [P(X, T) - P(X, 0)] dX = \rho C^2 [Q(0, 0) - Q_0] \cdot T \quad (3)$$

Peut-être serait-il possible d'obtenir de manière analogue pour la portion d'écoulement perturbé, une relation globale provenant d'un bilan énergétique. Mais la prise en compte des pertes d'énergie serait plus délicate. Le bilan de masse, lui, est sans contestation possible.

3. Afin de pouvoir utiliser la relation globale

obtenue ci-dessus, nous devons connaître l'évolution longitudinale de la pression P. Ici va donc apparaître une hypothèse essentielle : guidés par l'expérience et les résultats de calculs graphiques ou numériques, nous supposons que la variation de P en fonction de X est simple, par exemple linéaire ou parabolique. Ainsi on écrira à chaque instant :

$$P = a_0(T) + a_1(T) X + a_2(T) X^2$$

4. Jusqu'ici nous n'avons utilisé que des bilans ou des informations explicites, mais une source de renseignement importante sur la tendance d'évolution du phénomène est constituée par le système d'équations aux dérivées partielles classiques qui s'écrit sous forme simplifiée :

$$\frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial X} = \frac{1}{\rho C^2} \frac{\partial P}{\partial T} \quad (4)$$

$$\frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial T} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} - gJ \quad (5)$$

P : est la pression équivalente à la cote piézométrique;

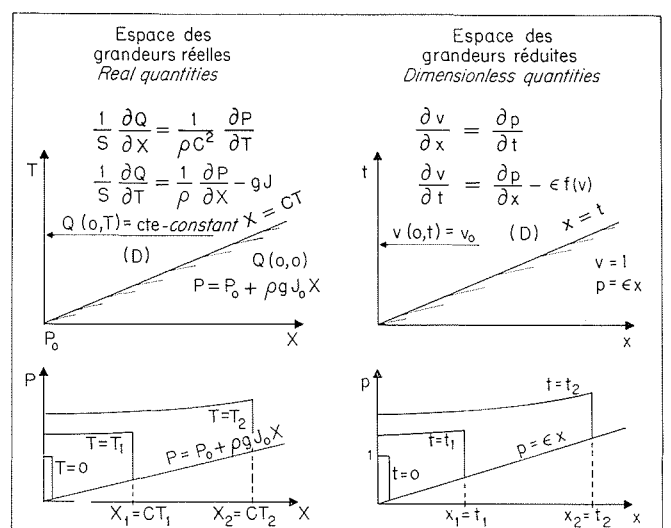
J : la perte de charge linéaire.

Pour résoudre ce système de manière approchée, nous nous inspirerons des méthodes variationnelles, en particulier de la méthode des moments de Ritz-Galerkin.

En somme, nous chercherons des approximations de la solution telles que les équations aux dérivées partielles soient vérifiées en moyenne sur l'intervalle $[0, CT]$ parcouru par l'onde de choc.

5. Enfin, nous pourrions tenir compte d'informations locales telle que la valeur de la pression en front d'onde, résultat explicite fourni exceptionnellement par la théorie des caractéristiques, ou encore le gradient de pression au voisinage de la section de manœuvre d'après l'équation (5).

Ces idées de base étant définies, il reste encore un large choix dans l'éventail des cheminements vers la solution approchée. Ils différeront par exemple par l'hypothèse sur la variation longitudinale de pression, ou le choix de la méthode de pondération des équations aux dérivées partielles ou encore le



3/

fait de considérer ou non les renseignements en front d'onde ou à l'aval.

Dans ce qui suit, nous présenterons deux cheminement. Le premier est surtout caractérisé par l'application de la méthode du petit paramètre à la résolution des équations (4) et (5), en supposant linéaire la variation de cote piézométrique à chaque instant.

La deuxième solution approchée est obtenue en utilisant au maximum les informations locales pour déterminer la variation de pression supposée parabolique longitudinalement.

Dans les deux cas nous traiterons le problème en valeurs réduites.

Modèle mathématique en grandeurs réduites

Soient les grandeurs adimensionnelles :

$$x = \frac{X}{L} \quad t = \frac{T}{T^*} \quad v = \frac{Q}{Q^*} \quad p = \frac{P}{P^*}$$

L, T*, Q* et P* sont des grandeurs de références idoines.

Les équations aux dérivées partielles deviennent :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{SLP^*}{Q^* \rho C^2 T^*} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \quad (6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{ST^*P^*}{Q^* \rho L} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - g \frac{ST^*J_0}{Q^*} \cdot \frac{J}{J_0} \quad (7)$$

Pour choisir les grandeurs de références, nous tiendrons compte des conditions à la frontière du domaine.

Initialement l'écoulement est permanent :

$$Q = Q(0, 0)$$

Après la manœuvre, on suppose en première étape, le débit constant à l'aval Q(0, T).

Nous prendrons Q* = Q(0, 0). Alors v(0, 0) = 1 et à l'aval v(0, t) = v₀. Ensuite, en posant :

$$\frac{SLP^*}{Q^* \rho C^2 T^*} = \frac{ST^*P^*}{Q^* \rho L} = 1$$

il vient :

$$\frac{L}{T^*} = C \quad \text{et} \quad P^* = \rho C \frac{Q(0, 0)}{S}$$

P* est l'intensité de la surpression provoquée par la fermeture brusque et totale du débit Q(0, 0) de l'écoulement initial.

On pourrait aussi simplifier le coefficient intervenant dans le terme de perte de charge en choisissant de manière convenable L; nous préférons ménager la possibilité d'identifier L avec la longueur de la conduite et nous poserons :

$$g \frac{SLJ_0}{CQ(0, 0)} = \varepsilon$$

J/J₀ est une fonction f(v) du débit réduit qui varie entre 0 et 1 lorsque le débit réel varie de 0 à la valeur du débit initial Q(0, 0).

Une bonne approximation de cette fonction est :

$$f(v) = \alpha v + (1 - \alpha) v^2 \quad (8)$$

Lorsque l'écoulement est laminaire, α = 1.

Si l'écoulement est franchement turbulent rugueux, α = 0.

On pourrait aussi envisager une variation de type puissance :

$$f(v) = v^n$$

En écoulement permanent initial la pression a pour valeur :

$$P = P_0 + \rho g J_0 X$$

En prenant comme niveau de référence P₀, il vient après passage aux grandeurs réduites :

$$p(x, 0) = \varepsilon x$$

Le bilan de masse représenté par l'équation (3) conduit à la relation en valeur réduite :

$$\int_0^t [p(x, t) - p(x, 0)] dx = (1 - v_0) t \quad (9)$$

L'essentiel des données concernant les grandeurs réelles et leurs homologues sans dimension est rassemblé sur la figure 3.

Application de la méthode du paramètre de perturbation

Nous devons résoudre le système :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial t} \quad (10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x} - \varepsilon f(v) \quad (11)$$

compte tenu des conditions aux limites :

— à l'aval v(0, t) = v₀;

— sur la limite x = t avant l'arrivée de l'onde v = 1, p = εx.

Nous supposons que le paramètre ε est petit, comme,

$$\varepsilon = \frac{\rho g J_0 L}{\rho C Q_0 / S}$$

cette hypothèse signifie que la variation de pression due à la perte de charge en régime permanent initial n'est pas trop importante par rapport à l'intensité de la surpression due à la fermeture brusque et totale du débit initial.

Lorsque ε est nul, on sait que l'onde de choc se conserve en forme et amplitude au cours de sa propagation vers l'amont. Nous considérerons ce cas comme l'écoulement fondamental qui sera perturbé par l'existence des pertes de charge. Nous chercherons donc la solution sous forme de développement en série suivant les puissances croissantes de ε :

$$p = p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \varepsilon^3 p_3 + \dots \quad (12)$$

$$v = v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \varepsilon^3 v_3 + \dots \quad (13)$$

Les grandeurs p₁, p₂ ..., v₁, v₂ ... sont des fonctions de x et t.

