ÉTUDE DE L'ÉCOULEMENT D'UNE ÉMULSION

PREMIÈRE PARTIE
**Étude théorique
du mouvement d'une bulle**
Effet fusée. Pébullon [1]

PAR L. CHINCHOLLE *

La mécanique des émulsions intéresse de nombreuses industries. Beaucoup d'études traitent de ce problème. Mais les résultats sont divergents [2] à cause, semble-t-il, des conditions expérimentales propres à chaque appareil. Deux voies de recherche se dessinent. Ou bien elles analysent les phénomènes globaux en considérant le fluide émulsion comme un fluide spécial. Ou bien elles abordent le problème à la base, à partir d'une bulle isolée, mais en négligeant bien souvent les phénomènes liés à l'inertie du liquide entourant la bulle.

Nous nous sommes proposé de comprimer une émulsion dans une pompe centrifuge. Les multiples difficultés bien connues des constructeurs et des utilisateurs de pompes n'ont pas tardé à apparaître. Pour les vaincre et ainsi faciliter le pompage des émulsions, il fallait tout d'abord connaître les forces qui agissent sur les bulles de gaz. L'une d'elles nous a paru jouer un rôle primordial. Nous l'avons étudiée dans une théorie générale. Le problème de l'écoulement d'une émulsion dans une pompe centrifuge n'a plus été qu'une simple application.

La connaissance de cette force a permis de proposer des réponses à de nombreuses questions que se posent les hydrauliciens et les chimistes notamment lors des opérations de transfert de chaleur, de masse et, plus généralement, d'énergie.

Nous avons appelé « effet fusée » la propriété

que possède une bulle de s'autopropulser par variation de volume.

Notre travail se résume à une question fort simple. Quel est le comportement d'une bulle de gaz dans un liquide où existent des gradients de pression ou de température? En particulier, dans une pompe centrifuge, une bulle va-t-elle remonter à contre-courant vers le centre? Sera-t-elle entraînée par le fluide? Ou, ce qui peut paraître une gageure, s'écoulera-t-elle plus rapidement que lui?

Nous avons mis en évidence deux points théoriques importants :

- la constance de la quantité de mouvement d'une particule équivalente au mouvement de la bulle dans son mouvement de translation;
- le mécanisme de transfert d'énergie.

Définition de l'effet fusée et du pébullon

La mécanique des suspensions étudie les dispersions dans leur ensemble, c'est-à-dire le mélange de deux phases distinctes.

La phase continue peut être liquide ou gazeuse. Nous nous intéresserons particulièrement à la première quand la phase dispersée est constituée par des bulles de gaz. Nous l'appellerons une émulsion suivant un usage courant. De plus, nous ne considérerons que des particules dont les dimensions sont beaucoup plus grandes que les dimensions moléculaires mais inférieures au millimètre.

L'effet fusée est la conséquence d'un mouvement

* Maître-Assistant à la chaire d'Electrotechnique, Faculté des Sciences de Paris.

1/

permanent. Comme il revêt une certaine importance, nous serons amené à négliger de nombreux termes secondaires notamment les forces de pesanteur.

1. Généralités.

Prenons une bulle schématisée par une sphère souple de centre de gravité O. Soit l'axe Ox qui coïncide avec la direction de la vitesse $\vec{W}$ du point O par rapport au fluide. Un point M est repéré par le rayon vecteur r et par l'angle θ . Sur la sphère, nous avons $r = R$. La vitesse de la particule fluide M par rapport au point O dépend de la vitesse de translation — $\vec{W}$ et de la vitesse radiale $\dot{r} = dr/dt$. La vitesse radiale d'un point de la surface sphérique sera $\dot{R}$. Deux cas peuvent se présenter :

- $\dot{R} > 0$: la bulle grossit : il y a explosion ;
- $\dot{R} < 0$: la bulle se réduit : c'est l'implosion.

Le mouvement d'une bulle à l'intérieur d'un liquide sera la superposition du mouvement radial et du mouvement de translation. Dès 1917 Lord Rayleigh a étudié le premier. L'autre a été considéré plus tard ainsi que la superposition des deux. Ces dernières années, plusieurs chercheurs se sont intéressés à cette étude dans des domaines divers. Nous citerons entre autres Benjamin, Ellis [3], Naudé [4], Jansen (ébullition) [5], Canavelis (cavitation) [6].

Afin de simplifier les calculs, nous avons été conduit à formuler plusieurs hypothèses de départ. Soit un liquide incompressible et sans viscosité dont la vitesse de chacune des particules dérive d'un potentiel Φ .

Les bulles qui évoluent dans ce fluide seront supposées suffisamment petites (rayon inférieur au millimètre) pour que les forces de capillarité assurent une forme sphérique.

Toutefois, dans nos calculs, nous ne ferons pas intervenir la tension superficielle et dans nos considérations expérimentales nous tiendrons compte des frottements. Il est évident que l'on ne peut pas superposer deux études effectuées avec des hypothèses différentes. Les résultats obtenus ne pourront être qu'approximatifs, mais ils permettront de proposer une solution approchée des problèmes relatifs à l'écoulement des bulles. Il existe des études partielles plus précises, mais il semble qu'il est surtout intéressant d'atteindre les caractéristiques essentielles du mouvement général des bulles.

L'étude théorique sera développée en supposant que la pression à l'intérieur de la bulle est nulle ou constante. Ensuite, nous l'étendrons à une bulle de gaz dans des conditions particulières sans envisager le cas des oscillations de volume.

2. Etude théorique.

La formule fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \Sigma \vec{F}$$

m : masse propre de la bulle ;

$\vec{V}$: vitesse absolue de la bulle ;

$\Sigma \vec{F}$: somme de toutes les forces appliquées : forces de pression, forces de frottement et forces extérieures.

Nous avons à déterminer ces différentes forces, notamment les forces de pression.

Considérons l'écoulement autour d'une bulle.

Soient :

$\Phi = \Phi(x, y, z, t)$:

le potentiel des vitesses absolues ;

$\Omega = \Omega(x, y, z)$:

le potentiel des forces extérieures ;

$f(t)$: une fonction arbitraire du temps, par exemple la pression que l'on impose à l'ensemble ;

p : la pression en un point, à un instant donné ;

v : la vitesse d'une molécule de fluide par rapport à une origine prise au centre de gravité de la particule ;

ρ : la masse volumique du fluide.

Avec un système d'axes lié à la particule, donc mobile par rapport au liquide, la relation de Bernoulli généralisée s'écrit [7] :

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{v^2}{2} + \Omega + f(t) \quad (1)$$

Notons p_∞ , v_∞ la pression et la vitesse du liquide à l'infini, c'est-à-dire en un point où la présence du corps n'apporte plus que des perturbations négligeables. La valeur de l'énergie cinétique du fluide mise en jeu décroît très rapidement au fur et à mesure qu'on s'en éloigne. Dans le cas d'un corps sphérique de rayon R , à une distance $r = 3R$, elle est égale à l'énergie cinétique totale à 1 % près [8]. Par conséquent, la perturbation apportée à l'écoulement du fluide par la présence de la sphère ne s'étend guère au-delà de trois rayons (cas d'une sphère rigide en mouvement de translation).

Dans une direction donnée, la vitesse est égale à $-\partial \Phi / \partial n$. La condition de continuité donne l'équation $\Delta \Phi = 0$ qui peut s'écrire également :

$$\iint (\partial \Phi / \partial n) ds = 0$$

en intégrant sur une surface fermée.

Les conditions aux limites caractéristiques du problème étudié permettent la détermination de la fonction Φ :

— la vitesse du liquide est nulle à l'infini ;

— à la surface de la bulle, à un instant donné, pour $r = R$, on a :

$$-\partial\Phi/\partial r = W \cos \theta + \dot{R}$$

Le potentiel des vitesses sera pris égal à :

$$\Phi = \frac{WR^3 \cos \theta}{2r^2} + \frac{R^2 \dot{R}}{r} \quad (2)$$

La relation de Bernoulli (1) nous donne la valeur de la pression en un point quelconque. Calculons successivement les différents termes qui la composent.

