

**MODÈLE  
MATHÉMATIQUE DE MARÉES  
LITTORALES.  
CALCUL NUMÉRIQUE  
SUR L'EXEMPLE DE LA  
MANCHE**

**PAR J.-L. HYACINTHE \*  
ET  
J. KRAVTCHEKO \*\***

Communication  
présentée au Comité technique  
de la Société Hydrotechnique de France  
le 8 juin 1967

## I. Objet du mémoire

On discute ici la méthode du calcul numérique des marées littorales moyennes, déjà utilisée en particulier par W. Hansen [1] et par F. Gohin [2], et on l'applique au cas de la Manche en attachant la plus grande importance à la représentation des courants de marée.

Les portions de mer qui vérifient l'hypothèse des marées littorales sont caractérisées par les propriétés suivantes : elles sont peu profondes, d'étendues assez faibles pour qu'on puisse y négliger l'action du potentiel générateur de marées océaniques et cependant d'étendues assez grandes pour que la prise en compte de l'accélération de Coriolis devienne indispensable. Pour la commodité du lecteur, nous établissons rapidement les équations de départ. Nous indiquons ensuite celles de leurs propriétés analytiques qui sont utiles au traitement numérique des problèmes posés. Enfin, nous donnons les résultats des calculs numériques des marées moyennes dans la Manche qui sont en bon accord avec les données « nature » disponibles dans la littérature. On trouvera dans [3] le résumé condensé d'une partie des conclusions ci-après.

\* Maître-assistant à la Faculté des Sciences, Laboratoire de Mécanique des Fluides de l'Université de Grenoble.

\*\* Professeur à la Faculté des Sciences, Laboratoire de Mécanique des Fluides de l'Université de Grenoble.

## II. Notations

Nous rapportons le mouvement des eaux au repère lié à la Terre, constitué par le géoïde  $G$ . Soient :  $M$  un point de l'espace;  $N$  le pied de la normale abaissée de  $M$  sur  $G$ . Le point  $M$  sera repéré par les coordonnées  $x, y$  (quelconques, par exemple les coordonnées géographiques) de  $N$  et la cote  $z = \overline{NM}$ , comptée positivement vers le haut. Le vecteur  $\vec{g}(M)$ , accélération vulgaire de la pesanteur en  $M$  est, par définition, normal à  $G$ . On note :  $\vec{\Omega}$ , le vecteur rotation de la Terre par rapport aux étoiles fixes;  $\lambda$ , la latitude de  $M$ ;  $f$ , la quantité  $2\Omega \cdot \sin \lambda$ ;  $z = -h(x, y) \leq 0$ , l'équation du fond de la mer;  $\vec{V}(M, t) = \vec{V}(x, y, z, t)$  le vecteur vitesse par rapport à  $G$  d'une particule liquide (de densité  $\rho_1$  constante) à l'instant  $t$ ;  $u, v, w$ , les composantes de  $\vec{V}$  suivant les lignes coordonnées passant par  $M$ ;  $\zeta(x, y, t)$ , la dénivellation suivant  $NM$  par rapport à  $z = 0$  de la surface libre de la mer;  $\Sigma$  un domaine simplement connexe de  $G$ ;  $S$ , la frontière de  $\Sigma$ ;  $\mathcal{D}$ , le volume limité par le fond, la surface libre et la surface réglée engendrée par la verticale vulgaire se déplaçant le long de  $S$ . Dans les applications,  $S = S_1 + S_2$ , où  $S_1$  est le tracé côtier de la mer et  $S_2$  une limite ouverte, tracée sur  $G$  et séparant la mer littorale de l'océan. A noter que  $S_1$  et  $S_2$  peuvent se composer d'arcs distincts.

