CONTRIBUTION A UNE SYNTHÈSE SYSTÉMATIQUE DE QUELQUES NOTIONS ET MÉTHODES DE LA SIMILITUDE PHYSIQUE

PAR Th. XANTHOPOULOS *

Symboles

x_i, y_i	variables (données, inconnues);
l_i, k_j	échelles (données, inconnues);
X_i, Y_j	variables réduites (données, inconnues);
α_{ij}	éléments de la matrice dimensionnelle des variables;
c_{ji}	éléments de la matrice de solutions;
F	force;
$\vec{V}$	vitesse;
L	dimension linéaire caractéristique;
ρ	masse spécifique;
μ	coefficient dynamique de viscosité;
$\vec{E}$	champ électrique (V/m);
$\vec{B}$	induction magnétique (Wb/m^2);
σ	conductivité (mho/m);
μ_0	perméabilité (H/m);
σ'	tension superficielle;
C_p, C_v	chaleurs spécifiques;
K	coefficient de conductivité thermique;
a	vitesse du son dans le fluide.

* Dr. Ing. E.N.S.H.E.E.T., Prof. Ass. d'Hydraulique à la Faculté Polytechnique de l'Université d'Aristote.

Généralités sur la similitude physique

1. Définitions.

A chaque branche de la physique correspondent un certain nombre de définitions et de lois qui relient les grandeurs expérimentales et qui s'expriment par un système d'équations. Ce système permet, quand on se fixe certaines grandeurs, dites données, de calculer les autres, dites inconnues. Se poser un *problème,* c'est choisir quelles grandeurs seront les données. Un problème est dit *bien posé* s'il a une solution unique.

On peut dire qu'on considère un problème particulier quand on s'est fixé un domaine d'espace et de temps où se produit *le phénomène* auquel on s'intéresse. Le système d'équations comprend des *équations générales,* c'est-à-dire valables en tout point du domaine, et des équations valables sur sa frontière, ou *équations à la frontière.* Usuellement les équations générales comportent des opérations de dérivation et d'intégration; on distingue alors parmi les données celles par rapport auxquelles on dérive ou intègre, ou *données variables,* et les autres, que nous appellerons *données constantes :* Dans chaque problème particulier les données constantes sont fixées. Quand on se fixe toutes les données, variables ou non, nous dirons qu'on considère un *point physique.*

Supposons-nous placés au stade où l'on connaît la *solution* du problème, c'est-à-dire où l'on dispose d'équations sans dérivation ni intégration, ou *équa-*

tions finies. Soit n le nombre des grandeurs en jeu, d le nombre total des données, x, variables ou non. La solution s'exprime par $n - d$ équations finies qui décrivent les phénomènes considérés. Ecrivons des équations résolues par rapport aux inconnues y :

$$y_i = f_j (x_1, \dots x_i, \dots x_d) \qquad (1)$$

$$(i = 1 \text{ à } d \qquad j = 1 \text{ à } n - d)$$

Soit un point physique; il est représenté par un multiplet (y_i, x_i) de n quantités satisfaisant à (1). Soit une transformation par multiplication, déterminée par un multiplet (k_j, l_i) de n facteurs, le point transformé étant par définition :

$$(k_j x_j, l_i x_i)$$

Supposons qu'il existe un ensemble S de multiplets (k_j, l_i) tel que chaque point transformé $(k_j y_j, l_i x_i)$ soit aussi un point physique, c'est-à-dire satisfait à (1) de sorte qu'on a :

$$k_j y_j = f_j (l_1 x_1, \dots l_d x_d) \qquad (2)$$

supposons de plus que l'ensemble S soit délimité par des relations indépendantes de y_j et de x_i, c'est-à-dire relie les seules quantités k_j, l_i :

$$G_m (k_1, \dots k_{n-d}, l_1, \dots l_d) = 0 \quad (m = 1 \text{ à } u - p) \qquad (3)$$

On dit alors que l'ensemble S est un ensemble de similitudes, et que le problème comporte une *similitude* au sens global.