Dérivons tout d'abord la fonction Φ par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{R^3 \cos \theta}{r^2} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{3}{2} W \frac{R^2 \cos \theta}{r^2} \frac{dR}{dt} \\ &\quad - \frac{WR^3 \cos \theta}{r^3} \frac{dr}{dt} - \frac{1}{2} \frac{WR^3 \sin \theta}{r^2} \frac{d\theta}{dt} \\ &\quad - \frac{R^2 \dot{R}}{r^2} \frac{dr}{dt} + \frac{2R\dot{R}^2 + R^2 \ddot{R}}{r} \end{aligned}$$

L'origine des coordonnées prise au centre de la sphère est en mouvement. Pour le point fixe de l'espace que nous considérons, les valeurs de r et de θ seront, par conséquent, variables. Nous aurons :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= -W \cos \theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{W \sin \theta}{r} \\ \frac{\partial W}{\partial t} &= \frac{dW}{dt} = \dot{W} \\ \frac{dR}{dt} &= \dot{R} \end{aligned}$$

(la vitesse $\dot{R}$, à un instant donné, est supposée uniforme sur toute la surface sphérique).

Les composantes de la vitesse v s'écrivent :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial\Phi}{\partial r} &= \frac{WR^3 \cos \theta}{r^3} + \frac{R^2 \dot{R}}{r^2} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial \theta} &= -\frac{WR^3 \sin \theta}{2r^3} \end{aligned}$$

La relation de Bernoulli donne enfin en un point du fluide :

$$\begin{aligned} \frac{p'}{\rho} &= \frac{R^3}{r^2} \frac{\dot{W} \cos \theta}{2} + \frac{R^2}{r^2} \frac{3}{2} W \dot{R} \cos \theta \\ &\quad + W^2 \cos^2 \theta \left(\frac{R^3}{r^3} - \frac{R^6}{2r^6} \right) - \frac{W^2 \sin^2 \theta}{8} \frac{5R^3}{r^3} \\ &\quad + W \dot{R} \cos \theta \left(\frac{R^2}{r^2} - \frac{R^5}{r^5} \right) + 2 \dot{R}^2 \left(\frac{R}{r} - \frac{R^4}{4r^4} \right) \\ &\quad + \frac{R^2}{r} \ddot{R} + f(t) + \Omega \end{aligned} \quad (3)$$

A l'infini nous avons :

$$\frac{p_\infty}{\rho} = f(t) + \Omega_\infty$$

et, à la surface de la bulle, en supposant que le potentiel Ω est constant :

$$\begin{aligned} -\frac{p}{\rho} &= \frac{1}{2} (R\dot{W} + 3W\dot{R}) \cos \theta \\ &\quad + \frac{W^2}{16} (9 \cos 2\theta - 1) + \frac{3}{2} \dot{R}^2 + R\ddot{R} \end{aligned} \quad (4)$$

p représente la pression relative s'exerçant en un point sur la surface de la bulle.

Pour calculer la force résultante appliquée à la bulle, nous devons intégrer cette équation sur toute la surface mouillée. La bulle étant sphérique à tout instant, elle ne pourra se déformer que radialement. Par raison de symétrie, la résultante cherchée aura donc la direction du mouvement. Elle sera égale à :

$$F = - \int_0^\pi 2 \pi R \sin \theta \cdot R d\theta \cdot p \cos \theta$$

Soit :

$$\begin{aligned} -F &= \frac{2}{3} \pi R^2 \rho (R\dot{W} + 3W\dot{R}) \\ &= \frac{2}{3} \pi \rho R^3 \dot{W} + 2 \pi \rho R^2 \dot{R} W \end{aligned}$$

Posons :

$$M' = \frac{1}{2} M = \frac{2}{3} \pi \rho R^3$$

soit la moitié de la masse de liquide déplacé. La valeur classique M' est appelée la masse induite.

La force résultante s'écrit alors :

$$\vec{F} = - \left[M' \frac{d\vec{W}}{dt} + \vec{W} \frac{dM'}{dt} \right] \quad (5)$$

ou, en mettant M' en facteur :

$$\vec{F} = - M' \left(\frac{d\vec{W}}{dt} + \vec{W} \frac{3}{D} \frac{dD}{dt} \right) \quad (6)$$

La valeur de $\vec{F}$ n'est autre que la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement liée à la masse induite de la bulle :

$$\vec{F} = \frac{d(M' \vec{W})}{dt} \quad (7)$$

Nous pouvons, d'autre part, déterminer la valeur de l'énergie cinétique du liquide mis en mouvement par le passage d'une bulle. Elle est donnée par l'intégrale [7] :

$$2T = - \rho \iint \Phi \frac{\partial\Phi}{\partial n} dS$$

dS : élément de la surface baignée par le liquide;

$\partial\Phi/\partial n$: composante de la vitesse suivant la normale à dS .

Le calcul est facile dans le cas d'une bulle sphérique. On obtient :

$$2T = \frac{2}{3} \pi \rho R^3 W^2 + 4 \pi \rho R^3 \dot{R}^2$$

soit :

$$T = \frac{1}{2} M' W^2 + \frac{1}{2} M' \dot{R}^2 \quad (8)$$

Les deux termes du second membre correspondent aux résultats provenant de l'étude séparée des mouvements de translation et d'implosion. (M'

représente la masse équivalente à celle du liquide dans son mouvement radial : $M'' = 3M = 6M'$.)

Le premier terme de la formule (8) représente l'énergie cinétique de translation T' de la bulle et le second l'énergie cinétique d'implosion T'' , la somme des deux étant l'énergie cinétique totale T .

$$T = T' + T''$$

Equation du mouvement d'une bulle :

Nous traiterons le cas particulier où seules existent les forces de pression F que nous venons de définir. Elles seront appliquées à la masse m de la bulle. Nous obtenons alors les trois équations équivalentes suivantes :

$$-\left[M' \frac{d\vec{W}}{dt} + \vec{W} \frac{dM'}{dt}\right] = m \frac{d\vec{W}}{dt} \quad (9)$$

$$-M' \left[\frac{d\vec{W}}{dt} + \frac{3\vec{W}}{D} \frac{dD}{dt} \right] = m \frac{d\vec{W}}{dt} \quad (10)$$

$$-\frac{d(M' \vec{W})}{dt} = m \frac{d\vec{W}}{dt} \quad (11)$$

La comparaison des deux termes $m(d\vec{W}/dt)$ et $M'(d\vec{W}/dt)$ montre que, la masse propre m étant négligeable devant la masse induite M' , on peut l'égaliser à zéro, ce qui donne les relations équivalentes :

$$M' \frac{d\vec{W}}{dt} = -\vec{W} \frac{dM'}{dt} \quad (12)$$

$$\frac{d\vec{W}}{dt} = -\frac{3\vec{W}}{D} \frac{dD}{dt} \quad (13)$$

$$M' \vec{W} = \text{Cte} \quad (14)$$

Nous pouvons également évaluer la puissance absorbée par la bulle dans son mouvement de translation :

$$P = m \vec{W} \cdot \frac{d\vec{W}}{dt} = -\left[M' \vec{W} \frac{d\vec{W}}{dt} + W^2 \frac{dM'}{dt}\right]$$

Avec l'hypothèse précédente ($m = 0$) il en résulte :

$$M' \vec{W} \frac{d\vec{W}}{dt} = -W^2 \frac{dM'}{dt} \quad (15)$$

Nous allons interpréter les relations obtenues.

3. Définition de la particule équivalente à la bulle dans son mouvement de translation.

Considérons l'équation (12). Elle exprime qu'un corps de masse M' et de vitesse $\vec{W}$ prend une accélération $d\vec{W}/dt$ sous l'action d'une force bien définie. Les caractéristiques cinématiques de ce mouvement sont identiques à celles du mouvement de la bulle associée. Il paraît intéressant de remplacer l'équation du mouvement d'une bulle par celle d'une particule équivalente à la bulle dans son mouvement de translation (p.é. bulle). Dans le cas particulier considéré nous l'appellerons le *pébullon*.

Le pébullon est donc une quasi particule se déplaçant dans le vide. Comme elle n'est soumise à aucune force extérieure elle doit s'autopropulser et

fournir elle-même l'énergie nécessaire. Cette propulsion va se faire à la manière d'une fusée; c'est pourquoi nous avons appelé ce phénomène l'effet fusée.

La force définie ci-dessus (5) représente la résultante des forces de pression s'exerçant sur la bulle. Elle peut être interprétée comme une force d'inertie. Nous préférons dissocier son expression pour faire apparaître chacun de ses termes et leur attribuer une signification particulière :

Le premier, $-M'(d\vec{W}/dt)$, peut être considéré comme la force d'inertie classique d'un corps de masse M' soumis à l'accélération $d\vec{W}/dt$. La bulle de masse m est soumise également à cette accélération $d\vec{W}/dt$ dans son déplacement relatif par rapport au fluide. L'étude de son mouvement peut donc se ramener à celle d'un corps de masse effective $M^* = M' + m$.