**III. Hypothèse des marées littorales**

Nous dirons que la marée dans  $\mathcal{O}$  est littorale (\*) si :

1°  $w$  est négligeable vis-à-vis de  $u$  et  $v$ . On fera donc  $w = 0$ ;

2°  $\vec{V}(M, t)$  ne dépend pas de  $z$  :  $\vec{V} = \vec{V}(x, y, t)$ ;

3°  $\Sigma$  est assez petit pour que :

a)  $\lambda$  varie peu dans  $\Sigma$ , de sorte qu'on remplacera  $f$  par sa valeur moyenne dans  $\Sigma$ ;

b)  $\vec{g}(M)$  soit pratiquement constant dans  $\mathcal{O}$ ;

c) l'on puisse assimiler  $\Sigma$  à sa projection sur un plan tangent  $\Pi$  à  $G$ , convenablement choisi : les coordonnées de  $M$  dans le repère orthonormé OXYZ (OXY dans  $\Pi$ ) sont alors celles de la projection de  $N$  sur  $\Pi$  et  $z$ ;

d) l'action du potentiel générateur des marées soit négligeable dans  $\mathcal{O}$ ;

4° Il est possible de linéariser l'accélération relative  $d\vec{V}/dt$  et d'écrire :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

5°  $\Sigma$  est assez étendu pour que l'accélération de Coriolis  $2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}$  doive être prise en compte;

6° La viscosité du liquide est négligeable; les forces intérieures au liquide se réduisent à des pressions dont la répartition suivant toute normale au géoïde est, comme on peut le vérifier, hydrostatique;

7° Les frottements de fond sur le prisme liquide  $P$ , de base  $d\sigma$  sur le géoïde, à génératrice normale à  $G$ , équivalent à une force approximativement horizontale  $-\rho_1 R |\vec{V}| \vec{V} d\sigma$ , où  $R$  est une constante empirique.

Les conditions 1 et 2 ci-dessus découlent du fait que la marée est une onde longue; elles sont bien vérifiées si  $h(x, y)$  est petit vis-à-vis de la longueur d'onde moyenne de la marée et si cette fonction est assez régulière dans  $\Sigma$ . La condition 4 sera alors bien vérifiée dans  $\mathcal{O}$ , sauf dans le voisinage des points de  $S_1$ , où le profil des côtes est irrégulier. De la condition 3, il résulte que les marées dans  $\mathcal{O}$  sont induites seulement par l'action de la marée océanique le long de  $S_2$ . La condition 7 résulte de l'interprétation de nombreux essais (cf. [4]). En pratique, la fonction  $h(x, y)$  est petite, mais peut éprouver des variations rapides le long des lignes singulières. De même,  $S_1$  peut présenter des points où sa courbure est très grande. Les hypothèses ci-dessus sont alors localement en défaut. Mais cette circonstance n'exerce pas d'influence sensible sur le calcul de la marée globale.

**IV. Équations des marées littorales**

Le volume d'eau enfermé dans le prisme  $P$  défini ci-dessus, est soumis, d'après ce qui précède, à son poids vulgaire, aux pressions hydrostatiques latérales, admettant une résultante horizontale égale à :

$$-g \cdot \rho_1 (\zeta + h) \overrightarrow{\text{grad}} \zeta d\sigma$$

à la réaction du fond et aux pressions à la surface libre, alors que les quantités d'accélération relative admettent une résultante horizontale :

$$\rho_1 (h + \zeta) \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} d\sigma$$

Ecrivons le théorème des quantités de mouvement en projection sur  $G$  et l'équation de continuité; il vient, en désignant par  $\vec{\Omega}_n$  la composante de  $\vec{\Omega}$  suivant  $NM$  :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + 2\vec{\Omega}_n \wedge \vec{V} + R \frac{|\vec{V}|}{h + \zeta} \vec{V} + g \overrightarrow{\text{grad}} \zeta = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \text{div.} [(h + \zeta) \vec{V}] = 0$$

Ces deux équations fournissent trois relations entre les scalaires inconnus  $u, v, \zeta$ , dépendant des variables indépendantes  $x, y, t$ ; ce sont les équations des marées littorales, classiques à cela près que la loi adoptée pour le frottement est quadratique, avec prise en compte de la dénivellation  $\zeta$ .

