EQUATIONS AUX MOYENNES SPATIALES ET AUX MOYENNES STATISTIQUES DES ÉCOULEMENTS DIPHASIQUES

Communication
présentée au Comité technique
de la Société Hydrotechnique de France
le 8 juin 1967

PAR J.-M. DELHAYE *

Introduction

Depuis quelques années, les études sur les écoulements diphasiques ont connu un développement important. Un assez grand nombre d'auteurs ont cherché à confronter leurs résultats expérimentaux avec une analyse théorique des phénomènes mais, faute de temps, ils se sont souvent bornés à transposer aux systèmes diphasiques les lois des écoulements monophasiques ou à proposer des équations établies sur des bases non précisées et dont la cohérence paraît parfois douteuse.

Devant le nombre élevé de ces équations et leur manque de rigueur, il a paru indispensable de faire une mise au point en présentant sous des formes diverses les équations générales de conservation des écoulements diphasiques tout en énonçant clairement les hypothèses faites.

D'autres auteurs ont déjà tenté un effort analogue. Les premiers qui ont réagi contre le manque de rigueur des équations simplifiées de la mécanique des fluides diphasiques ont été G. Standart [1] et G. Birkhoff [2]. Depuis lors, quelques auteurs ont essayé de développer les équations générales de façon plus rigoureuse. Nous citerons par exemple A. Fortier [3] et N. Zuber [4].

L'étude des équations générales moyennées dans le temps a été entreprise par C. G. Teletov [5]. Bien

que contenant certaines erreurs, cette publication ne constitue pas moins un ouvrage de référence essentiel pour celui qui s'intéresse à la théorie des écoulements diphasiques.

Alors que le schéma général de l'étude des écoulements monophasiques de fluides visqueux est bien connu, celui concernant les écoulements diphasiques est loin d'être établi de manière définitive.

Tous les milieux, quels qu'ils soient, obéissent aux lois de conservation des variables d'extensité (masse, quantité de mouvement, énergie). Ces lois constituent des postulats que nous admettons sans discussion.

Nous avons tenu compte de la tension interfaciale entre les deux phases. Celle-ci intervient dans les conditions d'interface relatives à la quantité de mouvement et à l'énergie. Elle ne doit pas être négligée *a priori*, car il existe des cas où l'énergie de tension superficielle est du même ordre de grandeur que l'énergie cinétique turbulente (dans la dispersion d'un jet par exemple).

Pour établir toutes nos équations, nous partons de bilans globaux, sous forme intégrale, estimant que seule cette notion reflète bien la réalité macroscopique de la nature. On en déduit ensuite les équations locales correspondantes.

Les écoulements diphasiques ont, en général, un caractère aléatoire. Un opérateur de moyenne statistique sera donc appliqué aux lois locales instantanées ainsi qu'aux conditions d'interface. Dans le cas d'un écoulement diphasique quasi permanent, l'hypothèse ergodique permet de confondre la

* Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble, Service des Transferts thermiques.

moyenne statistique avec la moyenne temporelle et ainsi de confronter les résultats théoriques avec les données expérimentales. Cette méthode nécessite la définition de ce que nous appellerons le taux de vide local instantané statistique.

Les expérimentateurs utilisent souvent, en mécanique des systèmes diphasiques liquide-gaz, le taux de vide dans la section, rapport de la section de passage du gaz sur la section totale d'une conduite. Il est donc intéressant de posséder des équations générales utilisant cette variable. Nous avons ainsi été amené à établir des équations aux variables instantanées moyennées dans une section.

Enfin, si, localement, la phase dispersée se trouve dans un état extrêmement divisé, c'est-à-dire si on peut définir localement dans un volume élémentaire du mélange le pourcentage de la phase dispersée, alors on aura une mécanique des suspensions qui constitue un cas très particulier de la mécanique des écoulements diphasiques.

Cette note traite uniquement des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie pour un écoulement diphasique. Aucune loi rhéologique, aucune équation d'état n'a été introduite. En conséquence, le tenseur des contraintes n'est pas explicité. Les relations entre contraintes et déformation en mécanique des fluides diphasiques devront faire l'objet de recherches ultérieures.

Telles quelles, ces équations de conservation sont donc incomplètes, mais elles constituent la base rationnelle à partir de laquelle des modèles particuliers peuvent être développés à l'aide d'un certain nombre d'hypothèses qui devront être clairement énoncées. Nous estimons donc que, même à ce stade, elles constituent un instrument indispensable à l'analyse des systèmes diphasiques.

Dans ce qui suit, nous exposons simplement les méthodes utilisées et les idées directrices sur quelques équations significatives. Le lecteur intéressé par le sujet pourra consulter les références [6] et [7] où nous avons développé en détail les équations de base des écoulements diphasiques.