Développons aussi la fonction $f(v)$ afférente aux pertes de charge :

$$f(v) = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3 + \dots + \varepsilon^i f_i \quad (14)$$

Le bilan global de masse (9) entraîne :

$$\int_0^t (p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots - \varepsilon x) dx = (1 - v_0) t \quad (15)$$

L'étude du problème de la propagation de l'onde de choc est donc ramenée par identification des coefficients des puissances successives de ε à la résolution des systèmes successifs suivants :

$$\frac{\partial v_0}{\partial x} = \frac{\partial p_0}{\partial t} \quad (16)$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} = \frac{\partial p_0}{\partial x} \quad (17)$$

$$v_0(0, t) = v_0 \quad (18)$$

$$\int_0^t p_0 dx = (1 - v_0) t \quad (19)$$

$$0 \leq x < t \quad t > 0$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial p_1}{\partial t} \quad (20)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\partial p_1}{\partial x} - f_0 \quad (21)$$

$$v_1(0, t) = 0 \quad (22)$$

$$\int_0^t (p_1 - x) dx = 0 \quad (23)$$

$$0 \leq x < t \quad t > 0$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{\partial p_2}{\partial t} \quad (24)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{\partial p_2}{\partial x} - f_1 \quad (25)$$

$$v_2(0, t) = 0 \quad (26)$$

$$\int_0^t p_2 dx = 0 \quad (27)$$

$$0 \leq x < t \quad t > 0$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x} = \frac{\partial p_i}{\partial t} \quad (28)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial p_i}{\partial x} - f_{i-1} \quad (29)$$

$$v_i(0, t) = 0 \quad (30)$$

$$\int_0^t p_i dx = 0 \quad (31)$$

$$0 \leq x < t \quad t > 0$$

Les termes fondamentaux v_0 et p_0 correspondent à la propagation d'une onde de choc sans déformation en l'absence de perte de charge.

Donc :

$$v_0(x, t) = v_0 \quad \text{et} \quad p_0(x, t) = 1 - v_0$$

Pour résoudre ces différents systèmes, on pourrait envisager d'appliquer la transformation de Laplace. Mais nous préférons utiliser une approximation. Construction de Bergeron, calcul numérique et expériences ont montré que la variation de la pression était presque linéaire en fonction de l'abscisse; nous supposons donc que les solutions sont données de manière approchée par :

$$p_i = a_i(t) \cdot x + b_i(t) \quad (32)$$

et :

$$v_i = c_i(t) \cdot x \quad (33)$$

d'après l'équation (23) il vient :

$$b_1(t) = \frac{t}{2} [1 - a_1(t)] \quad (34)$$

et d'après l'équation (31) pour $i > 1$, il vient :

$$b_i(t) = -ta_i(t)/2 \quad (35)$$

Pour déterminer les coefficients $a_i(t)$ et $c_i(t)$, nous nous inspirons de la méthode de Galerkin et nous poserons que les équations (28) et (29) sont vérifiées en moyenne sur l'intervalle $0 \leq x < t$ soit :

$$\int_0^t \left[\frac{\partial v_i}{\partial x} - \frac{\partial p_i}{\partial t} \right] dt = 0 \quad (36)$$

et :

$$\int_0^t \left[\frac{\partial v_i}{\partial t} - \frac{\partial p_i}{\partial x} + f_{i-1} \right] dx = 0 \quad (37)$$

Ainsi on obtient d'après (36) :

$$\begin{aligned} - \text{pour } i = 1 & \quad a_1(t) = 1 - 2c_1(t) \\ - \text{pour } i > 1 & \quad a_i(t) = -2c_i(t) \end{aligned}$$

et d'après l'équation (37) :

$$\frac{t}{2} \frac{dc_i}{dt} - a_i + \frac{1}{t} \int_0^t f_{i-1} dx = 0$$

soit pour $i = 1$:

$$\frac{t}{2} \frac{dc_1}{dt} + 2c_1 = 1 - f_0 \quad (38)$$

et pour $i > 1$:

$$\frac{t}{2} \frac{dc_i}{dt} + 2c_i = -\frac{1}{t} \int_0^t f_{i-1} dx \quad (39)$$

Si nous admettons pour l'évaluation des pertes de charge la formule :

$$f(v) = \alpha v + (1 - \alpha) v^2$$

le développement suivant les puissances de ε compte tenu de l'expression de v , sera :

$$\begin{aligned} f(v) &= \alpha v_0 + (1 - \alpha) v_0^2 \\ &+ \varepsilon [\alpha v_1 + (1 - \alpha) 2v_0 v_1] \\ &+ \varepsilon^2 [\alpha v_2 + (1 - \alpha) (2v_0 v_2 + v_1^2)] \\ &+ \varepsilon^3 [\alpha v_3 + (1 - \alpha) (2v_0 v_3 + 2v_1 v_2)] \\ &+ \varepsilon^{2p} [\alpha_{2p} + (1 - \alpha) (v_p^2 + 2 \sum_{j=1}^p v_{p-j} v_{p+j})] \\ &+ \varepsilon^{2p+1} [\alpha v_{2p+1} + (1 - \alpha) 2 \sum_{j=0}^p v_{p-j} v_{p+1+j}] \end{aligned} \quad (40)$$

Compte tenu des approximations très importantes admises dans l'intégration, il est bien évident qu'il suffit de considérer quelques premiers termes seulement.

Examinons donc les approximations successives obtenues par la résolution des systèmes aux dérivées partielles.

Approximation d'ordre 1.

L'équation (38) admet comme solution :

$$c_1 = \frac{1-f_0}{2} + \frac{Cte}{t^4}$$

Puisque la valeur de c_1 doit être finie pour tout $t > 0$, la constante intervenant dans la solution ci-dessus doit être nulle. D'où :

$$v_1 = \frac{1-f_0}{2} x = \frac{1 - [\alpha v_0 + (1-\alpha) v_0^2]}{2} x \quad (41)$$

et :

$$p_1 = f_0 x + \frac{t}{2} (1-f_0) = \frac{t}{2} + (2x-t) \frac{\alpha v_0 + (1-\alpha) v_0^2}{2} \quad (42)$$

Dans le cas d'une variation nulle ou insignifiante de débit $v_0 \approx 1$, on retrouve bien le régime initial car

$$v_1(x, t) = 0 \quad \text{et} \quad p_1(x, t) = x$$

Si la fermeture de débit est totale :

$$v_1 = \frac{x}{2}, \quad p_1 = \frac{t}{2}$$

La ligne de pression est alors une horizontale qui s'élève lorsque l'onde progresse.

Approximation d'ordre 2.

$$\frac{1}{t} \int_0^t [\alpha v_1 + (1-\alpha) 2 v_0 v_1] dx = [\alpha + (1-\alpha) 2 v_0] \frac{1-f_0}{4} t$$

L'équation (39) donne :

$$\frac{t}{2} \frac{dc_2}{dt} + 2 c_2 = - \frac{1-f_0}{4} [\alpha + (1-\alpha) 2 v_0] t$$

Seule convient la solution particulière de la forme :

$$c_2 = \gamma_2 t$$

d'où :

$$v_2 = - [1 - \alpha v_0 - (1-\alpha) v_0^2] [\alpha + (1-\alpha) 2 v_0] \frac{tx}{10} \quad (43)$$

et :

$$p_2 = [1 - \alpha v_0 - (1-\alpha) v_0^2] [\alpha + (1-\alpha) 2 v_0] \frac{tx(2x-t)}{10} \quad (44)$$

Approximation d'ordre 3 et suivantes.

Une loi simple de formation apparaît :

$$\frac{1}{t} \int_0^t f_{i-1} dx = - d_i t^{i-1}$$

d'où :

$$c_i = \frac{2 d_i}{3+i} t^{i-1} = \gamma_i t^{i-1} \quad (45)$$

Par exemple pour l'approximation d'ordre 3, comme

$$f_2 = \alpha v_2 + (1-\alpha) (2 v_0 v_2 + v_1^2)$$

il vient :

$$d_3 = 3 \gamma_3 = - \frac{1}{t^3} \int_0^t [\alpha \gamma_2 x t + (1-\alpha) (2 v_0 \gamma_2 x t + \gamma_1^2 x^2)] dx$$

$$\gamma_3 = - \frac{1}{3} \left\{ \frac{\gamma_2}{2} [\alpha + 2 v_0 (1-\alpha)] + \frac{\gamma_1^2}{3} (1-\alpha) \right\} \quad (46)$$

$$\gamma_3 = - \frac{1}{180} \left\{ 1 - [\alpha v_0 + (1-\alpha) v_0^2] \right\} \left\{ 5 [1 - [\alpha v_0 + (1-\alpha) v_0^2]] (1-\alpha) - 3 [\alpha + 2 v_0 (1-\alpha)]^2 \right\}$$

Bien que la génération des coefficients successifs γ_i soit simple, leur expression développée devient très vite encombrante.

Nous examinerons plus en détail le cas de l'écoulement transitoire turbulent franchement rugueux.

Alors :

$$\alpha = 0$$

d'où :

$$\gamma_1 = \frac{1-v_0^2}{2}; \quad \gamma_2 = - \frac{1}{5} v_0 (1-v_0^2);$$

$$\gamma_3 = - \frac{(1-v_0^2)(5-17v_0^2)}{180}$$

D'après la relation de récurrence

$$\gamma_4 = v_0 (1-v_0^2) \left(\frac{17-29v_0^2}{630} \right) \quad (47)$$

De même :

$$\gamma_5 = (1-v_0^2) \left(\frac{1}{432} - \frac{383}{18900} v_0^2 + \frac{1717 v_0^4}{75600} \right) \quad (48)$$

On peut envisager d'obtenir les termes suivants du développement dans le cas particulier de la fermeture brusque $v_0 = 0$.