Le second terme $-\vec{W}(dM'/dt)$, moins classique, apparaît comme une force nouvelle que nous considérerons dans deux cas distincts. Supposons l'accélération et la vitesse positives :

- $dM'/dt < 0$: La bulle se réduit (implosion). Il y a perte de masse induite. Le second terme $\vec{W}(dM'/dt)$ étant négatif et de signe opposé au premier, joue donc le rôle d'une force motrice ou poussée positive que nous appelons effet fusée direct par analogie avec le mode de propulsion des fusées;
- $dM'/dt > 0$: La bulle grossit (explosion). Il y a accroissement de masse induite. Cette expansion entraîne une nouvelle force de même signe que $M'(d\vec{W}/dt)$. L'inertie apparente de la bulle se trouve augmentée. La bulle est alors soumise à un effet rétrofusée.

Cet effet fusée mérite d'être précisé davantage. Soit une fusée de masse M . La quantité de combustible dM qu'elle éjecte à la vitesse $-\vec{W}$ possède une quantité de mouvement $-\vec{W}dM$ par rapport à la fusée. L'ensemble de la masse M étant supposé pris dans le vide, a une quantité de mouvement constante. Pour compenser la variation de quantité de mouvement $-\vec{W}dM$, la fusée proprement dite augmentera sa vitesse pour accroître sa quantité de mouvement d'une valeur égale et opposée $\vec{W}dM$. L'éjection des gaz provoque donc une accélération de la fusée de même sens que $\vec{W}$.

Dans notre problème, le pébullon peut être assimilé à la fusée. La variation dM' de masse induite consécutive à la diminution de volume est analogue à la masse dM des gaz éjectés. La bulle se déplace à la vitesse $\vec{W}$ par rapport au liquide. En abandonnant le pébullon, la masse dM' passe de la vitesse $\vec{W}$ à une vitesse nulle en retrouvant la vitesse du liquide. Par rapport à la bulle, cette masse dM' semble éjectée à la vitesse $-\vec{W}$ et elle entraîne une variation de quantité de mouvement égale à $-\vec{W}dM'$. Le pébullon compense celle-ci en accrois-

sant sa quantité de mouvement d'une valeur égale $\vec{W} dM'$. Il en résulte une augmentation de vitesse.

Le pébullon se comporte comme une fusée particulière qui éjecterait le combustible à une vitesse égale à sa vitesse de translation $\vec{W}$.

L'énergie cinétique de translation à un instant donné étant :

$$E_{\text{cin.tr.}} = \frac{1}{2} M'W^2 \quad \text{avec} \quad (M'W = \text{Cte})$$

nous pouvons déterminer la puissance absorbée pour accroître cette énergie cinétique :

$$\begin{aligned} P_{\text{tr}} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M'W^2 \right) = \frac{1}{2} M'W \frac{dW}{dt} \\ &= M'W \frac{dW}{dt} - \left(-\frac{1}{2} W^2 \frac{dM'}{dt} \right) \end{aligned}$$

Cette expression nous permet de dire que la puissance totale développée par le pébullon étant $M'W (dW/dt)$, elle sert pour moitié à son accélération et pour moitié à l'éjection de la masse dM'/dt à la vitesse $-\vec{W}$.

Suivant les signes respectifs des différents termes, elle peut être positive ou négative, c'est-à-dire fournie ou absorbée.

Puisque le pébullon se déplace dans le vide et qu'il fournit son énergie, nous devons associer une énergie à sa variation de masse induite :

$$\frac{dM'}{dt} = -W^2 \frac{dM'}{dt}$$

A une réduction de masse correspond un accroissement d'énergie cinétique. Inversement, une élévation de masse s'accompagne d'une diminution d'énergie cinétique.

$$m' = m'W^2$$

La masse du pébullon est soumise à la loi de variation de M' soit :

$$\frac{dM'}{dt} = K \frac{d}{dt} (\rho D^3)$$

Le terme du second membre dépend du temps et du milieu réel traversé par la bulle. Plus généralement, si α représente un paramètre quelconque caractéristique de ce milieu, la loi de variation de dM'/dt sera une fonction de $\text{grad } \alpha$.

Dans un milieu uniforme (caractéristiques constantes, $\text{grad } \alpha = 0$) le pébullon conserve tous ses paramètres fixes (vitesse, masse induite, énergie, etc.). Ces derniers varieront dès qu'il entrera dans un milieu non uniforme.

Définition de la pèbulle.

Pratiquement une bulle réelle possède une masse effective M^* qui est la somme de la masse propre m et de la masse induite M' . Elle évolue dans un milieu avec frottements sous l'action de forces de volume. On peut alors définir à l'image du pébullon la pèbulle qui est la particule équivalente de la bulle réelle dans son mouvement de translation. Elle est liée au milieu où elle puise une partie de son énergie, l'autre partie étant fournie par le pébullon.

La pèbulle est soumise notamment à une force due à l'effet fusée.

Pratiquement, dans l'équation du mouvement de la pèbulle, il est possible de mettre le terme M' en facteur. Par simplification, il apparaît alors une expression donnant la valeur de l'accélération :

$$\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_f + \vec{\Gamma}_t + \vec{\Gamma}_A + \Sigma \vec{\Gamma}_i$$

$$\vec{\Gamma}_f = -\frac{3}{D} \frac{\vec{W}}{dt} : \text{accélération due à l'effet fusée;}$$

$\vec{\Gamma}_t$: accélération consécutive aux forces de frottement;

$\vec{\Gamma}_A$: accélération relative aux forces d'Archimède;

$\Sigma \vec{\Gamma}_i$: accélérations diverses.

4. Conditions d'existence de l'effet fusée.

Nous avons montré que l'étude de la résultante des forces de pression permet de définir le pébullon dont la quantité de mouvement $\vec{M'W}$ reste constante. L'existence de la masse induite est liée à celle de la vitesse relative $\vec{W}$.

Pour que l'effet fusée se développe, il est donc nécessaire que la vitesse radiale et la vitesse de translation ne soient pas nulles :

— nécessité d'un mouvement de translation : la bulle doit être animée d'une vitesse relative par rapport au liquide. La constance de la quantité de mouvement en grandeur et en sens montre également que la direction de cette vitesse fixe le sens de l'accélération consécutive à l'effet fusée;

— nécessité d'une variation de la masse induite M' .

La valeur de la masse induite peut se mettre sous la forme :

$$M' = k\rho D^3$$

k : constante;

ρ : masse volumique du fluide ambiant;

D : diamètre de la bulle.

Elle dépend de deux facteurs. Nous citerons pour mémoire la variation possible de la masse volumique. En général, c'est le rayon de la bulle qui n'est pas constant. L'étude de la vitesse radiale $\dot{R}$ présente ici de l'intérêt.

Le diamètre d'une bulle est fonction du champ de pression et du champ de température dans lesquels elle évolue.

a) Champ de pression.

On peut étudier le comportement d'une bulle dans des champs de pression particuliers tels que le champ de pression non uniforme stratifié plan ou le champ de pression dans un canal de section variable. La bulle est sensible au gradient de pression. Son comportement sera prévisible dans tout milieu bien défini.

D'autre part, si la pression en un point varie dans le temps, même à des fréquences élevées, la vitesse de la bulle sera sensible à ces variations. Une modulation de p_∞ permettra de moduler le volume des bulles et, par l'intermédiaire de l'effet fusée, de moduler leur vitesse.

2/

3/

b) Champ de température.

Dans le phénomène de l'ébullition, notamment, les bulles de vapeur voient leur volume varier suivant la température des couches liquides qu'elles traversent. Par vaporisations et condensations successives, la pression de vapeur saturante s'équilibre avec la pression ambiante. Cette étude a fait l'objet de nombreux travaux théoriques et expérimentaux, [9], [10], [11], [12].

En général, les deux gradients de température et de pression coexistent et s'influencent réciproquement. On peut difficilement séparer leurs effets particuliers. Dans un écoulement, des dépressions apparaissent souvent et, si la température est convenable, la cavitation se produit. La vaporisation dépend de l'ensemble pression température. Le problème devient plus complexe si l'on tient compte des quantités de chaleur échangées et des effets secondaires.