Remarquons qu'on peut donc confondre  $M$  et  $N$  puisque les inconnues ne dépendent pas de  $z$ .

**V. Étude analytique des équations des marées littorales**

Il importe, pour justifier les méthodes de traitement numérique que nous allons mettre en œuvre, d'étudier les propriétés du système (1), qui est quasi linéaire en  $u, v, \zeta$ . Il est intuitivement évident que (1) est hyperbolique, puisque la marée est essentiellement un phénomène de propagation. Pour établir ce fait en toute rigueur, il faut s'assurer que (1) admet des multiplicités caractéristiques réelles. Un calcul élémentaire prouve que la multiplicité :

$$t = t(x, y) \quad u = u[x, y, t(x, y)] \\ v = v[x, y, t(x, y)] \quad \zeta = \zeta[x, y, t(x, y)]$$

est caractéristique si elle vérifie l'équation :

$$gh (\overrightarrow{\text{grad}} t)^2 + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} t - 1 = 0$$

qui admet deux solutions réelles en  $\overrightarrow{\text{grad}} t$ .

(\*) Beaucoup d'auteurs donnent un sens moins restrictif au terme de marée littorale.

Ainsi, le système (1) est bien hyperbolique. Le problème de Cauchy est aujourd'hui bien étudié pour les systèmes quasi linéaires hyperboliques à coefficients et à données frontières assez réguliers. Mais la théorie des marées littorales se ramène malheureusement à un problème mixte posé relativement à (1) et qui, à notre connaissance, n'a pas encore été étudié avec toute la rigueur désirable. D'ailleurs, cette étude semble *a priori* difficile, en raison de la non linéarité de (1) et de l'allure peu régulière de la donnée frontière  $S_1$  et de certains de ses coefficients. On notera à ce sujet que  $h(x, y)$  est simplement continu dans  $\Sigma$ ; les dérivées de  $h$  sont discontinues le long des éventuelles arêtes du fond; puis  $|\vec{V}|$  a une dérivée discontinue pour  $\vec{V} = 0$ .

Faute d'une théorie satisfaisante, nous nous sommes bornés à extrapoler à (1) les résultats qualitatifs obtenus relativement aux systèmes hyperboliques plus simples et à nous assurer qu'une solution de notre problème pourrait être obtenue par la méthode des caractéristiques. Il semble dès lors vraisemblable que le problème des marées, énoncé à l'alinéa suivant, soit bien posé au sens de Hadamard. Cela veut dire qu'il admet une solution unique, variant continûment avec les données frontières : on peut donc lisser « raisonnablement » celles-ci sans qu'il en résulte une altération sensible des résultats du calcul. En particulier, l'influence des irrégularités locales de  $h(x, y)$  et  $S_1$  peut être délimitée dans l'espace  $x, y, t$  au moyen des multiplicités caractéristiques.

Enfin, on verra ci-après que le problème des marées est celui des oscillations périodiques forcées d'un continu en tenant compte des forces dissipatives. Sur des exemples simples, on vérifie en s'appuyant sur les propriétés des systèmes hyperboliques que le régime oscillatoire établi est pratiquement indépendant des conditions initiales. En revanche, celles-ci influent beaucoup sur le temps d'établissement du régime périodique. Le choix des conditions initiales doit remplir la double condition de simplifier les algorithmes du calcul numérique tout en réduisant le temps de calcul sur la machine, c'est-à-dire le temps d'établissement du régime périodique.