Equations générales de conservation sous forme globale pour un écoulement diphasique

Considérons le système matériel diphasique représenté sur la figure 1 et noté système G-L. Il est constitué par du gaz et du liquide occupant respectivement les domaines v_G et v_L chacun simplement connexes. Soit A_{eL} (ou A_{eG}) la surface frontière de la phase liquide (ou gazeuse) avec le milieu extérieur. Cette surface sera une surface matérielle, c'est-à-dire une surface constituée à chaque instant des mêmes particules fluides. Elle ne comportera aucune portion d'interface. L'interface gaz-liquide intérieur au système sera noté A_i . L'intersection de A_i et de A_e sera appelée $\mathcal{J}$. Le vecteur normal unitaire extérieur à un domaine sera appelé $\vec{n}_L$ ou $\vec{n}_G$.

1. Conservation de la masse.

La surface extérieure A_e du système G-L étant une surface matérielle par hypothèse, la masse du

système G-L ne varie pas au cours du temps. Nous avons donc :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{v_G(t)} \rho_G d\tau + \frac{d}{dt} \iiint_{v_L(t)} \rho_L d\tau = 0$$

avec les notations suivantes :

ρ_k : masse volumique de la phase k ($k = G$ ou L) ;

t : temps ;

$d\tau$: élément de volume.

2. Conservation de la quantité de mouvement.

Si $\vec{\phi}$ est la résultante des forces extérieures appliquées à un système matériel et si $\vec{H}$ est la résultante des quantités de mouvement du même système, le principe fondamental de la dynamique s'écrit sous la forme :

$$\vec{\phi} = \frac{d\vec{H}}{dt}$$

Nous avons, pour le système G-L, en appelant $\vec{V}_k$ le vecteur vitesse d'un point du domaine v_k ($k = G$ ou L) :

$$\vec{H} = \iiint_{v_G(t)} \rho_G \vec{V}_G d\tau + \iiint_{v_L(t)} \rho_L \vec{V}_L d\tau$$

Les forces extérieures comprennent les forces de volume, les forces de surface et les forces dues à la tension interfaciale σ .

Si $\vec{F}$ est la force extérieure massique appliquée au système, la résultante des forces extérieures de volume est égale à :

$$\iiint_{v_G(t)} \rho_G \vec{F} d\tau + \iiint_{v_L(t)} \rho_L \vec{F} d\tau$$

Soit $\vec{\mathcal{E}}_k$ le tenseur des contraintes en un point du domaine v_k ($k = G$ ou L). Les forces de surface ont pour résultante :

$$\iint_{A_{eG}(t)} \vec{\mathcal{E}}_G \cdot \vec{n}_G d\Sigma + \iint_{A_{eL}(t)} \vec{\mathcal{E}}_L \cdot \vec{n}_L d\Sigma$$

Les forces de tension superficielle ne sont ni des forces de volume, ni des forces de surface, mais des forces linéiques. Elles s'exercent sur l'intersection $\mathcal{J}$ de l'interface A_i et de la surface extérieure A_e du système. Leur résultante est égale à :

$$\oint_{\mathcal{J}} \sigma \vec{N} dl$$

en appelant σ la tension interfaciale, dl l'élément d'arc de $\mathcal{J}$, $\vec{N}$ la normale en un point de $\mathcal{J}$ située dans le plan tangent à l'interface A_i (fig. 2). Il est à noter qu'à l'interface nous avons :

$$\vec{n}_G = -\vec{n}_L$$

En conclusion, la loi globale de conservation de la quantité de mouvement se traduit par la relation :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{v_G(t)} \rho_G \vec{V}_G d\tau + \frac{d}{dt} \iiint_{v_L(t)} \rho_L \vec{V}_L d\tau \\ = \iiint_{v_G(t)} \rho_G \vec{F} d\tau + \iiint_{v_L(t)} \rho_L \vec{F} d\tau \\ + \iint_{A_{eG}(t)} \vec{\mathcal{E}}_G \cdot \vec{n}_G d\Sigma + \iint_{A_{eL}(t)} \vec{\mathcal{E}}_L \cdot \vec{n}_L d\Sigma + \oint_{\mathcal{J}} \sigma \vec{N} dl \end{aligned}$$

3. Conservation de l'énergie.

Soient $\mathcal{H}$ la quantité de chaleur fournie au système G-L par unité de temps, T_v la puissance des forces de volume, T_s la puissance des forces de surface et T_σ la puissance des forces de tension superficielle.

Le premier principe de la thermodynamique s'écrit, en appelant E_k l'énergie interne massique d'un point du domaine v_k ($k = G$ ou L) :

$$(T_v + T_s + T_\sigma) dt + \mathcal{H} dt$$

$$\begin{aligned} = d \left[\iiint_{v_G(t)} \left(\frac{1}{2} \rho_G \vec{V}_G^2 + \rho_G E_G \right) d\tau \right. \\ \left. + \iiint_{v_L(t)} \left(\frac{1}{2} \rho_L \vec{V}_L^2 + \rho_L E_L \right) d\tau \right] \end{aligned}$$

avec :

$$T_v = \iiint_{v_G(t)} \rho_G \vec{F} \cdot \vec{V}_G d\tau + \iiint_{v_L(t)} \rho_L \vec{F} \cdot \vec{V}_L d\tau$$

$$T_s = \iint_{A_{eG}(t)} (\vec{\mathcal{E}}_G \cdot \vec{n}_G) \cdot \vec{V}_G d\Sigma + \iint_{A_{eL}(t)} (\vec{\mathcal{E}}_L \cdot \vec{n}_L) \cdot \vec{V}_L d\Sigma$$

$$T_\sigma = \oint_{\mathcal{J}} \sigma \vec{V}_i \cdot \vec{N} dl$$

$\vec{V}_i$ étant le vecteur vitesse d'un point de A_i ;

$$\mathcal{H} = - \iint_{A_{eG}(t)} \vec{J}_G \cdot \vec{n}_G d\Sigma - \iint_{A_{eL}(t)} \vec{J}_L \cdot \vec{n}_L d\Sigma$$