Alors :

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} \quad \gamma_2 = 0 \quad \gamma_3 = - \frac{1}{36}$$

$$\gamma_4 = 0 \quad \gamma_5 = \frac{1}{432}$$

Etablissons rapidement les relations de récur-

rence qui permettent de calculer les coefficients successifs. Reprenons l'équation (39) :

$$\frac{t}{2} \frac{dc_i}{dt} + 2c_i = -\frac{1}{t} \int_0^t f_{i-1} dx$$

Nous avons posé :

$$c_i = \gamma_i t^{i-1} \quad v_i = c_i x$$

D'après le développement (40) :

$$f_{2p} = x^2 t^{2p-2} [\gamma_p^2 + 2 \sum_{j=1}^{p-1} \gamma_{p-j} \gamma_{p+j}]$$

car $v_0 = 0$, et :

$$f_{2p+1} = 2 x^2 t^{2p-1} \sum_{j=0}^{p-1} \gamma_{p+1+j} \gamma_{p-j}$$

d'où :

$$\frac{1}{t} \int_0^t f_{2p} dx = \left[\frac{1}{3} \gamma_p^2 + \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{p-1} \gamma_{p-j} \gamma_{p+j} \right] t^{2p}$$

et :

$$\frac{1}{t} \int_0^t f_{2p+1} dx = \frac{2}{3} t^{2p+1} \sum_{j=0}^{p-1} \gamma_{p+1+j} \gamma_{p-j}$$

D'où pour la détermination de γ_i :

$$\left(\frac{i-1}{2} + 2 \right) t^{i-1} \gamma_i = -\frac{1}{t} \int_0^t f_{i-1} dx$$

si $i = 2p + 1$:

$$(p+2) \gamma_{2p+1} = -\frac{1}{3} \gamma_p^2 - \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{p-1} \gamma_{p-j} \gamma_{p+j} \quad (49)$$

si $i = 2p + 2$:

$$\left(p + \frac{5}{2} \right) \gamma_{2p+2} = -\frac{2}{3} \sum_{j=0}^{p-1} \gamma_{p+1+j} \gamma_{p-j} \quad (50)$$

Ainsi, compte tenu des premières valeurs obtenues dans la suite γ les coefficients γ_{2p} de rang pair sont nuls, car dans leur expression intervient la somme de produits d'un terme de rang impair par un terme de rang pair de rang inférieur à $2p$ donc nul.

Les coefficients de rang impair sont de signe alterné. En effet :

$$(p+2) \gamma_{2p+1} = -\frac{1}{3} \gamma_p^2 - \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{p-1} \gamma_{p-j} \gamma_{p+j}$$

si p est lui-même pair ($p = 2k$).

$$2(k+1) \gamma_{4k+1} = -\frac{2}{3} (\gamma_1 \gamma_{4k-1} + \gamma_3 \gamma_{4k-3} + \dots + \gamma_{2k-1} \gamma_{2k+1}) \quad (51)$$

Cette relation de récurrence montre que γ_{4k+1} est toujours positif si on admet l'alternance de signe soit $\gamma_{4k-1}, \gamma_{4k-3}$ négatifs (au début de la récurrence, γ_3 est bien négatif).

Si p est impair ($p = 2k - 1$) :

$$\frac{3+4k}{2} \gamma_{4k-1} = -\frac{1}{3} \gamma_{2k-1}^2 - \frac{2}{3} (\gamma_1 \gamma_{4k-3} + \gamma_3 \gamma_{4k-5} + \dots + \gamma_{2k-3} \gamma_{2k+3}) \quad (52)$$

Cette récurrence montre bien que les termes de rang $4k - 1$ sont toujours négatifs.

La période du signe est bien 4.

Ces relations permettent le calcul rapide des termes successifs :

$$\gamma_7 = -\frac{1}{4860} ; \quad \gamma_9 = \frac{13}{699840}$$

On peut d'ailleurs avoir une idée de la convergence de cette suite γ_i d'après la formule de récurrence.

Supposons que jusqu'au rang $2p + 1$, le terme $|\gamma_i|$ puisse être majoré par la quantité $\gamma_1 \rho^{i-1}$.

Comme

$$(p+2) \gamma_{2p+1} = -\frac{1}{3} \gamma_p^2 - \frac{2}{3} \sum_{j=2}^{p-1} \gamma_{p-j} \gamma_{p+j}$$

si p est impair, et :

$$(p+2) \gamma_{2p+1} = -\frac{2}{3} \sum_{j=1}^{p-1} \gamma_{p-j} \gamma_{p+j}$$

si p est pair,

$$\begin{aligned} \gamma_{p-j} \gamma_{p+j} &< \gamma_1^2 \rho^{2p-2} \\ \gamma_p^2 &< \gamma_1^2 \rho^{2p-2} \end{aligned}$$

Dans le cas de p impair, le nombre de termes non nuls intervenant dans la somme est $(p-1)/2$. Si p est pair, le nombre de termes de la somme est $p/2$. Donc dans les deux cas une majorante de γ_{2p+1} est telle que :

$$(p+2) |\gamma_{2p+1}| < \frac{p}{3} \gamma_1^2 \rho^{2p-2}$$

Il suffit donc pour que l'expression générale de la majorante soit satisfaisante que :

$$\gamma_1 \rho^{2p} \geq \frac{p}{3(p+2)} \gamma_1^2 \rho^{2p-2}$$

c'est-à-dire :

$$\rho^2 \geq \frac{\gamma_1}{3} \cdot \frac{1}{1+(2/p)} \quad (53)$$

soit :

$$\rho^2 \geq \frac{1}{6}$$

On voit que ρ peut être choisi nettement inférieur à l'unité. La suite γ_{2p+1} est donc rapidement convergente.

Dans le cas de la fermeture brusque et totale, les variations approchées de la pression et du débit dans le temps et l'espace seront représentés par les séries :

$$p(x, t) \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2} t + (2x - t) \left[\frac{\varepsilon^3 t^2}{36} - \frac{\varepsilon^5 t^4}{432} + \frac{\varepsilon^7 t^6}{4860} - \dots \right] \quad (54)$$

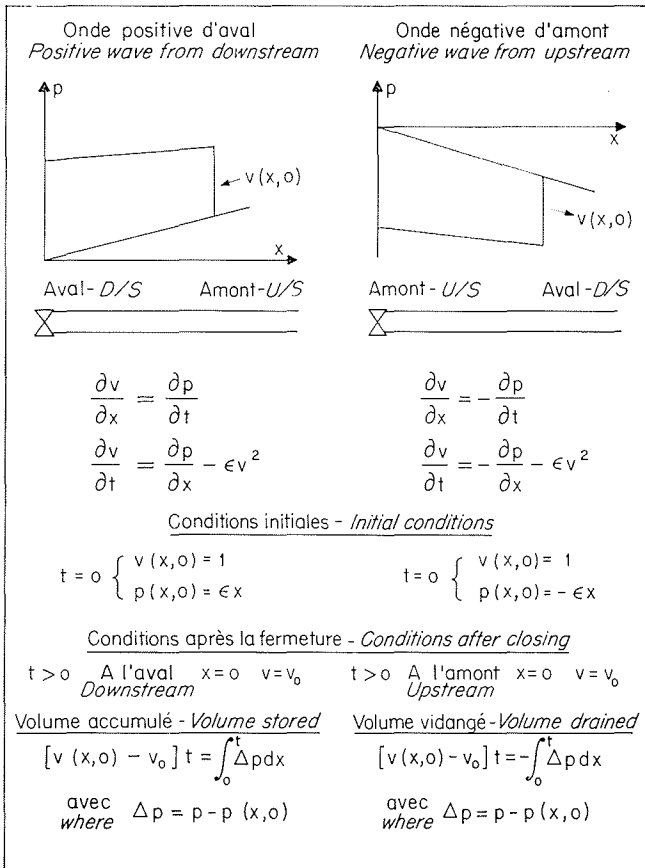
et :

$$v(x, t) \approx x \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^3 t^2}{36} + \frac{\varepsilon^5 t^4}{432} - \frac{\varepsilon^7 t^6}{4860} + \dots \right) \quad (55)$$

Ces approximations permettent en particulier d'obtenir :

1° la pression dans la section aval :

$$p(0, t) \approx 1 + \varepsilon \left(\frac{t}{2} - \frac{\varepsilon^3 t^3}{36} + \frac{\varepsilon^5 t^5}{432} - \frac{\varepsilon^7 t^7}{4860} + \dots \right) \quad (56)$$



4/

2° les conditions de fonctionnement immédiatement derrière l'onde de choc :

$$p(t, t) \approx 1 + \frac{\epsilon t}{2} + \frac{\epsilon^3 t^3}{36} - \frac{\epsilon^5 t^5}{432} + \frac{\epsilon^7 t^7}{4860} \dots \quad (57)$$

$$v(t, t) \approx \epsilon \frac{t}{2} - \frac{\epsilon^3 t^3}{36} + \frac{\epsilon^5 t^5}{432} - \frac{\epsilon^7 t^7}{4860} \dots \quad (58)$$

Ainsi, pour des conduites de longueur modérée, la ligne piézométrique derrière l'onde de choc est pratiquement horizontale.