## VI. Problème fondamental de la théorie des marées

Il est bien connu qu'on peut simuler l'action de la marée océanique sur les mers littorales le long de  $S_2$  par un batteur, animé d'un mouvement déterminé. Cela revient à dire que le long de  $S_2$  la composante  $\vec{V}_n$  de  $\vec{V}$ , normale à  $S_2$ , est une donnée à chaque instant. D'un autre côté, le long de la côte  $S_1$ ,  $\vec{V}_n = 0$ . Enfin, il est clair que pour définir le mouvement ultérieur, l'état initial du liquide doit être connu dans  $\mathcal{D}$  : le champ des vitesses et les dénivellations à l'instant  $t = 0$  sont donc des données. On est ainsi conduit à formuler comme il suit

le problème fondamental des marées littorales : trouver une solution de (1), définie dans le cylindre  $C$  de l'espace  $x, y, t$ , de base  $\Sigma$  et  $t \in [0, \infty]$ , telle que :

- $\vec{V}(M, 0)$  et  $\zeta(M, 0)$  soient données pour tout  $M \in \Sigma$ ;
- $\vec{V}_n(M, t)$  est une donnée pour tout  $t \in [0, \infty]$  et tout  $M \in S$ .

D'après cela, les données initiales définissent la solution dans la portion de  $C$  limitée par  $\Sigma$  et les multiplicités caractéristiques de (1) issues de  $S$ ; dans ce domaine, nous avons à résoudre un problème classique de Cauchy. Dans la portion restante de  $C$ , on est amené à résoudre des problèmes mixtes, analogues à ceux qu'on rencontre dans la théorie des oscillations forcées des cordes vibrantes.

D'après ce qu'on a vu au précédent alinéa, on peut choisir l'état initial arbitrairement. Pour la poursuite des calculs numériques, il est commode de partir de l'état de repos; cela revient à prendre :

$$\vec{V}(M, 0) = 0, \quad \zeta(M, 0) = 0$$

pour tout  $M \in \Sigma$ . Quant à  $\vec{V}_n(M, t)$ , pour  $M \in S_2$  et  $t \in [0, \infty]$ , c'est, dans le cas des marées littorales moyennes, une fonction périodique du temps, de période  $T$ , qu'on définit à partir des données nature et qu'on pourra, avec une précision suffisante, représenter, pour chaque  $M$ , par une sinusoïde. On

constate que la relation  $\vec{V}_n(M, t) = 0$  ne peut avoir lieu au même instant, en tout point de  $S_2$ , en particulier à l'instant initial. Il y a donc une discontinuité le long de  $S$  pour le champ de vitesses à l'instant  $t = 0$  entre les données initiales et les valeurs frontières. Mais cette discontinuité n'exerce guère d'influence sensible sur l'évolution ultérieure du calcul.

Nous avons, en définitive, à résoudre le problème de l'établissement des marées littorales à partir du repos. Le temps d'établissement sur le modèle mathématique peut être grand; le calcul à la machine deviendrait coûteux. C'est pourquoi, on a été conduit [3] à se poser le problème d'établissement sous une forme différente.

## VII. Problème des marées sous forme nouvelle

On a vu que les conditions initiales et la donnée des  $\vec{V}_n(M, t)$  sur  $S_2$  à tout instant, définissent sans ambiguïté la solution et suffisent en particulier à déterminer  $\zeta(x, y, t)$  dans  $C$ , donc aussi le long de  $S_2$ . On abrège beaucoup le temps d'établissement du régime sur modèle en se donnant aussi *a priori* la donnée surabondante  $\zeta(x, y, t)$  sur  $S_2$  à tout instant, qui se réduit encore, dans le cas des marées littorales, à une fonction sinusoïdale du temps pour tout  $M \in S_2$ .

Il est clair qu'on obtient ainsi un problème aux limites mal posé; c'est l'analogie de l'erreur qu'on

commettrait en se donnant *a priori* sur un cercle à la fois la valeur frontière et la dérivée normale de la fonction harmonique définie dans ce cercle. Mais si ces deux données sont connues *a priori* et compatibles entre elles, la solution du problème de Dirichlet s'obtient par une simple quadrature au moyen de la formule de Green.