$\vec{J}$ étant le vecteur densité de flux de chaleur.

D'où l'équation globale de la conservation de l'énergie :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{v_G(t)} \rho_G \left(\frac{1}{2} \vec{V}_G^2 + E_G \right) d\tau \\ + \frac{d}{dt} \iiint_{v_L(t)} \rho_L \left(\frac{1}{2} \vec{V}_L^2 + E_L \right) d\tau \\ = \iiint_{v_G(t)} \rho_G \vec{F} \cdot \vec{V}_G d\tau + \iiint_{v_L(t)} \rho_L \vec{F} \cdot \vec{V}_L d\tau \\ + \iint_{A_{eG}(t)} (\vec{\mathcal{E}}_G \cdot \vec{V}_G) \cdot \vec{n}_G d\Sigma + \iint_{A_{eL}(t)} (\vec{\mathcal{E}}_L \cdot \vec{V}_L) \cdot \vec{n}_L d\Sigma \\ - \iint_{A_{eG}(t)} \vec{J}_G \cdot \vec{n}_G d\Sigma \\ - \iint_{A_{eL}(t)} \vec{J}_L \cdot \vec{n}_L d\Sigma + \oint_{\mathcal{J}} \sigma \vec{V}_i \cdot \vec{N} dl \end{aligned}$$

Equations aux variables locales instantanées Conditions d'interface

1. Transformation des équations globales.

Les équations globales de conservation établies au paragraphe antérieur sont transformées à l'aide des formules suivantes :

a)

$$\frac{d}{dt} \iiint_{v(t)} f d\tau = \iiint_{v(t)} \frac{\partial f}{\partial t} d\tau + \iint_{\Sigma(t)} f (\vec{V}_\Sigma) \cdot \vec{n} d\Sigma$$

C'est le théorème de la dérivée lagrangienne pour un volume $v(t)$ limité par la surface fermée $\Sigma(t)$. Un point de $\Sigma(t)$ a une vitesse $\vec{V}_\Sigma$ et une normale extérieure $\vec{n}$.

b)

$$\iiint_v \text{div } \vec{A} d\tau = \iint_\Sigma \vec{A} \cdot \vec{n} d\Sigma$$

C'est le théorème d'Ostrogradski, dont nous supposons toujours remplies les conditions d'application.

c)

$$\oint_{\mathcal{C}} f \cdot \vec{N} \cdot dl = \iint_\Sigma \text{grad } f d\Sigma - \iint_\Sigma f \left(\frac{1}{R_1 u_1 \cdot \vec{n}} + \frac{1}{R_2 u_2 \cdot \vec{n}} \right) \vec{n} d\Sigma$$

Dans cette relation f est une fonction suffisamment régulière définie sur la surface Σ limitée par la courbe fermée $\mathcal{C}$. $\vec{N}$ est la normale en un point M de $\mathcal{C}$ située dans le plan tangent en M à Σ (fig. 3). R_1 et R_2 sont les modules des rayons de courbure principaux en un point de Σ . $\vec{u}_i$ est le vecteur unitaire du rayon de courbure R_i dirigé du

centre de courbure vers le point de la surface correspondant.

d)

$$\oint_C f \cdot \vec{V} \cdot \vec{N} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \left[f \operatorname{div} \vec{V} + \vec{V} \cdot \operatorname{grad} f - f \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} \times \left(\frac{1}{R_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{n}} + \frac{1}{R_2 \vec{u}_2 \cdot \vec{n}} \right) \right] d\Sigma$$

$\vec{V}$ est le vecteur vitesse d'un point de Σ .

Les équations globales se mettent à l'aide de ces relations sous forme d'intégrales étendues aux volumes $v_G(t)$ et $v_L(t)$ et d'intégrales étendues aux interfaces $A_i(t)$.

Le théorème de l'intégrale nulle permet ensuite de déduire des relations précédentes des équations locales valables en chaque point de $v_G(t)$ et de $v_L(t)$ et en chaque point de $A_i(t)$. Ces dernières constituent les conditions d'interface qui prennent des aspects différents suivant la présence ou l'absence de transfert de masse entre les phases.