En dehors de toute autre force extérieure, pour que l'effet fusée existe, deux conditions sont donc nécessaires. Il faut qu'il y ait une vitesse initiale et que la masse du pébullon varie.

$$\vec{M}'\vec{W} = \vec{M}'_1\vec{W}_1 \quad \text{et} : \quad \vec{W} = \vec{W}_1 \frac{M'_1}{M'}$$

soit :

$$\vec{W} = \vec{W}_1/x^3$$

avec :

$$x = (R/R_1) \quad (16)$$

L'expression de la vitesse de la bulle est indépendante de la vitesse d'implosion $\dot{R}$. Elle est fonction uniquement des conditions initiales et des dimensions de la bulle à l'instant considéré. Il ne peut y avoir augmentation de vitesse, donc effet fusée, que si la vitesse initiale est différente de zéro.

La courbe de la figure 2 a été tracée en donnant successivement à W_1 les valeurs 0,2 puis 1 et 10 m/s.

Afin d'interpréter cette courbe, nous considérons trois régions. La partie située à droite de la courbe représente le début de l'implosion (zone A); celle de gauche caractérise la fin de l'implosion (zone C); enfin, la région intermédiaire correspond à des vitesses particulières que nous analyserons (zone B).

a) Début d'implosion (zone A) :

Pour des valeurs de x voisines de l'unité, nous noterons l'allure particulière de la courbe. La tangente est donnée par la dérivée :

$$dW/dx = -3W_1x^{-4}$$

Pour $x = 1$, elle a pour valeur $-3W_1$. La variation de vitesse est sensiblement constante autour de

Etude du mouvement du pébullon

1. Etude cinématique.

A - VITESSE DE TRANSLATION $\vec{W}$:

Il y a conservation de la quantité de mouvement (14). Si M'_1 et $\vec{W}_1$ représentent les conditions initiales de masse et de vitesse, nous pouvons écrire :

4/

ce point et elle est proportionnelle à la vitesse initiale.

Sur la courbe de la figure 3, nous voyons que pour $x = 1$, la tangente étant verticale, l'accélération croît très rapidement pour de faibles variations du rayon de la bulle. L'effet fusée présente une action instantanée qui se traduit par une instabilité des bulles.

b) *Zone intermédiaire (zone B)* : ($x \approx 0,45$ sur la courbe correspondant à $W_1 = 1$ m/s, figure 2).

Les vitesses atteintes par la bulle sont voisines de la vitesse du son dans une émulsion. Ceci peut entraîner des phénomènes secondaires importants.

c) *Fin d'implosion (zone C)* :

Pour des implosions correspondant à $x = 0,1$, par exemple, la vitesse peut atteindre théoriquement 200 m/s. Nous n'avons pas tenu compte des frottements qui réduisent cette vitesse.

B - VITESSE RADIALE $\dot{R}$:

Considérons l'énergie totale du système constitué par la bulle et par le liquide environnant. A un instant donné, elle est égale à l'énergie cinétique de translation et d'implosion à laquelle s'ajoute l'énergie potentielle de pression.

En négligeant le travail des forces de volume, le théorème de l'énergie permet d'écrire :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} M' W^2 + \frac{1}{2} 6 M' \dot{R}^2 \right] = \int_{\Sigma_{\text{bulle}}} \vec{p}' d\vec{s} \cdot \vec{V} + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_{\infty}} \vec{p}_{\infty} d\vec{s} \cdot \vec{V}_{\infty}$$

Le développement de cette expression générale prend une forme complexe difficile à exploiter. Nous nous contenterons d'étudier le cas particulier où le terme : $p = p_{\infty} - p_0$ conserve une valeur constante :

p_{∞} : pression à l'infini;

p_0 : pression à l'intérieur de la bulle.

Ceci est vrai notamment lorsque les pressions à l'infini et à l'intérieur de la bulle sont fixes.

L'intégrale ci-dessus devient alors :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} M' W^2 + \frac{1}{2} 6 M' \dot{R}^2 \right] = (p_{\infty} - p_0) \int dv$$

R_1 étant le rayon initial et $(1/2) M'_1 W_1^2$ l'énergie cinétique totale initiale, nous aurons, en écrivant qu'il y a conservation de l'énergie entre les instants t_1 et t :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M' W^2 + \frac{1}{2} 6 M' \dot{R}^2 + \frac{4}{3} \pi R^3 (p_{\infty} - p_0) \\ = \frac{1}{2} M'_1 W_1^2 + \frac{4}{3} \pi R_1^3 (p_{\infty 1} - p_{01}) \end{aligned}$$

soit successivement :

$$W^2 + 6 \dot{R}^2 = - \frac{4 p}{\rho} \frac{\Delta M'}{M'} + W_1^2 \frac{M'_1}{M'}$$

($\Delta M'$: variation de masse induite).

Nous tirons la valeur de la vitesse radiale :

$$\dot{R} = \sqrt{\left(\frac{1}{x^3} - 1 \right) \frac{2}{3 \rho} \left(p - \frac{1}{2} \rho \frac{W_1^2}{2 x^3} \right)} \quad (17)$$

La vitesse radiale correspondant à l'implosion sans mouvement de translation s'écrit :

$$\dot{R} = \sqrt{\left(\frac{1}{x^3} - 1 \right) \frac{2 p}{3 \rho}} \quad (18)$$

La relation (17) montre que, par rapport à ce dernier mouvement, la pression p se trouve diminuée de la valeur $0,5 \rho W_1^2 / 2 x^3$. Comme le facteur correspondant peut s'annuler, il entraîne théoriquement l'annulation de $\dot{R}$. Ce résultat correspond aux travaux de Jansen [5] et de Canavelis [6]. Ce dernier a calculé la pression au sein du liquide en fonction de la distance au centre de la bulle en l'absence des forces de capillarité. Il trouve qu'elle s'annule pour une valeur finie du rayon R_0 de la bulle. Ceci entraîne bien une valeur nulle de $\dot{R}$.

Toutefois il est nécessaire d'ajouter à la valeur de p , la pression due aux forces de tension superficielle. Comme celles-ci augmentent considérablement lorsque le rayon diminue, la valeur limite R_0 se trouve réduite et la bulle poursuit son implosion.

La figure 4 représente les variations de $\dot{R}$ en fonction de x pour les valeurs numériques suivantes :

$$\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3 \quad p = 1, 2, 3 \text{ atm}$$

Nous avons montré que l'erreur commise sur $\dot{R}^2$ en négligeant le terme $0,5 \rho W_1^2 / 2 x^3$ est inférieure à 5 % lorsque x est supérieur à 0,125 dans le cas suivant :

$$W_1 = 0,2 \text{ m/s} \quad p = 10^5 \text{ Pa} \quad \rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$$

Pratiquement, nous pourrions donc le négliger bien souvent et prendre la vitesse radiale donnée par la relation (18).

C - ACCÉLÉRATION $\dot{W}$:

La dérivation de la relation (16) par rapport au temps donne :

$$\dot{W} = \frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = - \frac{3 W_1}{x^4} \cdot \frac{\dot{R}}{R_1}$$

soit, compte tenu de la relation (18) :

$$\dot{W} = \pm \frac{3 W_1}{R_1} \sqrt{\frac{2 p}{3 \rho} \left(\frac{1}{x^3} - 1 \right)} \frac{1}{x^4}$$

Application numérique :

$$W_1 = 0,1 \text{ m/s}$$

$$R_1 = 10^{-3} \text{ m}$$

$$p = 10^5 \text{ Pa}$$

$$\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$\dot{W} \approx \pm 2400 \frac{1}{x^4} \sqrt{\frac{1}{x^3} - 1}$$

La figure (3) représente les variations de la fonction :

$$\frac{1}{x^4} \sqrt{\frac{1}{x^3} - 1}$$

qui caractérise l'évolution de l'accélération $\dot{W}$. Bien que celle-ci soit nulle pour $x=1$, elle croît très rapidement à partir de cette valeur à cause de la tangente verticale. Une faible variation dx lui donne une valeur non négligeable, ce qui accentue l'effet fusée.

Remarque :

Nous avons montré que la puissance absorbée par la bulle dans son mouvement de translation s'écrivait :

$$P_{tr} = \frac{1}{2} M'W \frac{dW}{dt}$$

Comme pour le pébullon la quantité de mouvement reste constante ($M'W = \text{Cte}$), on en déduit que cette puissance est proportionnelle à l'accélération. Elle est d'autant plus élevée que la quantité de mouvement initiale est grande. Lorsque l'accélération est négative, la puissance est absorbée par le pébullon.