Onde négative d'amont.

La méthode approchée proposée permet d'étudier tout aussi simplement d'autres circonstances d'écoulement, par exemple la propagation d'une onde négative d'amont due à la coupure brusque d'un débit par arrêt de pompe ou fermeture de vanne. On pourra ainsi apprécier la valeur de la dépression et localiser grossièrement l'apparition éventuelle de la cavitation.

En fait, il est inutile de reprendre le développement car ce problème d'onde négative d'amont est symétrique du problème étudié précédemment de l'onde positive d'aval et ceci est intuitif; pour le montrer, il suffit d'établir le parallèle entre les prémisses des deux problèmes (fig. 4).

Les abscisses sont toujours comptées à partir de la section de manœuvre.

Si dans l'étude de l'onde négative d'amont on change de fonction telle que $p' = -p$, on retrouve le problème de l'onde positive d'aval.

Il y aura la même réciprocité pour l'onde positive d'amont et l'onde négative d'aval.

Onde positive d'amont.

On procède par exemple à la mise en route brusque d'une pompe. A l'aval se propage une onde positive due à l'augmentation de débit. En valeurs réduites, nous disposerons du modèle mathématique suivant :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial p}{\partial t} \quad (59)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x} - \epsilon f(v) \quad (60)$$

Le régime initial est caractérisé par :

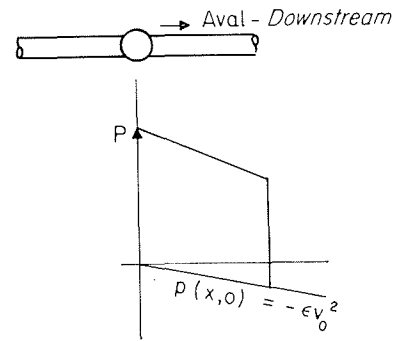
$$v(x, 0) = v_0$$

$$p(x, 0) = -\epsilon f(v_0)$$

Après la manœuvre :

pour $x = 0, v = 1$

(le débit en régime permanent ultérieur est pris comme référence).



Le bilan des masses impose :

$$(1 - v_0) t = \int_0^t [p - p(x, 0)] dx$$

Pour simplifier nous ne considérerons que le cas d'un écoulement franchement turbulent. Alors :

$$f(v) = v^2$$

Comme précédemment nous chercherons les solutions :

$$p(x, t) \quad \text{et} \quad v(x, t)$$

sous forme de série :

$$p(x, t) = p_0(x, t) + \epsilon p_1(x, t) + \epsilon^2 p_2(x, t) + \dots$$

$$v(x, t) = v_0(x, t) + \epsilon v_1(x, t) + \epsilon^2 v_2(x, t) + \dots$$

Le fondamental est constitué de :

$$p_0(x, t) = 1 - v_0 \quad \text{et} \quad v_0(x, t) = 1$$

Donc d'après le bilan de masse :

$$\int_0^t (p_1 + v_0^2 x) dx = 0$$

et :

$$\int_0^t p_i dx = 0 \quad i > 1$$

Nous aurons donc à résoudre successivement les systèmes :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x} &= - \frac{\partial p_1}{\partial t} & (61) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} &= - \frac{\partial p_1}{\partial x} - 1 & (62) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} x &= 0; \quad v_1 = 0 \\ \int_0^t p_1 dx &= - \frac{v_0^2}{2} t^2 & (63) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial x} &= -\frac{\partial p_i}{\partial t} & (64) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial t} &= -\frac{\partial p_i}{\partial x} - f_{i-1} & (65) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} x &= 0; & v_i &= 0 \\ \int_0^t p_i dx &= 0 & & (66) \end{aligned} \right.$$

Nous ferons encore l'hypothèse sur la forme des solutions :

$$\begin{aligned} v_i &= c_i x \\ p_i &= a_i x + b_i \end{aligned}$$

Approximation d'ordre 1.

La condition :

$$\int_0^t p_1 dx = -v_0^2 \frac{t^2}{2}$$

entraîne :

$$a_1 \frac{t}{2} + b_1 = -v_0^2 \frac{t}{2}$$

L'équation (61) conduit après pondération à :

$$\begin{aligned} \int_0^t \left[c_1 + x \frac{da_1}{dt} + \frac{db_1}{dt} \right] dx &= \\ \int_0^t \left[c_1 + \left(x - \frac{t}{2} \right) \frac{da_1}{dt} - \frac{a_1}{2} - \frac{v_0^2}{2} \right] dx &= 0 \end{aligned}$$

soit :

$$c_1 = \frac{a_1 + v_0^2}{2}$$

De même l'équation (62) donne :

$$\int_0^t \left(x \frac{dc_1}{dt} + a_1 + 1 \right) dx = 0$$

soit :

$$\frac{t}{2} \frac{dc_1}{dt} + 2c_1 = -(1 - v_0^2)$$

La première approximation est donc, puisque

$$c_1 = -\frac{1 - v_0^2}{2} \quad (67)$$

$$v_1(x, t) = -\frac{(1 - v_0^2)}{2} x \quad (68)$$

$$p_1(x, t) = -x + \frac{t}{2} (1 - v_0^2) \quad (69)$$

Approximation d'ordre 2 et suivantes.

La condition de balance de masse (66) impose :

$$\frac{a_i t}{2} + b_i = 0$$

La pondération sur l'intervalle $[0, t]$ donne pour l'équation (64) :

$$\int_0^t \left[c_i + \left(x - \frac{t}{2} \right) \frac{da_i}{dt} - \frac{a_i}{2} \right] dx = 0$$

soit :

$$a_i = 2c_i$$

La pondération appliquée à l'équation (65) donne :

$$\frac{t}{2} \frac{dc_i}{dt} + 2c_i = -\frac{1}{t} \int_0^t f_{i-1} dx \quad (70)$$

Comme précédemment nous poserons :

$$c_i = \gamma_i t^{i-1}$$

et :

$$\frac{1}{t} \int_0^t f_{i-1} dx = -\delta_i t^{i-1}$$

La solution particulière de l'équation (70), qui seule nous importe, est donc :

$$c_i = \frac{2^{i-1} \delta_i}{3+i}$$

D'après le développement de la fonction $f(v)$:

si, $i = 2p$:

$$\begin{aligned} f_{2p} &= v_{2p}^2 + 2 \sum_{j=1}^{p-1} v_{p-j} v_{p+j} = 2 x t^{2p-1} \gamma_0 \gamma_{2p} \\ &\quad + x^2 t^{2p-2} [\gamma_p^2 + 2 \sum_{j=1}^{p-1} \gamma_{p-j} \gamma_{p+j}] \end{aligned}$$

si, $i = 2p + 1$:

$$\begin{aligned} f_{2p+1} &= 2 \sum_{j=0}^p v_{p-j} v_{p+1+j} = 2 x t^{2p} \gamma_0 \gamma_{2p+1} \\ &\quad + 2 x^2 t^{2p-1} \sum_{j=0}^{p-1} \gamma_{p-j} \gamma_{p+1+j} \end{aligned}$$

d'où :

$$v_{2p} = \frac{-2}{2p+3} x t^{2p-1} \left[\gamma_0 \gamma_{2p-1} + \frac{2}{3} \sum_{j=0}^{p-2} \gamma_{p-1-j} \gamma_{p+j} \right] \quad (71)$$

$$v_{2p+1} = -\frac{x t^{2p}}{p+2} \left[\gamma_0 \gamma_{2p} + \frac{1}{3} \gamma_p^2 + \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{p-1} \gamma_{p-j} \gamma_{p+j} \right] \quad (72)$$

Remarquons que γ_0 a été introduit artificiellement surtout par souci d'homogénéité dans les symboles (mais le terme fondamental :

$$v_0(x, t) = 1 = \gamma_0$$

ne dépend pas de x et ceci explique la différence de coefficient qui apparaît dans les formules).