Du fait que les relations (3) sont indépendantes des grandeurs y_j, x_i, le fait que (1) entraîne (2) est valable pour tous les points physiques (y_i, x_i). La recherche des similitudes correspondant à un problème se ramène à la recherche des relations (1) telles que la validité des (3) et (1) ait comme conséquences la validité des (3).

Les facteurs $k_j \dots l_i$ sont appelés *échelles*, les relations (3) entre échelles les *relations de similitude*. La différence p entre le nombre n des grandeurs en jeu et le nombre de relations de similitude s'appelle la *liberté de similitude*.

Remarquons que dans chaque domaine physique, l'ensemble des similitudes forme un groupe, car il satisfait aux axiomes fondamentaux de la structure des groupes [1].

Les échelles des inconnues se trouvent déterminées par les équations (1), de sorte que le nombre des relations (3) est au moins égal au nombre des inconnues :

$$n - p \geqq n - d \qquad \text{ou} \qquad p \leqq d$$

Si la liberté de similitude p est inférieure au nombre de données, on peut se fixer arbitrairement p échelles de données. On appelle *système de grandeurs primaires* un système de p grandeurs dont les échelles sont arbitraires, et déterminent les autres échelles; ce système, $x_1 \dots x_p$, étant supposé choisi, les relations de similitude (3) s'écrivent :

$$k_j = g_j (l_1 \dots l_p), \quad (j = 1 \text{ à } n - d) \qquad (4)$$

$$l_r = h_r (l_2 \dots l_p), \quad (r = p + 1 \text{ à } d) \qquad (5)$$

On appelle *conditions de similitude* les relations (5) déterminant les échelles des données non-primaires : ces relations sont suffisantes pour qu'on obtienne à partir d'un point physique un autre point physique par similitude. On appelle résultats de similitude les relations (4) déterminant les échelles des inconnues. Du fait que le problème a été bien posé, c'est-à-dire que la solution est unique, et que le point $(k_j y_j, l_i x_i)$ est une solution correspondant aux données transformées $(l_i x_i)$, il est *la* seule solution correspondant à ces données; par conséquent, les relations (4) *sont des conséquences* des relations (5).

2. Premier théorème fondamental ou théorème de Federmann (*).

A la base de la théorie de la similitude se trouve le théorème des *produits de puissances :* Toute relation de similitude est une égalité entre produits de puissances des échelles.

Nous allons donner une démonstration de ce théorème : elle est fondée sur le fait que l'ensemble des similitudes de chaque problème est un *groupe*.

Soient deux similitudes particulières :

$$(k_j, l_i) \qquad (k'_j, l'_i)$$

c'est-à-dire deux multiplets satisfaisant aux relations (4 et 5); si sur un point physique (y_j, x_i) on fait la transformation (k_j, l_i), puis la transformation (k'_j, l'_i), on obtient par hypothèse encore un point physique; or le point obtenu finalement est :

$$(k'_j k_j y_j, l'_i l_i x_i)$$

par conséquent au multiplet :

$$(k''_j, l''_i) = (k'_j k_j, l'_i l_i)$$

correspond une similitude; ce multiplet satisfait aux relations (4 et 5) :

$$k''_j = k'_j k_j = g_j (l'_1, \dots l'_p) \cdot g_j (l_1, \dots l_p) = g_j (l'_1 l_1, \dots l'_p l_p)$$

$$l''_r = l'_r l_r = h_r (l'_1, \dots l'_p) \cdot h_r (l_1, \dots l_p) = h_r (l'_1 l_1, \dots l'_p l_p)$$