Cette étude cinématique générale a été faite uniquement en fonction de $x = D/D_1$ dans un champ de pression uniforme. Il serait intéressant d'étendre ces résultats au cas d'un champ de pression quelconque. Tout d'abord nous considérerons un champ de pression non uniforme stratifié plan.

2. Cas d'un champ de pression non uniforme stratifié plan (grad. $p \neq 0$).

Nous supposons que le liquide est immobile à l'infini.

Des résultats précédents nous retiendrons la force consécutive à l'effet fusée. La présence d'un gradient de pression non nul a plusieurs conséquences.

Soit une bulle immobile. La résultante des forces

de pression s'exerçant sur toute sa surface est appelée en hydrostatique la poussée d'Archimède. Nous conserverons cette appellation quel que soit le champ de pression. Cette poussée d'Archimède est dirigée dans le sens des gradients de pression négatifs. Comme elle dérive d'un potentiel, elle intervient avec le terme Ω de l'équation de Bernoulli généralisée.

Dans le champ de la pesanteur, le gradient de pression constant relevé au sein de l'eau est de l'ordre de 10^4 pascals par mètre. Nous rencontrons des gradients de pression supérieurs à $2 \cdot 10^6$ pascals par mètre.

Dans un champ de pression non uniforme stratifié plan, la poussée d'Archimède est dirigée vers les centres de basse pression. Elle est normale à l'isobare passant par le centre de gravité de la bulle.

Pour une bulle sphérique en mouvement dans un tel milieu, la résultante des forces de pression qui s'exercent sur sa surface est constituée par la somme de la poussée d'Archimède définie ci-dessus et des forces de pression déjà rencontrées dans l'étude du champ de pression uniforme.

Ceci revient à considérer le déplacement d'une bulle dans un champ de pression stratifié plan comme celui d'une bulle dans un champ de pression uniforme à condition d'ajouter une poussée d'Archimède.

A un instant donné, la valeur du champ de pression uniforme moyen est p_∞ . Nous supposons que cette pression est égale à celle de l'isobare passant par le centre de gravité de la bulle, celle-ci étant immobile.

Les variations de p_∞ avec le temps confèrent à la bulle des propriétés particulières que nous allons étudier.

A - EQUATION DU MOUVEMENT DE LA BULLE :

Nous établirons l'équation du mouvement compte tenu des hypothèses suivantes :

- la bulle se déplace dans la direction du gradient de pression positif;
- le fluide est immobile à l'infini;
- l'effet fusée est donné par la même expression que lorsque $\text{grad } p = 0$;
- la bulle est soumise à une poussée d'Archimède. Les autres forces de volume sont négligeables;
- la pression à l'infini de la bulle est constante et égale à celle de l'isobare passant par son centre de gravité.

Les forces agissant sur la bulle sont uniquement des forces de surface $\int_s p ds$. Si ρa est le gradient de pression, la poussée d'Archimède est égale à : $(4/3) \pi \rho R^3 a$.

L'équation du mouvement de la bulle s'écrit :

$$m \frac{dW}{dt} = - \left(M' \frac{dW}{dt} + W \frac{dM'}{dt} \right) - \frac{4}{3} \pi \rho R^3 a \quad (19)$$

soit :

$$(m + M') \frac{dW}{dt} = - W \frac{dM'}{dt} - \frac{4}{3} \pi \rho R^3 a \quad (20)$$

Nous retrouvons l'équation du mouvement de la

pébulle de masse $m + M'$. En négligeant la masse m de la bulle nous obtenons alors :

$$M' \frac{dW}{dt} = -W \frac{dM'}{dt} - \frac{4}{3} \pi \rho R^3 a \quad (21)$$

D'après la relation (6) nous pouvons écrire :

$$\boxed{\frac{dW}{dt} = -3 \frac{W}{D} \frac{dD}{dt} - 2a} \quad (22)$$

L'accélération de la bulle dans son mouvement de translation dépend notamment du terme dD/dt . Il faut donc connaître la vitesse radiale $\dot{R}$.

B - REMARQUES :

Quand le champ de pression est uniforme, la vitesse du mouvement radial, soit $\dot{R}$, est donnée par la relation (17) :

$$\dot{R}^2 = \frac{2p}{3\rho} \left(\frac{1}{x^3} - 1 \right) + \frac{W_1^2}{6} \frac{x^{3-1}}{x^6} \quad (23)$$

Dans les conditions expérimentales suivantes :

$$W_1 = 0,2 \text{ m/s} \quad p = 10^5 \text{ Pa} \quad \rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$$

le deuxième terme du second membre est négligeable pour $x > 0,125$.

Donc :

$$\dot{R}^2 \approx \frac{2p}{3\rho} \left(\frac{1}{x^3} - 1 \right) \quad (24)$$

Considérons une bulle animée d'une vitesse $\vec{W}$ positive; la bulle se déplace vers les zones de haute pression (fig. 5).

En prenant comme origine des pressions le point où $z = 0$, la valeur de la pression au point de cote z sera :

$$p_\infty = \rho a z$$

p_0 étant la pression à l'intérieur de la bulle, nous aurons :

$$p = \rho a z - p_0$$

L'équation (23) dérive de l'équation d'énergie valable pour $\text{grad } \rho = 0$ et $p = \text{Cte}$. Lorsque $\text{grad } p \neq 0$, elle doit tenir compte d'un nouveau travail mis en jeu, celui des forces d'Archimède. L'existence d'un gradient de pression rend difficile le calcul du travail des forces de pression à l'infini. C'est pourquoi nous avons défini en hypothèse une pression uniforme à l'infini. En général, la formule (24) donnant $\dot{R}^2$ n'est pas applicable. Elle permet toutefois de définir une valeur approchée.

Si z est l'abscisse du centre de gravité de la bulle, on a :

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{2p}{3\rho} \left(\frac{1}{x^3} - 1 \right)} \text{ avec } p = \rho a z - p_0$$

La vitesse radiale est fonction de p . Nous considérerons deux cas particuliers que nous caractériserons par la valeur du rapport :

$$y = \rho a z / p_0$$

$y > 100$: la pression intérieure est négligeable devant la pression à l'infini et la vitesse

radiale devient importante ($\text{grad. } p$ grand);

$y \approx 1$: la vitesse radiale est réduite ($\text{grad. } p$ faible).

Vitesse radiale importante ($y > 100$) : Lorsque $\dot{R}$ sera très grand il en résultera un effet fusée important. Nous supposons que l'on a alors :

$$\left| -\frac{3W}{D} \frac{dD}{dt} \right| \gg |2a|$$

Vitesse radiale faible ($y \approx 1$) : Nous allons considérer le cas où la pression à l'intérieur de la bulle est voisine de la pression à l'infini p_∞ sur l'isobare passant par son centre de gravité. Nous supposons que :

$$p_\infty - p_0 = \text{Cte}$$

Comme la constante est petite, on aura :

$$p_\infty \approx p_0$$

Mais p_∞ est une fonction de z ; p_0 variera de la même façon. Si la température reste constante, ces conditions peuvent être réalisées avec une bulle de gaz suivant la loi de Mariotte. Dans ces calculs généraux nous écrirons : $p_0 = p$.
 $pD^3 = \text{Cte}$ donne :

$$\boxed{-\frac{3}{D} \frac{dD}{dt} = \frac{1}{p} \frac{dp}{dt}} \quad (25)$$

Traitons le cas général, où :

$$p = p_0 \approx p_\infty = \rho a z$$

Compte tenu de $dz/dt = W$ (liquide immobile), et en posant :

$$a = \frac{1}{\rho} \text{ grad. } p_\infty = cz^n \quad (26)$$

on obtient :

$$\frac{dD}{dt} = -\frac{WD}{3z} (1 + n) \quad (27)$$

C - CAS PARTICULIERS DE CHAMPS DE PRESSION ($\text{grad. } p_\infty = \rho a = \rho c z^n$).

$\text{grad. } p_\infty = 0$: champ de pression uniforme. La bulle conserve le même diamètre et il n'y a pas de propagation par effet fusée.

$\text{grad. } p_\infty = \text{Cte}$: champ de pression hydrostatique par exemple.

$$\frac{dD}{dt} = -\frac{WD}{3z}$$

grad. $p_\infty = \rho c z$ (avec $n = 1$) : champ de pression stratifié de type centrifuge.

$$\frac{dD}{dt} = - \frac{2 WD}{3 z} \quad (28)$$

grad. $p_\infty = \rho c (1/z^3)$, (avec $n = -3$) : cas particulier correspondant à un écoulement dans un canal divergent ayant la forme d'un prisme dont la base est un secteur de cercle.

$$\frac{dD}{dt} = \frac{2 WD}{3 z}$$

Expression de la vitesse en fonction du signe de l'accélération.