Le calcul direct ou l'application des formules conduisent aux résultats suivants :

$$\gamma_2 = \frac{1 - v_0^2}{5}; \quad \gamma_3 = -\frac{1 - v_0^2}{180} (17 - 5 v_0^2);$$

$$\gamma_4 = \frac{1}{7 \times 90} (1 - v_0^2) (29 - 17 v_0^2)$$

$$v_2 = x t \left(\frac{1 - v_0^2}{5} \right);$$

$$v_3 = -\frac{x t^2}{180} (1 - v_0^2) (17 - 5 v_0^2);$$

$$v_4 = \frac{x t^3}{630} (1 - v_0^2) (29 - 17 v_0^2)$$

$$p_2 = (2x - t) t \frac{(1 - v_0^2)}{5};$$

$$p_3 = - \frac{(2x - t) t^2}{180} (1 - v_0^2) (17 - 5 v_0^2);$$

$$p_4 = \frac{(2x - t) t^3}{630} (1 - v_0^2) (29 - 17 v_0^2)$$

Ainsi lorsque l'ouverture est effectuée à partir du repos ($v_0 = 0$) le régime transitoire est approximativement représenté par les relations :

$$p(x, t) = 1 - \varepsilon \frac{2x - t}{2} + \frac{1}{5} \varepsilon^2 t (2x - t) - \frac{17}{180} \varepsilon^3 t^2 (2x - t) + \frac{29}{630} \varepsilon^4 t^3 (2x - t) + \dots \quad (73)$$

et :

$$v(x, t) = 1 - \varepsilon \frac{x}{2} + \varepsilon^2 \frac{tx}{5} - \frac{17}{180} \varepsilon^3 t^2 x + \frac{29}{630} \varepsilon^4 t^3 x + \dots \quad (74)$$

En front d'onde ($x = t$) la valeur approchée de la pression est :

$$p(t, t) = 1 - \varepsilon \frac{t}{2} + \frac{\varepsilon^2 t^2}{5} - \frac{17 \varepsilon^3 t^3}{180} + \frac{29}{630} \varepsilon^4 t^4 \quad (75)$$

Comme pour l'onde positive d'aval la convergence de cette série sera satisfaisante tant que εt est environ inférieur à 2.

Méthode d'interpolation

Comme nous l'avions indiqué au début de cet exposé, on peut aussi envisager de déterminer une solution approchée en utilisant des informations locales, telles que la pression en front d'onde et le gradient de pression à l'aval.

Indiquons tout d'abord comment l'on peut obtenir la loi d'évolution de la pression en front d'onde. Pour illustrer la méthode, nous considérerons encore le cas d'une diminution brusque de débit à l'aval de la conduite.

Nous utiliserons les résultats de la théorie des caractéristiques qui met en évidence dans le plan (x, t), les droites d'équation $x + t = Cte$ qui correspondent à des ondes ou perturbations descendantes et les droites d'équation $x - t = Cte$ afférentes à des ondes montantes.

Les lois de fonctionnement hydraulique sont :

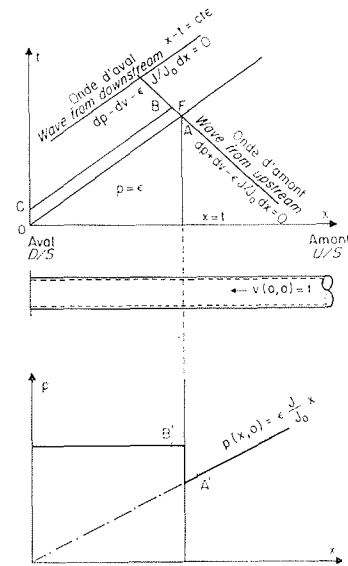
— le long de la caractéristique d'amont $x + t = Cte$:

$$dp + dv - \varepsilon \frac{J}{J_0} dx = 0 \quad (76)$$

— le long de la caractéristique d'aval $x - t = Cte$:

$$dp - dv - \varepsilon \frac{J}{J_0} dx = 0 \quad (77)$$

Considérons en particulier l'onde d'amont issue du point A et qui rencontre en F l'onde à front



5/

raide provoquée par la coupure de débit à l'aval en 0. Soit B le point situé immédiatement derrière le front d'onde et atteint par l'onde d'amont.

D'après la loi de fonctionnement, puisque l'intervalle $x_A - x_B$ est aussi petit que l'on veut, on obtient la relation :

$$p_A + v_A = p_B + v_B$$

soit, puisque le point A est situé dans la zone de régime permanent :

$$p_B + v_B = \varepsilon x + 1 \quad (78)$$

Mais le point B du plan (x, t) est aussi atteint par l'onde d'aval issue de C immédiatement après la manœuvre.

Les conditions de fonctionnement sur l'onde d'aval CB vérifient la relation :

$$dp - dv - \varepsilon \frac{J}{J_0} dx = 0$$

soit :

$$p_c - v_c = p_0 - v_0 - \int_0^x \varepsilon \frac{J}{J_0} dx \quad (79)$$

p_c et v_c sont connues. Ce sont les conditions hydrauliques à l'aval immédiatement après la fermeture :

$$v_c = v(0, t) = v_0 \quad \text{et} \quad p_c = 1 - v_0$$

Ainsi donc, la relation différentielle (78) représente bien l'évolution des quantités p_F et v_F en front d'onde (puisque la caractéristique CB peut être rapprochée de la caractéristique OF jusqu'à être confondue).

En posant comme précédemment $J/J_0 = f(v)$ il vient :

$$dp_F - dv_F = \varepsilon f(v_F) dx = 0 \quad (80)$$

Mais les quantités p_F et v_F vérifient aussi la relation :

$$p_F + v_F = \varepsilon x + 1$$

Cette relation est toujours valable en front

d'onde. Donc lorsque celui-ci se déplace, c'est-à-dire lorsque x varie, on peut écrire :

$$dp_F + dv_F = \varepsilon dx \quad (81)$$

Par combinaison des équations différentielles (80) et (81) on peut éliminer p_F :

$$2 dv_F = \varepsilon [1 - f(v_F)] dx$$

Cette équation à variables séparées conduit à l'expression de x en fonction de v_F vitesse immédiatement derrière le front d'onde :

$$\frac{\varepsilon x}{2} = \int_{v_0}^{v_F} \frac{dv}{1 - f(v)}$$

soit :

$$F(v) = \int_0^v \frac{dv}{1 - f(v)}$$

$$x = \frac{2}{\varepsilon} [F(v_F) - F(v_0)]$$

ou encore :

$$v = F^{-1} \left[\frac{\varepsilon x}{2} + F(v_0) \right]$$

Si :

$$f(v) = v^2$$

on obtient :

$$v = \text{th} \left(\frac{\varepsilon x}{2} + \text{Arg th } v_0 \right) = \frac{\text{th}(\varepsilon x/2) + v_0}{1 + v_0 \text{th}(\varepsilon x/2)}$$

D'après l'équation (78), la pression en front d'onde a pour valeur :

$$p = 1 + \varepsilon x - \frac{\text{th}(\varepsilon x/2) + v_0}{1 + v_0 \text{th}(\varepsilon x/2)}$$

Si la coupure du débit est totale ($v_0 = 0$), on retrouve la formule proposée par Ludwig :

$$p = 1 + \varepsilon x - \text{th}(\varepsilon x/2)$$

Si on considère une loi de perte de charge de la forme :

$$f(v) = \alpha v + (1 - \alpha) v^2$$

$$p = 1 + \varepsilon x + \frac{\alpha}{2(1 - \alpha)} - \frac{1 - 0,5\alpha}{1 - \alpha} \times$$

$$\times \text{th} \left[(1 - 0,5\alpha) \frac{\varepsilon x}{2} + \text{Arg th} \frac{\alpha}{2(1 - 0,5\alpha)} \right] \quad (82)$$

Il nous semble remarquable que la théorie des caractéristiques habituellement utilisée comme fondement de méthode de calcul pas à pas, puisse fournir un résultat explicite aussi important que la valeur de la pression en front d'onde.

Par ailleurs, la connaissance à chaque instant du débit à l'extrémité aval $v(0, t)$ permet la détermination du gradient $\partial p / \partial x$ en ce point. En effet, d'après l'équation dynamique :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{x=0} = \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_{x=0} + \varepsilon f(v)_{x=0}$$

Nous allons utiliser ces différents résultats pour déterminer la ligne piézométrique. En première

étape nous supposons que cette ligne piézométrique a la forme d'une parabole, c'est-à-dire :

$$p = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2$$

Pour déterminer les trois paramètres :

$$a_0(t), \quad a_1(t) \quad \text{et} \quad a_2(t)$$

nous disposons d'informations en nombre suffisant :

1° la valeur de p en front d'onde c'est-à-dire pour $x = t$:

$$p_F(t) = a_0(t) + ta_1(t) + t^2a_2(t) \quad (83)$$

2° le gradient de pression à l'extrémité aval :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{x=0} = a_1(t) = \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_{x=0} + \varepsilon f[v(0, t)]$$

Dans le cas de manœuvre brusque :

$$v(0, t) = v_0 \quad \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_{x=0} = 0$$

d'où :

$$a_1(t) = + \varepsilon f(v_0) = \varepsilon f_0 \quad (84)$$

3° le bilan de masse global pour la portion d'écoulement atteint par la perturbation :

$$\int_0^t [v(x, 0) - v(0, t)] dt = \int_0^x [p(x, t) - p(x, 0)] dx$$

Soit, dans le cas de coupure brusque :

$$(1 - v_0)t = a_0t + \frac{a_1}{2} t^2 + a_2 \frac{t^3}{3} - \frac{\varepsilon}{2} t^2 \quad (85)$$

Si l'on désirait prendre comme approximation de ligne piézométrique un polynôme d'ordre plus élevé, on pourrait faire intervenir une pondération des équations différentielles.