Ainsi toutes les fonctions g_j et h_r satisfont à :

$$g (l'_1, \dots l'_p) \cdot g (l_1, \dots l_p) = g (l'_1 l_1, \dots l'_p l_p)$$

en particulier :

$$g (l_1, 1, \dots 1) \cdot g (1, l_2, 1, \dots 1) = g (l_1, l_2, 1, \dots 1)$$

$$g (l_1, 1, \dots 1) \cdot g (l_1, 1, \dots 1) = g (l_1 l_1, 1, \dots 1)$$

Pour simplifier l'écriture, posons une liberté p égale à 2, chaque fonction g est fonction de deux arguments, soit $g(u, \upsilon)$; posons :

$$g (u, 1) = \varphi (u) \qquad g (1, \upsilon) = \psi (\upsilon)$$

(*) Ce théorème est valable dans des conditions relativement larges de continuité des fonctions f dans (1). Federmann l'a d'abord établi lorsque les fonctions f sont dérivables en tout point; le théorème a été étendu au cas des fonctions dérivables en un seul point, ou même seulement continues par morceaux.

Il vient :

$$g(u, v) = \varphi(u) . \psi(v)$$

et si :

$$u'' = uu' \qquad \varphi(u'') = \varphi(uu') = \varphi(u) . \psi(u')$$

Prenons les logarithmes des arguments u et v et de leurs images et utilisant les symboles surlignés :

$$\bar{u} = \text{Log}. u \qquad \bar{u}' = \text{Log}. u' \qquad \bar{\varphi}(\bar{u}'' = \text{Log}. \varphi(u'') \ldots$$

Il vient alors :

$$\bar{u}'' = \bar{u} + \bar{u}' \qquad \bar{\varphi}(\bar{u}'') = \bar{\varphi}(\bar{u} + \bar{u}') = \bar{\varphi}(\bar{u}) + \bar{\varphi}(\bar{u}')$$

La fonction $\bar{\varphi}$ et les fonctions analogues sont donc *additives*. Supposons alors seulement que la fonction $\bar{\varphi}$ est *continue par morceaux*, la seule fonction à la fois additive et continue par morceaux est, on le sait, la fonction linéaire :

$$\bar{\varphi}(\bar{u}) = \beta_1 \bar{u} \qquad \bar{\psi}(v) = \beta_2 v$$

D'où :

$$g(u, v) = u^{\beta_1} . v^{\beta_2}$$

le théorème est démontré.

L'hypothèse sur $\bar{\varphi}$ paraît correcte en ce que jusqu'ici les fonctions continues par morceaux suffisent à toutes les branches de la physique pour les fonctions f; or $\varphi(u)$ est un quotient des fonctions f; il suffit qu'on ne considère pas de valeur nulle des fonctions f; φ est alors continue par morceaux et $\bar{\varphi}$ de même.

3. Deuxième théorème fondamental ou théorème de Vaschy.

Explicitons les relations de similitude (4) et (5) en appliquant le théorème précédent :

$$k_j = l_1^{\beta_{1j}} \ldots l_p^{\beta_{pj}}, \qquad l_r = l_1^{\gamma_{1r}} \ldots l_p^{\gamma_{pr}} \tag{6}$$

Faisons correspondre à chaque grandeur non primaire y_j ou x_r la grandeur suivante, dite *grandeur réduite :*

$$Y_j = \frac{y_j}{x_1^{\beta_{1j}} \ldots x_p^{\beta_{pj}}} \qquad X_r = \frac{x_r}{x_1^{\gamma_{1r}} \ldots x_p^{\gamma_{pr}}} \tag{7}$$

On voit que dans toute similitude l'échelle de toute grandeur réduite est égale à 1 et on démontre facilement, c'est le *théorème de Vaschy,* que chaque équation-solution (1) peut se mettre sous la forme :

$$Y_j = F_j(X_{p+1}, \ldots X_r, \ldots X_d) \quad (j = 1 \text{ à } n - d) \tag{8}$$

Les équations de ce type, dites *équations réduites,* ont des avantages bien connus : leur simplicité, leur propriété d'être la base des essais sur modèles.