2. Conservation de la masse.

A l'aide des formules de transformation précédentes, on déduit de la loi globale de conservation de la masse les équations locales instantanées pour chaque phase :

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_k \vec{V}_k = 0 \quad (k = G \text{ ou } L)$$

et une condition d'interface :

$$\rho_G (\vec{V}_G - \vec{V}_i) \cdot \vec{n}_G + \rho_L (\vec{V}_L - \vec{V}_i) \cdot \vec{n}_L = 0$$

Cette dernière relation signifie que la masse de gaz qui quitte la phase gazeuse par l'interface est égale à la masse de liquide qui entre dans la phase liquide par l'interface. Ceci définit donc l'interface comme la surface où a lieu le changement de phase.

a) *Cas où il n'y a pas de transfert de masse à l'interface.*

Si la masse de gaz qui quitte la phase gazeuse par l'interface est égale à la masse de liquide qui quitte la phase liquide par l'interface, nous avons :

$$\iint_{A_i(t)} \rho_G (\vec{V}_G - \vec{V}_i) \cdot \vec{n}_G d\Sigma - \iint_{A_i(t)} \rho_L (\vec{V}_L - \vec{V}_i) \cdot \vec{n}_L d\Sigma = 0$$

Cette condition devant être réalisée quel que soit $A_i(t)$, on obtient :

$$\rho_G (\vec{V}_G - \vec{V}_i) \cdot \vec{n}_G - \rho_L (\vec{V}_L - \vec{V}_i) \cdot \vec{n}_L = 0$$

Cette égalité combinée à la condition d'interface donne :

$$(\vec{V}_k - \vec{V}_i) \cdot \vec{n}_k = 0 \quad (k = G \text{ ou } L)$$

Ces deux relations sont vérifiées dans les deux cas suivants :

- α) $\vec{V}_G = \vec{V}_L = \vec{V}_i$: L'interface reste constamment constitué des mêmes particules et forme une surface matérielle.
- β) $(\vec{V}_G - \vec{V}_i)$ et $(\vec{V}_L - \vec{V}_i)$ sont situés dans le plan tangent à l'interface. Il faut nécessairement avoir $\vec{V}_G - \vec{V}_i = \vec{V}_L - \vec{V}_i$ donc $\vec{V}_G = \vec{V}_L$ si on admet qu'il ne peut y avoir un glissement relatif des deux phases à l'interface. De nombreux auteurs utilisent cette hypothèse de non-glissement pour les fluides visqueux et nous ne la discuterons pas.

Nous constatons donc que nous avons toujours l'égalité :

$$\vec{V}_G = \vec{V}_L$$

b) *Cas où il existe un transfert de masse.*

Si on conserve la condition de non-glissement relatif, il faut que les composantes des vecteurs $(\vec{V}_G - \vec{V}_i)$ et $(\vec{V}_L - \vec{V}_i)$ sur le plan tangent à l'interface soient égales. Le vecteur $\vec{V}_G - \vec{V}_L$ doit donc être perpendiculaire à ce plan.

3. Conservation de la quantité de mouvement.

Nous obtenons en appliquant le même raisonnement qu'au paragraphe précédent les équations locales instantanées pour chaque phase :

$$\frac{\partial \rho_k \vec{V}_k}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho_k \vec{V}_k \otimes \vec{V}_k) - \rho_k \vec{F} - \operatorname{div} \vec{\mathcal{E}}_k = 0$$

et la condition d'interface :

$$\begin{aligned} & [\rho_G \vec{V}_G \otimes (\vec{V}_G - \vec{V}_i) - \vec{\mathcal{E}}_G] \cdot \vec{n}_G \\ & + [\rho_L \vec{V}_L \otimes (\vec{V}_L - \vec{V}_i) - \vec{\mathcal{E}}_L] \cdot \vec{n}_L \\ & + \operatorname{grad} \sigma - \sigma \left(\frac{1}{R_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{n}_G} + \frac{1}{R_2 \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_G} \right) \vec{n}_G = 0 \end{aligned}$$

Le dernier terme de cette équation représente la force de Laplace. Quant au troisième terme, $\operatorname{grad} \sigma$, il tient compte de la variation de σ sur l'interface (en fonction de la température par exemple) et intervient dans l'étude des phénomènes de thermocapillarité.

a) *Cas où il n'y a pas de transfert de masse.*

Lorsqu'il n'y a pas de transfert de masse à l'interface, la condition d'interface se réduit à la relation :

$$\begin{aligned} & \vec{\mathcal{E}}_G \cdot \vec{n}_G + \vec{\mathcal{E}}_L \cdot \vec{n}_L - \operatorname{grad} \sigma \\ & + \sigma \left(\frac{1}{R_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{n}_G} \right) + \left(\frac{1}{R_2 \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_G} \right) \vec{n}_G = 0 \end{aligned}$$

Cette équation n'est valable que pour des fluides

visqueux. En effet, dans le cas de fluides parfaits, elle s'écrit :

$$-p_G \vec{n}_G - p_L \vec{n}_L - \text{grad } \sigma + \sigma \left(\frac{1}{R_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{n}_G} \right) + \left(\frac{1}{R_2 \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_G} \right) \cdot \vec{n}_G = 0$$

Les premier, deuxième et dernier termes sont des vecteurs normaux à l'interface, alors que le troisième est tangent à l'interface. L'égalité à zéro du premier membre ne peut donc avoir lieu, dans le cas général, pour des fluides parfaits.

b) Cas où il y a transfert de masse.