Nous pouvons interpréter l'accélération $\vec{\Gamma}$ du pébullon comme la somme de l'accélération due à l'effet fusée $\vec{\Gamma}_f$ et de l'accélération $\vec{\Gamma}_a$.

$$\frac{d\vec{W}}{dt} = - \frac{3 \vec{W}}{D} \frac{dD}{dt} - 2 \vec{a} \quad \text{soit} \quad \vec{\Gamma} = + \vec{\Gamma}_f + \vec{\Gamma}_a \quad (29)$$

avec :

$$\vec{\Gamma}_f = - \frac{3 \vec{W}}{D} \frac{dD}{dt} \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma}_a = - 2 \vec{a}$$

Les relations (26) et (27) nous permettent d'écrire :

$$\Gamma_f = \frac{W^2}{z} (n + 1) \quad \text{et} \quad \Gamma_a = - 2 c z^n$$

soit :

$$\frac{dW}{dt} = \frac{W^2}{z} (n + 1) - 2 c z^n$$

Nous allons considérer les différentes possibilités correspondant au signe de l'accélération à laquelle est soumise une bulle.

a) *Accélération nulle.* — L'accélération de l'effet fusée et celle d'Archimède sont égales et opposées.

L'équation précédente donne :

$$W = \sqrt{\frac{2 c z^{n+1}}{n + 1}} = W_0$$

Dans le champ de pression hydrostatique, nous avons :

$$c z^n = g \quad \text{soit} \quad c = g \quad \text{et} \quad n = 0$$

donc :

$$W = \sqrt{2 g z} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2} M' W^2 = M' g z$$

A un instant donné, un pébullon remontant dans le champ de la pesanteur voit son accélération s'annuler lorsque son énergie potentielle est égale à son énergie cinétique de translation.

Dans le champ de pression de type centrifuge nous avons :

$$c z^n = \omega^2 z$$

soit :

$$c = \omega^2 \quad \text{et} \quad n = 1$$

donc :

$$W = \omega z \quad (30)$$

b) *Accélération positive.*

$\vec{W} > 0$: nous avons alors $|\Gamma_f| > |\Gamma_a|$. La bulle voit son mouvement accélérer au cours de son implosion.

$$W > W_0$$

$\vec{W} < 0$: la vitesse tend vers zéro.

c) *Accélération négative.* $|\Gamma_f| < |\Gamma_a|$.

$\vec{W} < 0$: la bulle qui remonte vers l'origine voit son mouvement se poursuivre. L'effet rétrofusée s'oppose à la poussée d'Archimède.

$$W < W_0$$

$\vec{W} > 0$: la vitesse tend vers zéro.

Nous venons de considérer le problème du déplacement d'une bulle dans un champ de pression à gradient non nul. Nous avons rencontré deux cas particuliers :

- d'une part l'implosion ou l'explosion brusques accompagnées d'un *effet fusée rapide* (fort gradient de pression);
- d'autre part l'*effet fusée lent* si le gradient de pression n'est pas trop élevé de façon que p_0 et p_∞ soient sensiblement égaux.

3. Application à la pompe centrifuge.

Dans cette application de l'effet fusée, nous retrouverons les deux cas extrêmes déjà rencontrés : d'une part l'effet fusée lié à la condensation de la vapeur, d'autre part l'effet fusée lent auquel sont soumises les bulles dont la pression intérieure est voisine de la pression à l'infini. Nous allons étudier en détail l'écoulement d'une bulle et plus généralement d'une émulsion dans une pompe centrifuge.

A - CAS D'UNE BULLE DE GAZ :

p_0 étant la pression statique à l'entrée pour $r = r_0$, la pression en un point de la pompe situé à la distance r du centre sera :

$$p = p_0 + \frac{\rho \omega^2}{2} (r^2 - r_0^2) \quad (31)$$

C'est la pression maximale pouvant être atteinte à débit nul.

Nous avons besoin de connaître la pression statique à l'intérieur de la pompe, pour un débit donné. Elle est difficilement accessible par le calcul direct. La caractéristique expérimentale donnant la hauteur manométrique en fonction du débit n'apporte guère d'aide appréciable pour cette détermination. En effet, cette pression relevée à la sortie de la pompe fait intervenir la récupération, dans la volute, d'une grosse partie de l'énergie cinétique du fluide.

Deux méthodes sont possibles pour définir cette carte du champ. La première consiste à mesurer directement la pression en chaque point de la roue, la seconde, à la déduire de relevés expérimentaux de vitesse du fluide. C'est celle-ci que nous utiliserons.

Notre but étant de vérifier la théorie de l'effet

fusée dans un champ de pression centrifuge, nous choisissons dans la pompe la région où cette condition est remplie.

L'application du théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant relative donne :

$$p - p_0 = \frac{1}{2} \rho [V_0^2 - V^2] + \frac{1}{2} \rho \omega^2 [r^2 - r_0^2] \quad (32)$$

Comme $V = V_0 r_0 / r$, nous pouvons écrire :

$$p - p_0 = \frac{1}{2} \rho V_0^2 \left[1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right] + \frac{1}{2} \rho \omega^2 [r^2 - r_0^2]$$

Cette équation suppose que l'énergie cinétique se transforme normalement en énergie de pression. Pratiquement, ce n'est pas toujours vérifié. De nombreuses anomalies de fonctionnement perturbent l'écoulement. Nous citerons les différents tourbillons qui prennent naissance sous l'effet des forces d'inertie ou des forces de pression et surtout les phénomènes de cavitation.

Afin de simplifier cette étude, nous admettrons souvent que le débit de la pompe est faible, voire nul. De plus, à l'intérieur d'une pompe centrifuge, une bulle évolue dans un champ de pression non uniforme, stratifié, cylindrique. Une étude plus approfondie permet d'énoncer quelques hypothèses afin d'être en mesure de poursuivre les calculs [1]. Assez loin du centre nous supposons que les conséquences dues à la courbure des isobares et à la divergence du canal sont négligeables.

Nous pourrions donc, à un instant donné, remplacer le champ de pression centrifuge à débit nul par un champ de pression uniforme, à condition d'ajouter une poussée d'Archimède.

Il est intéressant d'étudier en détail les variations des deux forces importantes en présence. Nous nous bornerons à rappeler les conclusions que l'on peut établir facilement.

Poussée d'Archimède.

Quand le gaz formant la bulle suit la loi de Mariotte, si p_0 et R_0 sont les conditions initiales au centre de la pompe, la valeur du rayon de la bulle en un point est donnée par la relation :

$$R^3 = R_0^3 p_0 / p = R_0^3 \beta$$

en posant :

$$\beta = \frac{p_0}{p} = \frac{1}{1 + (\rho \omega^2 r^2 / 2 p_0)}$$

La poussée d'Archimède s'écrit :

$$F_a = \frac{\pi \rho \omega^2 D_0^3}{6} r \beta \quad (33)$$

Pour un diamètre donné de bulles, la poussée d'Archimède croît avec la pression p_0 à l'entrée.

Les courbes de la figure 6 mettent en évidence un maximum de poussée. Il se produit pour une valeur r du rayon fonction de la pression à l'entrée.

Comme la force d'Archimède dépend en un point donné de deux variables, l'accélération centrifuge et le volume de la bulle, le maximum détermine deux régions où ces facteurs ont successivement une influence prépondérante.

Lorsque la pression d'entrée est égale ou supérieure à la pression atmosphérique, la poussée

6/

d'Archimède est environ proportionnelle au rayon dans la région considérée :

si $p_0 > 1$ atm, on a :

$$F_a \approx \frac{\pi \rho \omega^2 D_0^3}{6} r$$

Effet fusée.

La force développée par l'effet fusée se tire de la relation (6) :

$$F_f = M'W \frac{3}{D} \frac{dD}{dt} = \frac{\pi \rho W}{4} D^2 \frac{dD}{dt} \quad (34)$$

$$F_f = - \frac{\pi \rho^2 \omega^2 D_0^3}{12 p_0} r \beta^2 W \frac{dr}{dt}$$

dr/dt représente la vitesse relative de la bulle par rapport à la roue. V étant la vitesse relative du fluide, on a :

$$V' = \frac{dr}{dt} = W + V = W + \frac{d}{r}$$

en posant :

$$d = \frac{q_v}{2 \pi e}$$

q_v : débit de la pompe;
 e : épaisseur de la roue.