Puisque $a_1 = \varepsilon f_0$, a_0 et a_2 sont solution du système :

$$a_0 + t^2a_2 = p_F(t) - t\varepsilon f_0$$

$$a_0 + \frac{t^2}{3} a_2 = 1 - v_0 + \frac{t}{2} \varepsilon [1 - f_0]$$

d'où :

$$a_0 = \frac{3}{2} \left[1 - v_0 + \varepsilon \frac{t}{2} (1 - f_0) - \frac{v_F}{3} + \varepsilon \frac{t}{3} f_0 \right] \quad (86)$$

$$a_2 = - \frac{3}{2t^2} \left[1 - v_0 + t \frac{\varepsilon}{2} (1 + f_0) - p_F(t) \right] \quad (87)$$

Evidemment, lorsque t est petit, la partie principale du numérateur dans l'expression de $a_2(t)$ doit être en t^2 . Dans le cas de la fermeture brusque, on montre aisément que cette partie principale est en t^3 et l'on obtient :

$$a_2 \approx \frac{1}{16} \varepsilon^3 t + \eta_2 \varepsilon^5 t^3 \quad (88)$$

Pour t voisin de zéro, on obtient aussi :

$$a_0 \approx 1 + \varepsilon \frac{t}{2} - \frac{1}{48} \varepsilon^3 t^3 + \eta_0 \varepsilon^5 t^5 \quad (89)$$

Suivant l'approximation parabolique, la ligne piézométrique a pour expression dans le cas général :

$$p(x, t) = \frac{3}{2} \left[1 + \varepsilon \frac{t}{2} - \frac{p_F}{3} \right] + \varepsilon f_0 x - \frac{3x^2}{2t^2} \left[1 - v_0 + t \frac{\varepsilon}{2} (1 + f_0) - p_F(t) \right] \quad (90)$$

Dans le cas d'une fermeture totale de débit, dans l'hypothèse d'une loi de perte de charge quadratique :

$$p(x, t) \approx 1 + \varepsilon \frac{t}{2} - \frac{1}{48} \varepsilon^3 t^3 + \frac{1}{16} \varepsilon^3 t x^2 + \varepsilon^5 (\eta_0 t^5 + \eta_2 x^2 t^3)$$

Dans la section de manœuvre :

$$p(0, t) \approx 1 + \varepsilon \frac{t}{2} - \frac{1}{48} \varepsilon^3 t^3 + \dots \quad (91)$$

Cette valeur diffère de celle obtenue par la méthode précédente seulement dans l'évaluation du terme de troisième ordre.

En front d'onde :

$$p(t) \approx 1 + \varepsilon \frac{t}{2} + \frac{1}{24} \varepsilon^3 t^3 + \dots \quad (92)$$

Là encore, l'écart entre les approximations données par les deux théories simplifiées n'est pas très important.

Notons enfin que dans cette deuxième méthode nous avons conservé le symbole ε par souci d'homogénéité avec la première méthode, mais le changement de grandeur de référence permet naturellement d'éliminer ε en considérant les nouvelles variables $t\varepsilon$ et εx .

Applications.

A quoi peuvent servir les solutions approchées obtenues précédemment compte tenu de l'accumulation des hypothèses de base ou introduites en cours de résolution ?

Elles peuvent par exemple, donner rapidement une idée sur l'évolution de la ligne piézométrique lors d'un incident dans une station de pompage placée en tête d'une conduite principale d'un réseau d'irrigation. Elles permettent aussi de localiser facilement en première approximation les points délicats du tracé d'un oléoduc (surpression maximale, risque de cavitation). Dans le cas des conduites d'amenée d'une usine hydroélectrique, les formules obtenues fournissent facilement la pression maximale atteinte à l'entrée de l'usine juste avant le retour de l'onde de dépression due à l'action de la cheminée. Le temps réduit correspondant est $t \approx 2L/CT^*$, soit $t = 2$. Ainsi, dans le cas de fermeture brusque,

la surpression au distributeur sera en valeur réduite voisine de :

$$p \approx 1 + \varepsilon - \frac{2}{9} \varepsilon^3 + \frac{2}{27} \varepsilon^5 - \dots$$

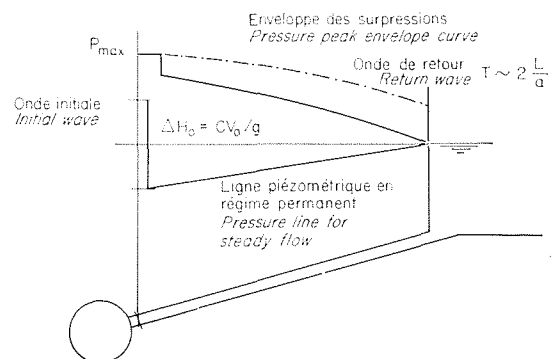
d'après la relation (56).

et :

$$p \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{th} \varepsilon$$

d'après la relation (90).

ε est le rapport de la perte de charge totale sur la longueur de la conduite en régime permanent à l'amplitude de la surpression due à la coupure totale du débit initial. Pour une usine de haute chute, on peut admettre que ε est dans la plupart des cas inférieur à 20 %. Alors les deux formules ci-dessus donnent respectivement $p = 1,198$ et $p = 1,197$. La pression maximale est donc très légèrement inférieure à celle obtenue en superposant la surpression brusque à la pression statique. L'enveloppe des pressions le long de la conduite est obtenue en faisant $t = 2 - x$ dans la relation $p(x, t)$.



6/

A titre d'exemple, nous donnons aussi la comparaison des résultats obtenus d'une part à l'aide d'un calculateur numérique suivant la méthode des caractéristiques, et d'autre part, au moyen des approximations proposées.

Le problème examiné concerne l'écoulement transitoire provoqué par la fermeture brusque et totale d'une vanne placée sur un oléoduc. En régime permanent, il circule un débit :

$$Q(x, 0) = 0,895 \text{ m}^3/\text{s}$$

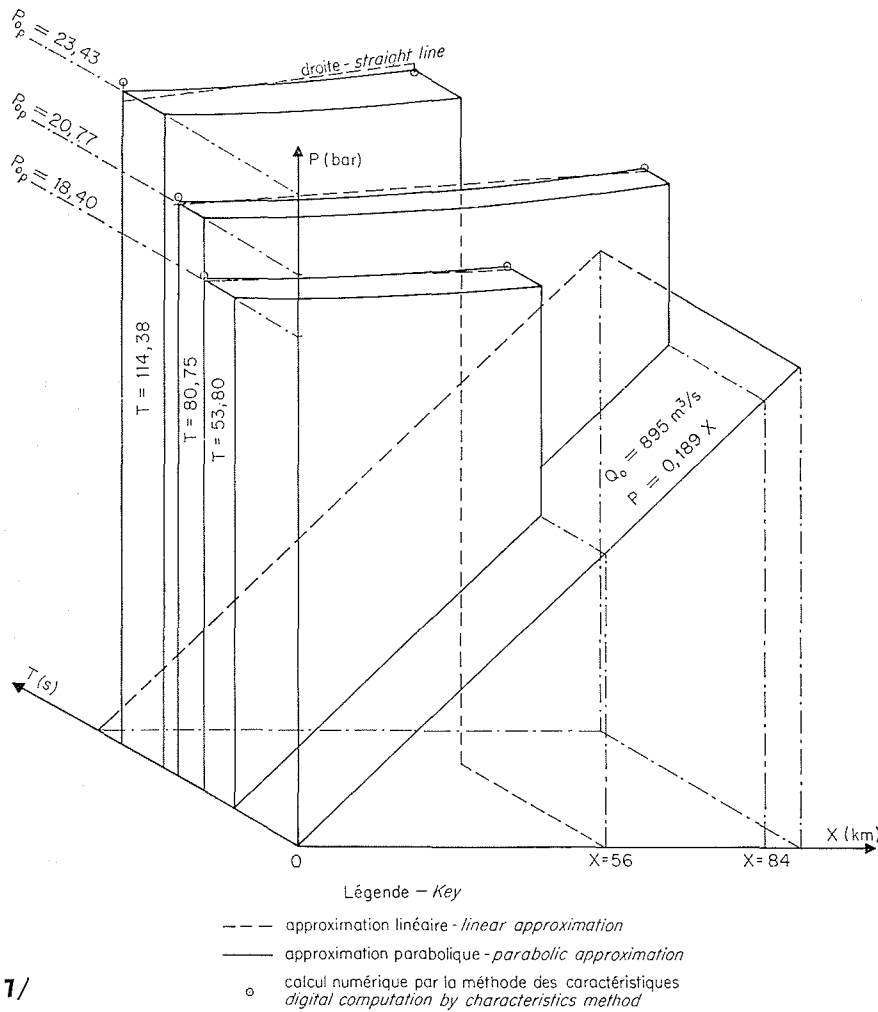
à la vitesse moyenne :

$$v(x, 0) = 1,53 \text{ m/s}$$

La masse spécifique du fluide est $\rho = 832 \text{ kg/m}^3$. La perte de charge supposée quadratique est telle que la pression équivalente à la cote piézométrique passe de 41,09 bar à 23,90 bar sur la longueur de la conduite qui est de 91 km. La célérité supposée constante est $C = 1040 \text{ m/s}$.