Considérons un interface plan (fig. 4), et une tension interfaciale constante. Soit ψ le transfert de masse algébrique exprimé en unité de masse par unité de temps et par unité de surface. On montre que le transfert de masse à travers un élément $d\Sigma$ d'interface produit une force $d\vec{F}$ normale à l'interface caractérisée par les relations suivantes :

$$d\vec{F} \cdot \vec{n}_L = \psi^2 \left(\frac{1}{\rho_L} - \frac{1}{\rho_G} \right) d\Sigma$$

$$\left| \frac{d\vec{F}}{d\Sigma} \right| = \frac{\psi^2}{\rho_G} \left(1 - \frac{\rho_G}{\rho_L} \right)$$

avec :

$$\psi = \rho_L (\vec{V}_L - \vec{V}_i) \cdot \vec{n}_L = \rho_G (\vec{V}_G - \vec{V}_i) \cdot \vec{n}_L$$

Dans le cas de la figure 4 par exemple, l'interface est soumise à une contrainte normale dirigée vers le liquide.

4. Conservation de l'énergie.

Les équations locales instantanées de conservation de l'énergie s'écrivent pour chaque phase :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_k \left(\frac{1}{2} \vec{V}_k^2 + E_k \right) \right] + \text{div} \left[\rho_k \left(\frac{1}{2} \vec{V}_k^2 + E_k \right) \vec{V}_k - \vec{\mathcal{E}}_k \cdot \vec{V}_k + \vec{J}_k \right] - \rho_k \vec{F} \cdot \vec{V}_k = 0 \quad (k = G \text{ ou } L)$$

en appelant E_k l'énergie interne massique de la phase k ($k = G$ ou L).

La condition d'interface correspondante se met sous la forme :

$$\left[\vec{J}_G - \vec{\mathcal{E}}_G \cdot \vec{V}_G + \rho_G \left(\frac{1}{2} \vec{V}_G^2 + E_G \right) (\vec{V}_G - \vec{V}_i) \right] \cdot \vec{n}_G + \left[\vec{J}_L - \vec{\mathcal{E}}_L \cdot \vec{V}_L + \rho_L \left(\frac{1}{2} \vec{V}_L^2 + E_L \right) (\vec{V}_L - \vec{V}_i) \right] \cdot \vec{n}_L + \sigma \text{div } \vec{V}_i + \vec{V}_i \cdot \text{grad } \sigma - \sigma \vec{V}_i \cdot \vec{n}_G \times \left(\frac{1}{R_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{n}_G} + \frac{1}{R_2 \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_G} \right) = 0$$

Dans le cas où il n'y a pas de transfert de masse, cette équation se simplifie en tenant compte des conditions d'interface relatives aux conservations de la masse et de la quantité de mouvement. On obtient finalement :

$$\vec{J}_G \cdot \vec{n}_G + \vec{J}_L \cdot \vec{n}_L + \sigma \text{div } \vec{V}_i = 0$$

4/

5/

Equations aux variables instantanées moyennées dans une section

1. Intérêt.

Ces équations renferment une donnée expérimentale intéressante qui est le rapport de la section de passage d'une phase à la section totale d'une conduite. On reconnaît là la notion de « fraction de vide » des utilisateurs de systèmes gaz-liquide.

2. Recherche des équations moyennées sur une surface.

Deux méthodes peuvent être utilisées :

a) Moyenne surfacique directe.

Les équations locales relatives à une phase donnée sont vraies en tout point de la section de passage de cette phase. Elles peuvent être intégrées directement dans cette section de passage. Le domaine d'intégration dépend donc de z (l'axe Oz étant l'axe de la conduite) et du temps t . Le calcul nécessite l'application de la relation suivante (fig. 5) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{D(z,t)} f(x,y,z,t) dx dy = \iint_{D(z,t)} \frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial t} dx dy + \oint_{C(z,t)} f(x,y,z,t) \vec{V} \cdot \vec{n} dl$$

b) Moyenne volumique et passage à la limite.

Cette méthode consiste à écrire les équations globales de conservation dans une tranche de conduite, puis de prendre les moyennes volumiques de certains termes et enfin de faire tendre vers zéro l'épaisseur de la tranche. Le passage à la limite ne semble pas créer de difficultés mathématiques et, pour des raisons de clarté, nous employons cette méthode.