Comme cette force est opposée à la poussée d'Archimède, il est intéressant d'étudier leur rapport. Il prend la forme :

$$K = - \frac{F_f}{F_a} = \frac{1}{(2 p_0 / \rho) + \omega^2 r^2} W \frac{dr}{dt}$$

L'effet fusée sera prépondérant lorsque K sera supérieur à 1, ce qui donne :

$$W \frac{dr}{dt} > \frac{2 p_0}{\rho} + \omega^2 r^2 \quad (35)$$

Au centre de la pompe, la vitesse élevée du liquide rend la pression p_0 négligeable. De plus, à une certaine distance du centre, si la vitesse relative V du liquide est faible devant celle de la bulle, on a :

$$\frac{dr}{dt} \approx W$$

Ceci est également vrai à débit nul.

Avec ces hypothèses la relation (35) devient :

$$W^2 > \omega^2 r^2$$

et :

$$W > \omega r$$

Pour qu'une bulle soumise à l'effet fusée reçoive une poussée supérieure à celle d'Archimède, il faut que sa vitesse relative soit supérieure à la vitesse circulaire du point où elle se trouve. Nous noterons également qu'un accroissement de p_0 se traduit par une augmentation de la poussée d'Archimède et par une diminution de l'effet fusée. On favorisera donc la sortie des bulles en réduisant la pression à l'entrée de la pompe centrifuge.

Etude du terme dD/dt .

$$\frac{dD}{dt} = -\frac{2D}{3} \frac{r}{(2p_0/\rho\omega^2) + r^2} \frac{dr}{dt}$$

Si $2p_0/\rho\omega^2$ est beaucoup plus petit que r^2 , soit lorsque $p_0 \ll (\rho\omega^2 r^2/2)$, cette expression devient :

$$\begin{aligned} \frac{dD}{dt} &= -\frac{2D}{3} \frac{1}{r} \frac{dr}{dt} = -\frac{2D}{3} \frac{1}{r} V \\ &= -\frac{2D}{3} \frac{1}{r} \left(W + \frac{d}{r} \right) \end{aligned} \quad (36)$$

L'hypothèse que nous venons de faire est souvent vérifiée car la pression p_0 à l'entrée de la pompe ne prend pas des valeurs importantes. Nous négligerons les frottements ainsi que l'effet de divergence du canal soit $-d/r$.

Sachant que $a = \omega^2 r$ et étant donnée la relation (36), l'équation du mouvement (29) devient :

$$\frac{dW}{dt} - W^2 \frac{2}{r} - 2\omega^2 r = 0 \quad (29')$$

dont la solution s'écrit :

$$W = \sqrt{2} \omega r \quad (37)$$

Le problème pourrait être considéré comme résolu. Toutefois, pratiquement, toutes les bulles ne suivent pas cette loi de mouvement. Les unes contiennent de la vapeur et un effet fusée plus important les accélère. Les autres ralentissent sous l'influence d'un tourbillon ou d'une dépression. Il est donc intéressant de considérer d'une façon plus générale le comportement d'une bulle animée d'une vitesse quelconque par rapport à la roue.

Posant :

$$r = Rx \quad W = \omega Ry \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{d}{\omega R^2}$$

(R étant le rayon de la pompe), nous obtenons l'équation du mouvement en coordonnées réduites :

$$\frac{dy}{dx} (xy + \alpha) - 2y^2 - y \frac{2\alpha}{x} + 2x^2 = 0$$

Afin de pouvoir déterminer graphiquement les solutions, nous avons tracé les isoclines correspondant à des valeurs de dy/dx constantes.

Posons $dy/dx = c$. L'équation précédente devient, en l'ordonnant en y :

$$y^2 - y \left(\frac{cx}{2} - \frac{\alpha}{x} \right) - \left(x^2 + \frac{cx}{2} \right) = 0 \quad (38)$$

Nous retenons la racine positive :

$$y = \frac{cx}{4} - \frac{\alpha}{2x} + \sqrt{\left(\frac{cx}{4} + \frac{\alpha}{2x} \right)^2 + x^2}$$

Dès que c prend des valeurs importantes ($c > 1$), comme nous ne considérerons que les valeurs de x supérieures à 0,3, le terme $\alpha/2x$ devient négligeable. Par suite, nous pouvons écrire :

$$y = \left[\frac{c}{4} + \sqrt{\frac{c^2}{16} + 1} \right] x$$

Les isoclines sont donc des droites passant par l'origine. Nous les avons tracées pour différentes valeurs de c sur la figure 7. Nous constatons qu'il existe deux types de courbes. Pour de grandes valeurs de l'accélération, la vitesse tend vers l'infini tandis que pour de faibles valeurs elle passe par un maximum.

Pour $x > 0,3$, la courbe limite qui les sépare est sensiblement une droite passant par l'origine. Son coefficient angulaire est C_c . En ces points la vitesse est donc proportionnelle au rayon.

Posons $W = k\omega r$ soit $y = kx$.

On a :

$$k\omega = C_c = \frac{dW}{dr} \quad \text{soit} \quad \frac{dy}{dx} = k = C_c$$

Portons ces valeurs dans l'équation (39); on obtient :

$$C_c = \frac{C_c}{4} + \sqrt{\frac{C_c^2}{16} + 1} \quad \text{et} \quad C_c = k = \sqrt{2} \quad (39)$$

Sur la figure 8 nous avons représenté également la famille de courbes correspondant à une vitesse W négative. On peut en définir les isoclines en prenant la racine négative de l'équation (38). Bien que les deux tracés aient la même allure, ils ne sont pas symétriques.

La droite $W = \sqrt{2} \omega r$, ligne de partage entre deux familles de courbes, représente la solution de l'équation considérée. D'autre part, la droite $W = \omega r$ qui joint les maximums caractérise une accélération nulle. Chacun de ses points indique la vitesse nécessaire pour que les forces dues à l'effet fusée et à la poussée d'Archimède s'équilibrent. Les points de fonctionnement situés au-dessus correspondent à un accroissement de vitesse (prépondérance de l'effet fusée) et les autres à une réduction de vitesse (prépondérance de la poussée d'Archimède).

Nous avons admis que le champ de pression était égal à un champ de pression centrifuge à débit nul. Pratiquement, nous aurons une solution approchée en pondérant ce champ de pression par le coeffi-

cient a qui le ramènera à la valeur du champ de pression réel.

Nous admettrons que a est constant et que la vitesse est de la forme :

$$W = a \sqrt{2} \omega r \quad a \text{ est voisin de } 1 \quad (40)$$

Conclusions :

a) A l'intérieur d'une pompe centrifuge, une bulle peut être soumise à une accélération qui lui permettra de s'écouler vers la sortie.

La vitesse relative W est proportionnelle à la vitesse de rotation.

Elle est proportionnelle à l'espace parcouru.

Elle est indépendante du débit, du diamètre initial de la bulle et de la pression à l'entrée à condition que celle-ci ne soit pas trop grande.

b) Valeur du terme $\frac{1}{D} \frac{dD}{dt}$:

En négligeant le terme d/r , la relation (37) peut s'écrire :

$$\frac{1}{D} \frac{dD}{dt} = - \frac{2}{3r} \frac{dr}{dt} \approx - \frac{2W}{3r} \quad \text{avec} \quad \vec{V}' \approx \vec{W}$$

Compte tenu de la relation (40), on obtient :

$$\frac{1}{D} \frac{dD}{dt} = - \frac{2\sqrt{2}\omega}{3} \approx -0,95 \omega \approx -\omega \quad (41)$$

Le terme $\frac{1}{D} \frac{dD}{dt}$ est proportionnel et sensiblement égal à la vitesse de rotation. Nous travaillerons à vitesse constante. Il conservera alors une valeur fixe.

Comme $W = \sqrt{2} \omega r$, le terme $2W^2/r$, caractérisant l'accélération du pébullon consécutive à l'effet fusée, s'écrit $4\omega^2 r$.

La force appliquée à la pèbulle sera sensiblement égale et opposée à la poussée d'Archimède.

$$F = M' \Gamma = 2 \omega^2 r M'$$

A l'intérieur d'une pompe centrifuge, une bulle d'air est donc *quasiment autonome*.