La méthode employée offre donc l'avantage d'abrèger le calcul numérique et de fournir d'un coup un test de contrôle pour les hypothèses des marées littorales, pour la validité des méthodes de calcul et pour la cohérence des données *a priori*. Notons qu'il y a encore discontinuité pour  $\zeta$  entre les données initiales et les données frontières (à l'instant  $t = 0$  le long de  $S_2$ ). Tel est le problème que nous avons étudié numériquement. Nous n'avons pas eu recours à la méthode des caractéristiques : il nous a paru préférable d'utiliser un carroyage fixe du domaine C. Il nous reste à décrire sommairement la discrétisation de C et à donner des indications sur la stabilité et la convergence du procédé de calcul approché par différences finies.

### VIII. Discrétisation du domaine de calcul

D'après III, 3, c), on projette  $\Sigma$  sur le plan tangent à G, dans lequel on introduit les coordonnées polaires  $\rho, \theta$ ; les inconnues de (1) s'écrivent :

$$u = u(\rho, \theta, t), \quad v = v(\rho, \theta, t), \\ \zeta = \zeta(\rho, \theta, t)$$

rappelons que  $u$  et  $v$  sont respectivement les composantes radiale et tangentielle de  $V$ . La discrétisation du domaine  $\rho, \theta, t$  de définition des inconnues, se fait suivant le tableau ci-après :

$$\theta = j\varphi \quad j = 1, 2, \dots \varphi \text{ demi-pas angulaire} \\ \rho = \rho_0 e^{(i-1)\varphi} \quad i = 1, 2, \dots \\ t = k\tau \quad k = 1, 2, \dots \tau \text{ demi-pas de temps}$$

On obtient ainsi des réseaux de points de calculs constitués par des pseudo-carrés. Notre schéma de calculs par différences finies donne les valeurs suivantes des inconnues :

$$u(\rho_{2i+1}, \theta_{2j+1}, t_{2k}) \quad v(\rho_{2i}, \theta_{2j}, t_{2k}) \\ \zeta(\rho_{2i}, \theta_{2j+1}, t_{2k+1})$$

Cette disposition entrelacée des points de calcul accroît la stabilité de la méthode. Les grandeurs  $\varphi$  et  $\tau$  étant constantes, le demi-pas d'espace  $s = \rho\varphi$  varie dans le domaine.

### IX. Convergence, stabilité et relaxation

Faute d'avoir un théorème d'existence et d'unicité de la solution, la convergence de notre procédé, quand les pas d'espace et de temps tendent vers

zéro, ne s'établit qu'empiriquement, en constatant que la solution numérique permet d'approcher les données « nature ».

Si les erreurs de calcul faites à l'instant  $k\tau$  diminuent aux instants  $m\tau$ ,  $m > k$ , nous dirons que le schéma de calcul est stable. On montre sur des schémas simples que la stabilité est assurée si  $s/\tau$  est inférieur à une limite qui dépend du problème traité et de la discrétisation du domaine de calcul. Par exemple, si le frottement est négligeable, on démontre que dans le cas d'un problème bidimensionnel, on doit prendre [5] :

$$2 \left( \sqrt{gh} \frac{\tau}{s} \right)^2 \leq 1$$

Holsters [6] a montré, dans un cas particulier prenant en compte les forces de Coriolis et de frottement, que le critère de stabilité est trop restrictif dans les zones de faible profondeur si on utilise des expressions dites explicites pour ces forces. En extrapolant sa conclusion à notre cas, il semble avantageux d'utiliser les expressions dites implicites pour les facteurs intervenant dans le terme de frottement.