6/

3. Exemple : Conservation de la masse.

L'équation globale de conservation de la masse de gaz dans la tranche de hauteur Δz s'écrit (fig. 6) :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{v_G(t)} \rho_G d\tau + \iint_{A_i(t)} \rho_G (\vec{V}_G - \vec{V}_i) \cdot \vec{n}_G d\Sigma + \iint_{A'_G} \rho_G \vec{V}_G \cdot \vec{n}_G d\Sigma + \iint_{A_G} \rho_G \vec{V}_G \cdot \vec{n}_G d\Sigma = 0$$

La moyenne volumique (surfactive) d'une variable f_G sera notée $\langle f_G \rangle$ ($\langle f_G \rangle$) et définie par :

$$\langle f_G \rangle = \frac{1}{v_G} \iiint_{v_G} f_G d\tau$$

$$\langle f_G \rangle = \frac{1}{A_G} \iint_{A_G} f_G d\tau$$

L'équation globale s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt} (v_G \langle \rho_G \rangle) + \iint_{A_i(t)} \rho_G (\vec{V}_G - \vec{V}_i) \cdot \vec{n}_G d\Sigma + A'_G \langle \rho_G \vec{V}_G \cdot \vec{n}_G \rangle' + A_G \langle \rho_G \vec{V}_G \cdot \vec{n}_G \rangle = 0$$

Quand $\Delta z \rightarrow 0$ nous avons :

$$\frac{d}{dt} (v_G \langle \rho_G \rangle) \rightarrow \Delta z \cdot \frac{\partial}{\partial t} (A_G \langle \rho_G \rangle)$$

$$\begin{aligned} A'_G \langle \rho_G \vec{V}_G \cdot \vec{n}_G \rangle' - A_G \langle \rho_G \vec{V}_G \cdot \vec{n}_G \rangle &= A'_G \langle \rho_G w_G \rangle' - A_G \langle \rho_G w_G \rangle \\ &\rightarrow \Delta z \cdot \frac{\partial}{\partial z} (A_G \langle \rho_G w_G \rangle) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{A_i(t)} \rho_G (\vec{V}_G - \vec{V}_i) \cdot \vec{n}_G d\Sigma &\rightarrow \Delta z \cdot \int_{J(z,t)} \rho_G (\vec{V}_G - \vec{V}_i) \cdot \vec{n}_G \frac{dl}{n_G \cdot n_{GJ}} \end{aligned}$$

en notant J l'intersection de l'interface A_i et de la section considérée, $\vec{n}_{GJ}$ la normale à J située dans

le plan de section, orientée du gaz vers le liquide. On en déduit en posant $R_G = A_G/A$ l'équation de continuité du gaz moyennée dans la section :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (R_G \langle \rho_G \rangle) + \frac{\partial}{\partial z} (R_G \langle \rho_G w_G \rangle) \\ + \frac{1}{A} \int_{J(z,t)} \rho_G (\vec{V}_G - \vec{V}_i) \cdot \vec{n}_G \frac{dl}{n_G \cdot n_{GJ}} = 0 \end{aligned}$$

Il peut arriver que le produit scalaire $\vec{n}_G \cdot \vec{n}_{GJ}$ soit nul ou non défini. Nous avons montré dans la référence [7] qu'à ces cas singuliers correspondaient des termes supplémentaires dont la valeur était négligeable devant celle des termes réguliers.

On établirait de la même façon les équations de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie.

Equations aux moyennes statistiques locales

Les écoulements diphasiques ont souvent un caractère aléatoire et il est intéressant d'appliquer un opérateur de moyenne statistique aux lois locales instantanées. Dans le cas d'un écoulement diphasique quasi permanent, l'hypothèse ergodique permet de confondre moyenne statistique et moyenne temporelle et ainsi de confronter les résultats théoriques avec les données expérimentales.

1. Définitions et généralités.

A - VARIABLE ALÉATOIRE DE PHASE.

Nous définissons une variable aléatoire de la phase $X_k(x_i, t)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} X_k(x_i, t) &= 1 \text{ si le point } x_i \text{ à l'instant } t \text{ est entouré de la phase } k; \\ X_k(x_i, t) &= 0 \text{ si le point } x_i \text{ à l'instant } t \text{ n'est pas entouré de la phase } k. \end{aligned}$$

B - TAUX DE VIDE LOCAL INSTANTANÉ STATISTIQUE.

Considérons un ensemble de N écoulements diphasiques statistiquement identiques. Plaçons-nous en un point donné $M(x_i)$, le même dans les N écoulements et à un instant t donné.

Nous pouvons définir un taux de vide local instantané statistique en M par :

$$\alpha_G(x_i, t) = \frac{N_G(x_i, t)}{N}$$

$N_G(x_i, t)$ étant le nombre d'expériences où le point M est entouré de gaz à l'instant t .

De la même façon nous définissons :

$$\alpha_L(x_i, t) = \frac{N_L(x_i, t)}{N}$$

C - MOYENNES STATISTIQUES.

Soit $f(x_i, t)$ un paramètre de l'écoulement (par exemple la masse volumique, la composante de la vitesse selon Ox , etc.).

a) Moyenne diphasique de $f(x_i, t)$.

Par définition, ce sera :

$$\overline{f(x_i, t)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N_G} f_{Gi} + \sum_{j=1}^{N_L} f_{Lj}$$

b) Moyenne phasique de $f_k(x_i, t)$.

Elles sont définies par :

$$\overline{f_k(x_i, t)} = \frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^{N_k} f_{ki} \quad k = G \text{ ou } L$$

c) Relation entre la moyenne diphasique et les moyennes phasiques.