La surpression due à la fermeture brusque est :

$$P^* = \rho C V_0 = 13,24 \text{ bar}$$



7/

Le coefficient ϵ est donc égal à :

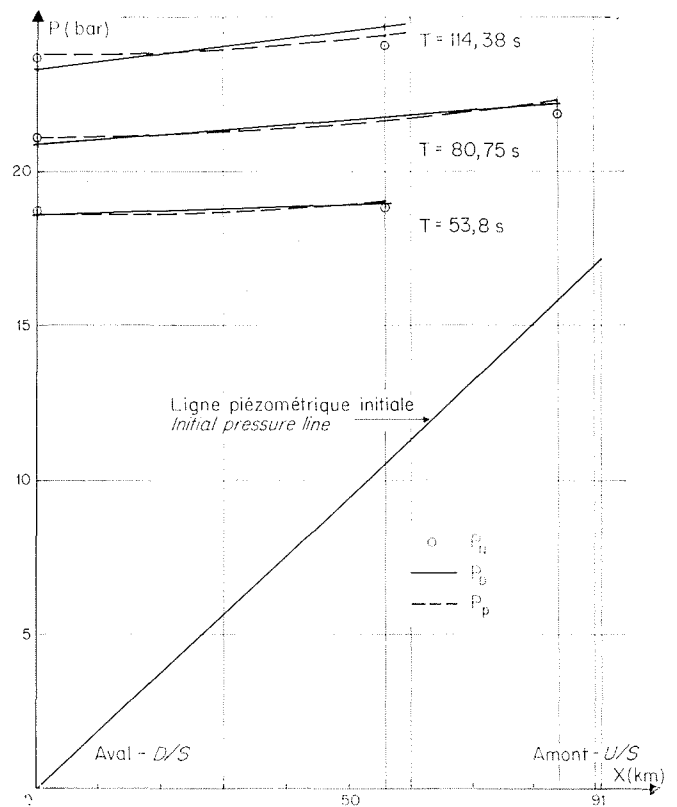
$$\epsilon = \frac{J_0 L}{P^*} = \frac{41,09 - 23,90}{13,24} = \frac{17,19}{13,24} \approx 1,3$$

Evidemment ce coefficient est loin d'être petit comme il a été postulé dans le développement en série inspiré de la méthode du petit paramètre de perturbation.

La confrontation des résultats est présentée sur le tableau 1 et la figure 7.

Tableau 1

T (s)	X (km)	P ₀ (bar)			P _X (bar)		
		P _n	P _D	P _P	P _n	P _D	P _P
0	0	13,24	13,24	13,24	13,24	13,24	13,24
20,2	21	15,22	15,21	15,22	15,24	15,23	15,23
53,8	56	18,46	18,35	18,40	18,80	18,73	18,79
80,7	84	20,95	20,63	20,77	22,02	21,91	22,02
100,9	70	22,74	22,72	23,05	23,20	24,19	24,12
144,4	56	23,89	23,05	23,43	24,04	24,39	24,12
148,0	21	26,61	25,12	25,80	26,59	25,84	25,92
168,2	0	28,14	26,23	27,15	28,14	26,23	27,15



8/

de succès par une fermeture brusque dont le déphasage par rapport au débit de la fermeture graduelle est déterminé par pondération des débits évacués.

La méthode des perturbations permet d'introduire des conditions à la limite dans la section de manœuvre plus variées. En particulier, on peut envisager de tenir compte d'une modulation du débit due aux variations de pression au droit du distributeur.

Enfin l'influence de variations légères longitudinales des caractéristiques peut être prise en compte. Ce serait par exemple le cas d'une conduite non cylindrique, de la célérité variable avec la pression lorsque la variation d'altitude est importante.

Ces considérations suggèrent d'appliquer ces méthodes approchées à l'étude d'autres problèmes

de perturbation telle que la propagation d'intumescences.

En définitive, l'emploi d'approximations dépend beaucoup du problème posé... et de la tournure d'esprit du chercheur suivant la prépondérance accordée à la profondeur ou à la largeur de champ d'observation. La profondeur de champ est améliorée par l'emploi d'un calculateur numérique qui donne l'importance au renseignement quantitatif à la précision souvent excellente et aux détails très bien cernés. Il s'agit en somme d'une observation à la loupe ou au microscope.

Parallèlement, une théorie simplifiée donne d'un phénomène une vision qualitative sur grand écran panoramique qui permet d'apprécier très simplement l'influence des différents paramètres.

Discussion

Président : M. P. BERGERON

M. THIRRIOT dit, avant d'exposer son rapport, être très heureux de présenter cette communication sous la présidence de M. P. BERGERON, dont le père, par sa pensée, a guidé les hydrauliciens, depuis des décennies dans l'étude des coups de bélier et, plus généralement, dans l'étude des propagations d'ondes.

M. THIRRIOT ajoute qu'il a été initié par son Maître, le Professeur ESCANDE, qui a fait un très large emploi des méthodes de M. L. BERGERON, et ceci lui a donné le goût d'étudier les coups de bélier qui constituent, peut-on dire, le violon d'Ingres de l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse.

M. THIRRIOT présente sa communication et conclut en disant qu'il ne partage pas avec M. le Président la foi dans les calculatrices électroniques que celui-ci a manifestée en concluant la discussion sur la communication de M. GAULHET.

M. le Président remercie M. THIRRIOT de son exposé. Il ne voudrait pas que celui-ci ait trahi sa pensée en généralisant son observation relative à la mise en abaque des réservoirs d'air et des volants, qui constituent des cas particuliers et où la méthode graphique de propagation d'ondes, plus rigoureuse ici que celle des oscillations en masse, peut être introduite dans les calculatrices électroniques.

M. GUITON veut tirer de l'exposé de M. THIRRIOT une certaine « philosophie » pour la raccrocher à une idée de M. P. BERGERON.

Il s'agit, dans l'application faite par M. THIRRIOT, d'une très longue conduite à forte perte de charge, terminée, par exemple, à l'aval par une vanne (point O de la figure 1.)

Il existe dans la conduite, à l'instant initial une pression p_0 en O, correspondant à une hauteur piézométrique $H_0 = (p_0/\rho g)$, une vitesse v_0 , un débit Q_0 et une pente J_0 de la ligne piézométrique.

Supposons que l'on ferme brusquement la vanne à un instant donné. Il se produit immédiatement en O, au droit de celle-ci, une surpression qui, avec la notation habituelle « a » pour la célérité des ondes, et traduite en hauteur piézométrique, a pour valeur comme chacun sait : aV_0/g .

Cette surpression aV_0/g est maintenue en O tant qu'aucune onde en retour ne revient de l'amont.

Le front d'onde produit par la fermeture brusque de la vanne se propage vers l'amont avec la célérité a , remontant sur la ligne piézométrique initiale en se déformant. Au temps t après la fermeture, il a parcouru une distance $L = at$ et est parvenu en F.

M. P. BERGERON imagine que, juste à cet endroit, il y a un clapet qui ne laisse plus sortir l'eau qui a pénétré jusqu'au temps t dans le tronçon CF avec le débit Q_0 inchangé.