B — CAS D'UNE BULLE DE VAPEUR (cavitation) :

L'expérience montre que certaines bulles contenant de la vapeur se forment et se réduisent rapidement dans une pompe en fonctionnement : c'est le phénomène de cavitation. Les caractéristiques de l'effet fusée qui se développe tiennent à la fois des deux cas précédents. Le gradient de pression de la région traversée par la bulle est alors important et, d'autre part, la présence de vapeur permet, par condensation, d'atteindre des vitesses d'implosion considérables avec parfois disparition complète de la bulle.

Quand une bulle suit la loi de Mariotte, son volume est une fonction de la pression. Dans le phénomène de cavitation, la condensation dépend encore de la pression mais la loi de variation est différente. Comme il est difficile de la connaître et afin de pouvoir utiliser les résultats précédents, nous supposons qu'elle est également de type centrifuge. Le gradient de pression considérable entraînera un effet fusée important. Nous pourrions

7/

8/

9/

donc négliger la poussée d'Archimède devant ce dernier.

Soit un domaine de cavitation cylindrique dont le centre A est défini par le rayon vecteur r_0 par rapport au centre de la pompe de rayon R. r' représentera l'abscisse de la bulle par rapport à A. De plus nous supposons que le mouvement est radial dans la pompe (fig. 9).

L'équation (29') s'écrit :

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dr'} \frac{dr'}{dt} = W^2 \frac{2}{r'}$$

En supposant toujours $W \approx V'$, nous obtenons :

$$\frac{dW}{dr'} = W \frac{2}{r'}$$

dont la solution est :

$$W = W_1 \left(\frac{r'}{r_1} \right)^2 = \frac{W_1}{(r_0 - r_1)^2} (r_0 - r)^2 = k_1 (r_0 - r)^2$$

W_1 et r_1 sont les conditions initiales à l'entrée du domaine de cavitation.

La variation de la vitesse se fait suivant une loi parabolique.

L'application de l'étude de l'effet fusée aux pompes centrifuges permet d'énoncer les conclusions suivantes qui sont des lois d'écoulement d'une bulle.

Effet fusée lent :

Première loi : La vitesse radiale relative W de la bulle d'air par rapport au liquide est :

- proportionnelle à la vitesse de rotation;
- proportionnelle à l'espace parcouru;
- indépendante du diamètre de la bulle, du liquide et de la pression d'entrée dans la pompe.

$$W = a\omega r \quad a \approx \sqrt{2}$$

Deuxième loi : Le terme $\frac{1}{D} \frac{dD}{dt}$ est proportionnel (dans un rapport voisin de 1) à la vitesse de rotation.

Troisième loi : Les trajectoires relatives des bulles sont différentes des lignes de courant du liquide. Elles s'incurvent en arrière du sens de rotation de la roue.

Effet fusée rapide :

Quatrième loi : La vitesse relative des bulles est une fonction de l'espace parcouru :

$$W = k (r_0 - r)^n \quad n \geq 2$$

Dans une pompe l'effet fusée facilite l'évacuation d'une bulle. Si celle-ci a une vitesse positive, l'effet fusée direct accroît sa vitesse de telle manière qu'elle sort de la pompe plus rapidement que le liquide. Au contraire, si elle remonte vers le centre, l'effet rétro-fusée la ralentit et elle est plus facilement entraînée par le fluide. La figure 8 montre la différence qui existe entre les vitesses calculées avec ou sans effet rétrofusée (a, b, c et a', b', c').

Conclusion

Ce travail nous a permis de présenter quelques points intéressants. Tout d'abord, nous voyons qu'une bulle jouit parfois d'une grande autonomie. Par variation de volume elle peut s'autopropulser. Une augmentation de volume l'accélère tandis qu'une diminution la freine. Il en résulte des variations considérables de densité d'énergie cinétique. Nous montrerons, dans un prochain article, comment ce flux d'énergie mécanique dirigé permet d'expliquer un processus de l'érosion mécanique de cavitation.

Une bulle doit être considérée, non comme une bille matérielle mais comme une cavité, comme une déformation du milieu qu'elle traverse. La propagation de cette déformation se fait à la manière de celle d'une onde d'énergie.

Enfin, la notion de pébulle ou de pébullen constitue un modèle pratique et fécond pour analyser des mouvements de bulles complexes.

Chaque fois qu'un problème fait intervenir une émulsion ou simplement quelques bulles, il sera fructueux de le considérer sous cet angle. C'est ce que nous ferons en présentant ultérieurement une étude expérimentale relative à l'effet fusée.

Bibliographie

- [1] CHINCHOLLE (L.). — Etude de l'écoulement d'une émulsion. Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris (1957).
- [2] JACKSON (R.). — The formation and coalescence of Drops and Bubbles in liquids. *The Chemical Engineer*, n° 178 (May 1964), CE 107-118; *Trans. Instn. Chem. Engrs*, 42 n° 4, G.-B. (1964).
- [3] BENJAMIN (T.B.) and ELLIS (A.T.). — Cavitation. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, A, vol. 260, (1966), pp. 221-240.
- [4] NAUDE (C.F.) and ELLIS (A.T.). — On the mechanism of cavitation damage by nonhemispherical cavities collapsing in contact with a solid boundary. *Trans. Am. Soc. Mech. Engrs, J. Basic Eng.*, 83, (1961), p. 648.
- [5] JANSEN (F.). — Mécanique des Fluides. Influence de la condensation sur le mouvement ascensionnel des bulles de vapeur. *C.R. Académie des Sciences*, t. 258 (22 juin 1964), groupe 2.
- [6] CANAVELIS (R.). — Contribution à l'étude de l'érosion de cavitation dans les turbo-machines hydrauliques. Thèse. Université de Paris (1966).
- [7] LAMB (H.). — Hydrodynamics. Sixth Edition. Cambridge, at the University Press (1963).
- [8] FORTIER (A.). — Mécanique des suspensions. Cours professé à la Faculté des Sciences de Paris.
- [9] MARCHAL. — Etude du transfert de chaleur à travers les tubes cylindriques. Cours professé à l'Institut National des Sciences et Techniques Nucléaires à Saclay.
- [10] NOVAK ZUBER. — Nucleate boiling. The region of isolated bubbles and the similarity with natural convection. *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 6, pp. 53-78. Pergamon Press G.-B. (1963).
- [11] FORSTER (H.K.) and ZUBER (N.). — Dynamics of vapor bubbles and boiling heat transfer. *A.I.Ch.E. Journal* vol. 1, n° 4. (December 1955), pp. 531-535.
- [12] HAMBURGER (L.G.). — On the growth rise of individual vapour bubbles in nucleate pool boiling. *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 8, pp. 1369-1386. Pergamon Press, G.-B.

Abstract

Study of foam flow

Part I : Theoretical study of bubble motion. Rocket effect. "Pebullon"

by L. Chincholle *

A gas or vapour bubble moving at a high velocity of translation within a liquid sometimes enjoys a high degree of independence. By varying its volume, it may propel itself in the same manner as a rocket: this is the rocket effect. An increase in volume accelerates it and a decrease in volume slows it down.

This result is obtained from the generalised Bernoulli equation (1) from which identical relationships (9), (10) and (11) are established. With a few simplifying assumptions, we have defined a particle that is equivalent to the bubble in translatory motion: the "pebullon". This "pebullon" conserves constant momentum (14) and is able to propel itself by change of mass. If this particle is assumed to be in a vacuum, a relationship has to be found between the mass variation and the energy involved:

$$m' \rightleftharpoons E = m' W^2$$

The rocket effect occurs in a pressure field (centrifugal pump) or a temperature field (boiling).

The acceleration to which the "pebullon" is subjected may become quite considerable, up to several thousand m/sec².

An air or vapour bubble inside a centrifugal pump is quasi-covered independent. Its relative velocity is proportional to distance run. Although it is subjected to a considerable buoyancy force it can still escape from the pump, often faster than the liquid.

Noteworthy in the study of this problem are considerable kinetic energy variations involved. A subsequent article will show how this directed mechanical energy flux provides an explanation for erosion by mechanical cavitation process.

A bubble should be considered not as a physical ball but as a cavity, or a deformation of the medium within which it is moving. This deformation propagates itself in the same manner as an energy wave.

The "pebullon" concept is a practical, fertile model for the analysis of complex bubble motion. Whenever a problem involves a foam, it may fruitfully be considered from this angle. This will be done in a subsequent paper referring to an experimental study of the rocket effect.

* Maître-Assistant à la chaire d'Electrotechnique, Faculté des Sciences de Paris.