Nous déduisons immédiatement des définitions précédentes la relation suivante :

$$\overline{f} = \alpha_G \overline{f_G} + \alpha_L \overline{f_L}$$

d) Moyenne statistique d'une variable aléatoire de phase.

Nous avons de façon évidente les relations :

$$\alpha_k(x_i, t) = \overline{\alpha_k(x_i, t)} \quad k = G \text{ ou } L$$

On peut également calculer les expressions de l'écart-type d'une variable aléatoire de phase, des corrélations doubles diphasiques et des corrélations triples diphasiques [6].

2. Equations aux moyennes statistiques locales.

Pour les N_k ($k = G$ ou L) expériences où le point M se trouve environné de gaz, et uniquement pour ces N_k expériences, l'équation locale de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho_{ki}}{\partial t} + \text{div } \rho_{ki} \vec{V}_{ki} = 0$$

$$i = 1, \dots, N_k \quad (N_k \text{ équations})$$

Ajoutons membre à membre ces N_k équations :

$$\sum_{i=1}^{N_k} \left(\frac{\partial \rho_{ki}}{\partial t} + \text{div } \rho_{ki} \vec{V}_{ki} \right) = 0$$

ou encore :

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^{N_k} \rho_{ki} + \text{div } \sum_{i=1}^{N_k} (\rho_{ki} \vec{V}_{ki}) = 0$$

et d'après la définition du taux de vide local et de la moyenne phasique, il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \overline{\rho_k}) + \text{div } (\alpha_k \overline{\rho_k} \vec{V}_k) = 0 \quad k = G \text{ ou } L$$

La même méthode permet d'établir les équations de conservation pour la quantité de mouvement et l'énergie [6].

Combinaisons des moyennes surfaciques et des moyennes statistiques

1. Quelques relations importantes.

Soit R_k le rapport A_k/A de la section de passage A_k de la phase k ($k = G$ ou L) à la section totale d'une conduite. Nous avons démontré les relations suivantes :

$$\langle \alpha_k \overline{f_k} \rangle = \overline{R_k} \langle \overline{f_k} \rangle \quad k = G \text{ ou } L$$

Ces relations sont valables quel que soit f_k . En particulier si $f_k = 1$ nous obtenons :

$$\langle \alpha_k \rangle = \overline{R_k} \quad k = G \text{ ou } L$$

Nous avons aussi la propriété de commutativité suivante :

$$\langle \overline{f} \rangle = \overline{\langle f \rangle}$$

2. Equations doublement moyennées.

Nous avons vu que l'équation de conservation de la masse de gaz moyennée dans une section s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (R_G \langle \rho_G \rangle) + \frac{\partial}{\partial z} (R_G \langle \rho_G w_G \rangle) + \frac{1}{A} \oint \rho_G (\vec{V}_G - \vec{V}_i) \cdot \vec{n}_G \frac{dl}{n_G \cdot n_{Gj}} = 0$$

En prenant la moyenne statistique sur l'ensemble de N réalisations il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{R_G \langle \rho_G \rangle} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{R_G \langle \rho_G w_G \rangle} + \frac{1}{A} \oint \overline{\rho_G (\vec{V}_G - \vec{V}_i) \cdot \vec{n}_G} \frac{dl}{n_G \cdot n_{Gj}} = 0$$

Or, nous avons établi l'équation suivante :

$$\frac{\partial \alpha_G \overline{\rho_G}}{\partial t} + \text{div } \alpha_G \overline{\rho_G} \vec{V}_G = 0 \quad (1)$$

Nous allons montrer comment un raisonnement en apparence logique peut amener à un résultat absurde.

Moyennons l'équation précédente dans la section :

$$\frac{\partial \langle \alpha_G \overline{\rho_G} \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \langle \alpha_G \overline{\rho_G w_G} \rangle = 0$$

Comme nous avons :

$$\langle \alpha_G \overline{f_G} \rangle = \overline{R_G} \langle \overline{f_G} \rangle$$

nous concluons :

$$\frac{\partial \overline{R_G} \langle \rho_G \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \overline{R_G} \langle \rho_G w_G \rangle}{\partial z} = 0$$

ce qui implique :

$$\oint \overline{\rho_G (\vec{V}_G - \vec{V}_i) \cdot \vec{n}_G} \frac{dl}{n_G \cdot n_{Gj}} = 0$$

Ce résultat est absurde. En effet, cela revient à dire que le transfert de masse est nul, ce que nous n'avons supposé à aucun moment. L'erreur a été de moyenniser l'équation (1) dans la section. Cette

opération n'a aucun sens, car, comme nous l'avons souligné plus haut, l'équation (1) n'est définie que pour les points entourés de gaz.

Ce raisonnement est valable pour toutes les autres équations de conservation et nous pouvons énoncer les propositions suivantes :

- a) Toute équation phasique (relative à une phase donnée) moyennée dans une section peut être moyennée statistiquement;
- b) Une équation phasique moyennée statistiquement ne peut pas être moyennée dans une section.

Conclusions

Nous venons d'établir quelques équations de conservation dans les différentes présentations par lesquelles on peut aborder l'étude des écoulements diphasiques.