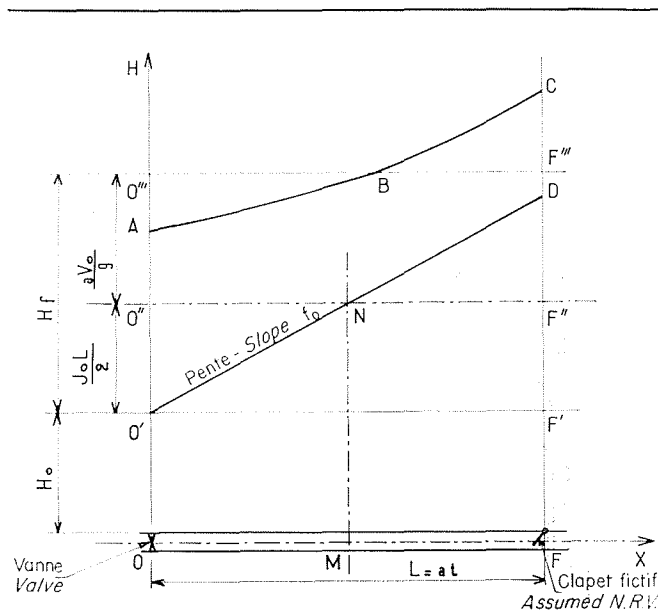
Si ce clapet en F s'était fermé en même temps que la vanne en O, la surpression piézométrique finale au repos

après amortissement des oscillations, comptée au-dessus de H_0 , serait $J_0 L/2$ correspondant à l'horizontale O''F'' de la figure, la moitié MF du tronçon s'étant décompressée d'un volume proportionnel au triangle NF''D, qu'elle a fourni à l'autre moitié OM du tronçon qui, elle, s'est comprimée et a emmagasiné un volume égal, proportionnel au triangle O''C''N (en toute rigueur, il faudrait parler des masses et non des volumes).

Mais le tronçon OF a continué à se remplir après la fermeture de la vanne, car pendant tout le temps $t = L/a$, le débit Q_0 a continué à traverser le clapet. De sorte que la cote piézométrique finale uniforme au repos après amortissement des oscillations est donnée par l'horizontale O''F'''. L'aire du rectangle O''O'''F''' correspond à ce survolume $Q_0 L/a$ emmagasiné et l'on peut voir facilement que la hauteur de ce rectangle est aV_0/g .

La surpression finale après amortissement, mesurée en hauteur piézométrique, est ainsi :

$$H_f = O'O''' = \frac{aV_0}{g} + \frac{J_0 L}{2}$$



1/

CI. THIRRIOT

Or, si l'on tient compte de ce que le coefficient ε de M. THIRRIOT peut s'écrire, avec les notations ci-dessus :

$$\varepsilon = \frac{J_0 L}{\alpha V_0 / g},$$

$$\text{on voit que l'on a : } \frac{H_f}{\alpha V_0 / g} = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

On retrouve ainsi les deux premiers termes du développement de M. THIRRIOT en tenant compte de ce que son unité de temps est justement L/a et que, dans ses développements, on a donc ici $t = 1$.

M. THIRRIOT indique que l'on peut trouver $1 + (\varepsilon/2)$ sans faire le calcul.

M. GURTON ajoute que, par rapport à la ligne finale d'équilibre $O''F''$, la forme de la ligne d'onde à un instant donné $t = (L/a)$ (ligne ABC de la figure) est telle que l'on doit avoir :

$$\text{aire } AO''B = \text{aire } BF''C$$

la masse d'eau totale emmagasinée étant la même que ci-dessus.

Soit :

$$AO'' = m \quad \text{et} \quad F''C = n$$

Les trois premiers termes du développement de M. THIRRIOT sont alors :

$$\text{— à la vanne : } \frac{H(O, L/a)}{\alpha V_0 / g} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{m}{\alpha V_0 / g}$$

$$\text{— au front d'onde : } \frac{H(F, L/a)}{\alpha V_0 g} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\eta}{\alpha V_0 / g}$$

Si l'on suppose une répartition linéaire des pressions en fonction de l'abscisse (ligne ABC rectiligne), l'égalité des aires impose $m = n$. C'est bien ce qu'on trouve dans la communication de M. THIRRIOT qui donne dans cette hypothèse :

$$\frac{H(O, L/a)}{\alpha V_0 / g} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^3}{36} + \dots$$

$$\frac{H(F, L/a)}{\alpha V_0 g} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^3}{36} + \dots$$

Si l'on suppose, par contre, une répartition parabolique des pressions, c'est-à-dire que la ligne d'onde ABC est une parabole d'axe OO' , l'égalité des aires $AO''B$ et $BF''C$ donne $m = (n/2)$.

C'est bien ce qu'on trouve dans la communication de M. THIRRIOT qui donne, dans cette deuxième hypothèse :

$$\frac{H(O, L/a)}{\alpha V_0 / g} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{48} \varepsilon^3 + \dots$$

$$\frac{H(F, L/a)}{\alpha V_0 g} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{24} \varepsilon^3 + \dots$$

Il semble que c'est ainsi que, en essayant de mettre assez simplement en évidence leur sens physique, on peut résumer les conclusions de M. THIRRIOT dans le cas de fermeture brusque complète d'une vanne à l'aval d'une longue conduite à perte de charge importante.

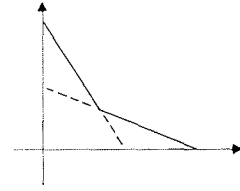
M. GURTON pense d'autre part que, à propos du système d'équations aux dérivées partielles dont M. THIRRIOT est parti et dans lequel il a introduit la perte de charge unitaire dans le second membre de l'équation dynamique, il convient particulièrement ici, à la S.H.F., d'évoquer la mémoire de M. GADEN et de M. Louis BERGERON.

En reprenant les notations classiques, ce système d'équations s'écrit, comme chacun sait :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = g \frac{\partial h}{\partial x} - gJ \quad \text{équation dynamique;}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{g}{a^2} \frac{\partial h}{\partial t} \quad \text{équation de continuité.}$$

(J est ici la perte de charge unitaire suivant la notation de M. THIRRIOT.)



2/

Pour être complet, il faudrait tenir compte dans le second membre de l'équation dynamique, non seulement de J , mais aussi de $V \partial V / \partial x$ qui peut ne pas être négligeable devant J .

Ceci a conduit M. Louis BERGERON en 1926, dans les *Mémoires de la Société des Ingénieurs Civils*, puis plus tard M. GADEN dans la *Revue Générale de l'Hydraulique*, à écrire l'équation dynamique :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = g \frac{\partial h}{\partial x}$$

avec :

$$H = h + \frac{V^2}{2g} + JL$$

En confondant h et H dans l'équation de continuité, on aboutit pour les épures de propagation d'ondes à des droites caractéristiques en H au lieu de h .

D'après M. L. BERGERON et M. GADEN on cerne ainsi la vérité de plus près car l'erreur introduite dans l'équation de continuité en confondant h et H , a moins d'importance par suite du facteur très petit $1/a^2$, que celle qu'on élimine dans l'équation dynamique.

M. THIRRIOT dit que l'on pourrait discuter ce point parce qu'on déplace l'intervention de la perte de charge de l'équation dynamique vers l'équation de continuité.

M. le Président ajoute que, effectivement, le fait que l'équation dynamique est alors exacte, alors que l'équation de continuité ne l'est plus, a donné lieu à des discussions dans les années 1920.

M. DUBIN dit que, dans la pratique, les fermetures se font par des vannes manipulées à la main et ne sont donc pas brusques comme celles étudiées par M. THIRRIOT. Celui-ci a-t-il fait des études sur des fermetures lentes?

M. THIRRIOT indique avoir fait des études sur des fermetures non pas lentes, mais rapides, en essayant de trouver toujours, par une méthode de pondération de la masse, la fermeture brusque équivalente.

M. THIRRIOT croyait, en ce qui concerne les fermetures lentes, à l'issue de certaines études qu'il a faites et publiées il y a deux ans, que l'hypothèse de l'oscillation en masse paraissait satisfaisante, c'est pourquoi il n'a pas étudié de telles manœuvres.

M. DUBIN dit que tous les traités hydrauliques parlent de la fermeture linéaire, c'est-à-dire la fermeture qui, pendant un temps donné, coupe un débit donné; ceci est une vue de l'esprit et il faudrait faire des études plus pratiques.

Pour les vannes papillon, on ne connaît qu'une loi, c'est la fermeture linéaire mécanique, et ceci n'a absolument rien de commun avec ce que l'on appelle la fermeture linéaire hydraulique.

M. THIRRIOT dit que, bien qu'Universitaire, il a une formation d'ingénieur et qu'il a le souci du pratique. Il a cherché à représenter ces fermetures pratiques ou graduelles en les simulant par ce que M. ESCANDE appelle les fermetures bi-linéaires.

La fermeture de débit est supposée être représentée par le schéma 2. L'influence essentielle est celle de la deuxième partie de la manœuvre. Comme l'a déjà fait remarquer M. ZAOUÏ, la fin de la fermeture est primordiale.

M. DUBIN, ayant déjà fait les études, n'a pas eu besoin d'approximation. La méthode de M. THIRRIOT a donné les mêmes résultats. M. DUBIN a pris la vanne selon les lois données pour la perte de charge, suivant le degré de fermeture de la vanne et, avec ces lois, a pu établir ce qui se passait dans le cas de fermetures lentes, avec des périodes de fermetures plus ou moins longues. Cette méthode est celle de M. BERGERON étudiée par une machine électronique.

M. THIRRIOT a traité ces problèmes, mais par voie numérique.

M. le Président aurait aimé que soit discutée la question des approximations, mais le temps imparti à la discussion est écoulé.