Le plus souvent on peut, en fait, se contenter de considérer, comme relations de similitude (4) et (5), les formules des dimensions. C'est ce qu'on appelle la méthode dimensionnelle pour l'étude de la similitude. Dans ce qui suit, nous adoptons le langage de cette méthode : au lieu de grandeur d'échelle 1, nous dirons grandeurs adimensionnelles; le théorème de Vaschy s'exprime alors ainsi : « Un système de formules de dimensions avec k unités fondamentales ayant été adopté, toute solution d'un problème, si elle s'exprime par des équations contenant n grandeurs, s'exprime aussi par autant d'équations contenant $n - k$ grandeurs seulement, grandeurs qui sont adimensionnelles. »

Ce théorème est aussi appelé théorème π, le symbole π ayant été proposé par Buckingham pour désigner les produits de puissances adimensionnels.

Contribution du calcul matriciel à l'analyse dimensionnelle et applications

1. Recherche des systèmes complets de produits adimensionnels π_i.

Tout produit π garde la même valeur quand on passe à un nouveau système d'unités en suivant les formules de dimensions adoptées, ou quand on passe d'un phénomène (P) à un phénomène semblable (P'); autrement dit :

$$\pi_i = \pi'_i \tag{9}$$

On dit qu'un système de produits π est un *système complet* si le système des équations (9) équivaut mathématiquement au système des relations de similitude (5) et qu'aucun produit π_i n'est égal à une combinaison multiplicative des autres.

Il est bon de souligner que si k est le nombre des grandeurs fondamentales du système d'unités choisi pour telle branche de la physique, le nombre p des échelles arbitraires peut, dans le problème posé, être inférieur à k :

$$p \leqq k$$

en effet ce nombre p est le rang de la matrice dimensionnelle α_{ij} dit n grandeurs considérées. Le nombre des produits π d'un système complet est alors égal à $n - p$ et non à $n - k$ (*).

La forme générale d'un tel produit adimensionnel quelconque sera donc :

$$\pi = x_1^{c_1} x_2^{c_2} \ldots x_n^{c_n} = \Pi_{i=1}^{n} x_i \tag{10}$$

et les exposants c_i seront une solution du système linéaire :

$$\alpha_{ij} c_j = 0 \tag{11}$$

($i = 1$ à p, indice libre; $j = 1$ à n, indice muet), qui, pour simplifier les symboles, pourra s'écrire :

$$A . C = 0 \tag{12}$$

ou :

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} \ldots \alpha_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{p1} \ldots \alpha_{pn} \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} c_1 \\ \ldots \\ c_s \end{vmatrix}$$

(*) Un exemple élémentaire est donné en dynamique des fluides par telle équation des fluides visqueux où apparaissent des coordonnées et des vitesses et où les propriétés dynamiques du fluide, masse volumique ϱ et viscosité μ ne s'introduisent que par leur quotient μ/ϱ, de dimension L^2T^{-1}. En dynamique on a $k = 3$ grandeurs fondamentales; mais pour cette équation le nombre de produits π d'un système complet est $n - 2$.

Pour $n > p$, ce qui est toujours le cas, on aura $n-p$ solutions linéairement indépendantes, qui constituent un système complet des solutions, et qui dérivent de (12) comme suit :

$$\overset{n-p}{A_1} . \overset{n-p}{C_1} + \overset{n}{A_{n-p+1}} . \overset{n}{C_{n-p+1}} = 0$$

ce qui peut s'écrire :

$$\overset{n}{A_{n-p+1}} . \overset{n}{C_{n-p+1}} = - \overset{n-p}{A_1} . \overset{n-p}{C_1} \tag{13}$$

avec :

$$A_r^t = \begin{vmatrix} \alpha_{1r} \dots \alpha_{1t} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{pr} \dots \alpha_{pt} \end{vmatrix} \qquad C_r^t = \begin{vmatrix} c_r \\ \dots \\ c_t \end{vmatrix}$$

Pour chaque matrice-colonne C_r^t on aurait une solution de (13) :

$$\overset{n}{C_{n-p+1}} = - |\overset{n}{A_{n-p+1}}|^{-1} . |\overset{n-p}{A_1} . \overset{n-p}{C_1}| \tag{14}$$

et par suite un produit π.