Ces équations, qui sont générales, paraissent compliquées et inutilisables à première vue. Cependant, il est nécessaire de développer la théorie le plus possible et ce n'est que devant l'impossibilité de continuer les recherches formelles qu'il faut alors introduire les hypothèses suggérées soit par une intuition basée sur une connaissance approfondie de la mécanique des fluides, soit par des résultats expérimentaux.

Il semble que la considération de modèles d'écoulement monodimensionnels puisse amener à certains résultats intéressants. C'est la voie de recher-

che qu'ont choisi G. B. Wallis et J. G. Collier [8] à qui l'on doit une étude quasi exhaustive sur l'état actuel de la mécanique et de l'énergétique des écoulements diphasiques.

Références

- [1] SANDART (G.). — The mass, momentum and energy equations for heterogeneous flow systems. *Chemical Engineering Science*, vol. 19, n° 3, (1964), 227-236.
- [2] BIRKHOFF (G.). — Averaged conservation laws in pipe. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, n° 8, 1 (1964), 66-77.
- [3] FORTIER (A.). — Mécanique des suspensions. *Masson* (1967).
- [4] ZUBER (N.), STAUB (F.W.) and BLJWAARD (G.). — A program of two-phase flow investigation. 7th Quarterly Report (October-December 1964) GEAP 4778.
- [5] TELETOV (C.G.). — Hydrodynamique des mélanges diphasiques : 1. Equations hydrodynamiques et de l'énergie. *Vestnik de l'Université de Moscou* (1958, n° 2).
- [6] DELHAYE (J.M.). — Equations fondamentales des écoulements diphasiques. — Première partie : Equations générales de conservation. Communication présentée au Séminaire franco-soviétique sur le transfert de chaleur. Grenoble (novembre 1966). Rapport C.E.A. à paraître.
- [7] DELHAYE (J.M.). — Equations fondamentales des écoulements diphasiques.. — Deuxième partie : Compléments et remarques. Rapport C.E.A. à paraître.
- [8] WALLIS (G.B.) and COLLIER (J.G.). — Two-phase flow and heat transfer. Notes for a Summer Course (July 10-22 1966), Thayer School, Dartmouth College, Hanover, N.H.

Discussion

Président : M. CHAYA

M. le Président souligne pour les membres de l'auditoire qui seraient intéressés plus spécialement par les aspects techniques, que l'absence, il y a quelques années, d'une analyse rigoureuse comme celle-ci laissait un flou dans les équations que l'on était amené à utiliser. Il était donc nécessaire de réexaminer à fond les équations de base de la double phase. Il s'agit bien entendu des fondements d'un édifice qui doit ensuite se développer à partir d'approximations appropriées.

M. BANAL demande pourquoi l'on conserve la notion de moyenne statistique qui est purement théorique et inaccessible à l'expérience.

M. DELHAYE répond que les calculs faits avec des moyennes temporelles n'aboutissaient pas et que Reynolds avait d'ailleurs des difficultés identiques en écoulement monophasique.

M. le Président rappelle que Reynolds calculait des moyennes spatiales dans un petit domaine et que la dimension de ce domaine apporte une gêne au développement de la théorie. D'autre part, un phénomène permanent en moyenne dans le temps correspond à une infinité de réalisations, de sorte que l'emploi de la moyenne statistique devrait paraître assez naturel à un physicien.

M. DELHAYE confirme que l'on est surtout gêné par le fait que l'utilisation d'une moyenne physique implique une intégration dont les bornes dépendent des coordonnées.

M. BANAL croit comprendre que, plutôt que d'utiliser deux variables « temps » en faisant le calcul à l'aide des moyennes temporelles, l'utilisation du temps et de la moyenne

statistique est une manière de « moyenner » dans le temps et qu'en tout état de cause, l'essentiel est que M. DELHAYE ait essayé les deux manières et ait conclu que la moyenne statistique est plus agréable et plus efficace. Il se demande, toutefois, si ce n'est pas une question de langage plus qu'un défaut fondamental.

M. le Président ne veut pas exclure la possibilité de créer un autre langage.

M. SÉMÉRIA indique que l'utilisation de la moyenne statistique est intéressante aussi pour les mouvements transitoires, dans lesquels on peut toujours définir une moyenne statistique sur n réalisations, ce qui est expérimentalement possible, alors qu'on ne peut pas toujours choisir une échelle de temps convenable pour obtenir une moyenne temporelle.

M. THIRRIOT demande au conférencier de parler de l'application de ses concepts à la comparaison des moyennes, ou bien des bilans dynamiques et des bilans énergétiques, pour évaluer les pertes de charge et les pertes de pression.

M. DELHAYE répond que, dans son exposé, il n'a parlé que de la conservation de la masse et d'une équation de conservation de quantité de mouvement, et que d'autres résultats sont énoncés dans le mémoire qui sera publié. Il existe, d'autre part, deux rapports où sont développées toutes les équations : équations de conservation de l'énergie, équations de l'énergie, équations d'énergie approchée avec des applications un peu plus physiques qui correspondent à des problèmes concrets.