On cherche un système complet de $n-q$ produits π qui aura la forme générale :

$$\pi_j = \Pi_{i=1}^{n} x_i^{c_{ij}}$$

ou :

$$\mathrm{Log}\, \pi_j = o_{ji} . \mathrm{Log}\, x_i \quad (j = 1 \text{ à } n-p, i = 1 \text{ à } n) \tag{15}$$

Par définition, les produits du système doivent être multiplicativement indépendants; donc le rang de la matrice c_{ji} doit être égal à $n-p$.

Cette matrice c_{ji} est appelée *matrice du système complet des solutions*. Étant donné que l'on peut choisir arbitrairement les $n-p$ premières colonnes de cette matrice, on a tout intérêt à former avec elles la matrice carrée unitaire d'ordre $n-p$ (tenseur Kronecker, $g_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ et $g_{ij} = 1$ pour $i = j$). Mais il faudra faire attention à ce que la matrice dimensionnelle des p grandeurs qui restent à droite de la matrice des solutions soit de rang p comme la matrice rectangulaire des n grandeurs en jeu.

D'autre part, on sait que le produit d'une matrice N, de a lignes et b colonnes, par une matrice colonne ayant tous ses éléments nuls sauf un seul unitaire, celui de la r ligne, donnera une matrice-colonne de a éléments, qui seront ceux de la r colonne de la matrice N. On en déduit que la sous-matrice formée par les p dernières colonnes de la matrice de solutions, sera identiquement égale à la transposée de :

$$N = |\overset{n}{A_{n-p+1}}|^{-1} . |\overset{n-p}{A_1}|$$

En conclusion, la matrice des solutions c_{ji}, qui donnera immédiatement les produits π sera formée par deux sous-matrices, la matrice carrée unitaire et la transposée de la matrice N.

2. Application systématique en Magnétohydrodynamique.

Les équations générales de la M.H.D., c'est-à-dire les trois équations de la dynamique en tenant compte des forces Lorentz, l'équation de continuité, l'équation d'énergie, les lois d'état, les équations Maxwell et les lois d'Ohm, nous donnent comme variables les F, V, ρ, μ, g, c_p, c_V, μ_0, E, B. D'autre part, les conditions initiales et conditions aux limites donneront les L, α, σ, K, σ'. Nous aurons donc les produits π de la forme :

$$\pi = F^{c_1} . V^{c_2} . L^{c_3} . \rho^{c_4} . \mu^{c_5} . g^{c_6} . E^{c_7} . B^{c_8} . \sigma^{c_9} . \mu_0^{c_{10}} . \sigma'^{c_{11}} . c_p^{c_{12}} . c_V^{c_{13}} . K^{c_{14}}$$

En utilisant le système M.K.S.A. avec grandeurs fondamentales les M.L.T.I. (ampère) et θ (température) nous aurons la matrice dimensionnelle :

		M	L	T	I	θ
c_1	$\vec{F}$	1	1	-2	0	0
c_2	$\vec{V}$	0	1	-1	0	0
c_3	L	0	1	0	0	0
c_4	ρ	1	-3	0	0	0
c_5	μ	1	-1	-1	0	0
c_6	$\vec{g}$	0	1	-2	0	0
c_7	$\vec{E}$	1	1	-3	-1	0
c_8	$\vec{B}$	1	0	-2	-1	0
c_9	σ	-1	-3	3	2	0
c_{10}	μ_0	1	1	-2	-2	0
c_{11}	σ'	1	0	-2	0	0
c_{12}	c_p	0	2	-2	0	-1
c_{13}	c_V	0	2	-2	0	1
c_{14}	K	1	1	-3	0	-1
c_{15}	α	0	1	-1	0	0

On vérifiera que $p = 5$, donc on aura finalement dix produits que l'on retrouve en formant la matrice des solutions.

On s'arrange pour avoir à droite de la matrice dimensionnelle un déterminant différent de zéro et l'on place à gauche les variables qui changent le plus expérimentalement, pour avoir le système complet des produits π, le plus commode pour les applications. Les p grandeurs écrites à droite sont les grandeurs *primaires*, définies au § 1.1, et les $n-p$ grandeurs, écrites à gauche, sont les *non-primaires*. Dans la présente application on choisira comme grandeurs primaires les L. V, c_p, c_V, B et après avoir transformé les π directement obtenus, et les combinant multiplicativement, pour retrouver les π les plus habituels, on aura finalement pour la M.H.D. :

$$\pi_1 = \mathcal{R} = \frac{V.L}{\mu/\rho} \text{ (nombre de Reynolds);}$$

$$\pi_2 = \mathcal{F} = \frac{V^2}{L.g} \text{ (nombre de Froude);}$$

$$\pi_3 = \mathcal{E} = \frac{F}{\rho L^2 V^2} \text{ (nombre d'Euler);}$$

$$\pi_4 = M = \frac{V}{a} \text{ (nombre de Mach);}$$

$$\pi_5 = \mathcal{P} = \frac{\mu c_p}{K} \text{ (nombre de Prandtl);}$$

$$\pi_6 = \gamma = \frac{c_p}{c_V}$$

$$\pi_7 = \mathcal{W} = \frac{\rho V^2 L}{\sigma} \text{ (nombre de Weber);}$$

$$\pi_8 = \mathcal{R}_m = \mu_0 V L \sigma \text{ (nombre de Reynolds magnétique);}$$

$$\pi_9 = \mathcal{R}_H = \frac{B^2}{\mu_0 \rho V^2} \text{ (nombre de Hartman);}$$

$$\pi_{10} = \frac{E}{V.B}.$$

On signale enfin que la division des grandeurs en primaires et non primaires et l'emploi de la matrice unité comme sous-matrice à gauche dans la matrice c_{ji}, est une règle trop rigide et seulement destinée à fournir un système provisoire de π; tels autres π peuvent être particulièrement commodes, p.e. l'un parce qu'il est sensiblement sans influence dans telle sorte de phénomènes, un autre parce qu'il est pratiquement à peu près constant.

Bibliographie

[1] Martinot-Lagarde (A.). — Similitude physique. *Mémorial des Sciences Physiques* (1960), p. 50-54.

[2] Escande (L.). — Hydraulique Générale, tome II, *Privat*, Toulouse (1950), p. 214-237.

[3] Brun et Martinot-Lagarde. — Mécanique des Fluides, *Dunod*, Paris (1960), p. 144-155.

[4] Xanthopoulos (Th.). — Contribution de l'analyse mathématique et des applications en laboratoire à la généralisation de la théorie et des études expérimentales sur modèles physiques à échelle quelconque, *University Press*, Thessalonique (1965), p. 17-25, 38-46, 55-62.

[5] Bridgman. — Dimensional Analysis, N. Haven (1943), p. 58.

[6] Langhaar. — Analyse Dimensionnelle, *Dunod*, Paris (1956), p. 38-54.

[7] Lagaze (H.). — Tour d'horizon sur la Magnétohydrodynamique, *Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air*, n° B S.T. 128, p. 19-39.

[8] Germain. — *Office National d'Etudes et de Recherches Aéronautiques*, Publication n° 97 (1959).

[9] Cowling. — Magnetohydrodynamics, Interscience, New York 1957, trad. *Dunod* Paris (1960).

[10] Kantroqitz. — Magnetohydrodynamics, Landshoff, *Stanford University Press* (1958).

[11] Kruskal. — La théorie des Gaz Neutres et Ionisés, *Hermann*, Paris (1960).

[12] Streeter. — Fluid Dynamics, *Mc-Graw-Hill* (1958).

[13] Rosenbluth. — Plasma in Magnetic Field, Landshoff, *Stanford University Press* (1958).

[14] Hoyle. — Magnetohydrodynamics, Landshoff, *Stanford University Press* (1957).

[15] Sananès et Xanthopoulos. — Etudes des conditions d'écoulement à grande vitesse dans un canal courbe de section rectangulaire, muni de seuils obliques, *C. R. Acad. Sci., Paris* (3-8-1964), groupe 2.