Nous avons vu que le demi-pas d'espace  $s$  dépend dans notre schéma du point de calcul : c'est pourquoi le demi-pas de temps critique  $\tau_{crit}$  est fonction de ce point. Pour certains points du réseau où le critère de stabilité :

$$\tau \leq \tau_{crit}$$

n'était pas vérifié, nous avons fait usage de la méthode de relaxation pour régulariser les résultats numériques.

### X. Formulation en différences finies

Si  $u', v', \zeta'$ , composantes de la vitesse  $\vec{V}$  à l'instant  $2k\tau$  et dénivellation à l'instant  $(2k-1)\tau$  sont les inconnues à calculer à partir des valeurs connues  $u, v, \zeta$ , composantes de  $\vec{V}$  à  $(2k-2)\tau$  et dénivellation à  $(2k-3)\tau$ , on utilise les équations aux différences finies suivantes :

$$\rho \frac{\zeta' - \zeta}{2\tau} + \frac{\Delta\rho(h + \zeta)u}{\Delta\rho} + \frac{\Delta(h + \zeta)v}{\Delta\theta} = 0$$

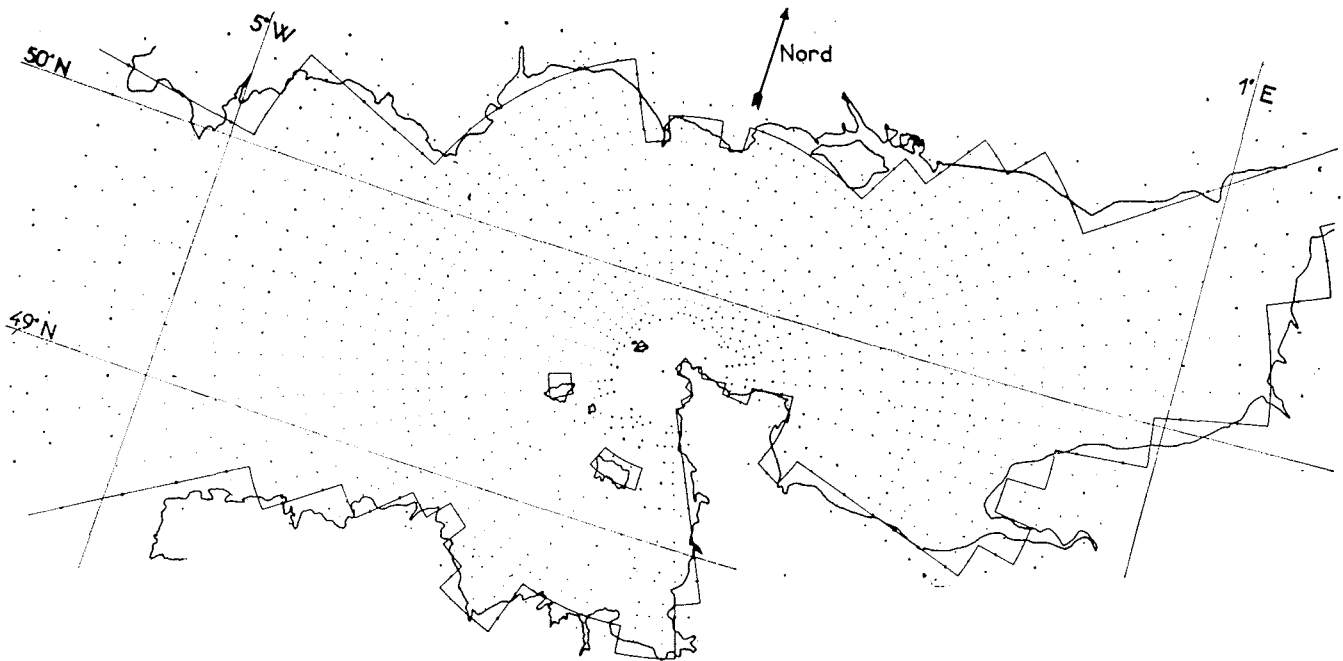
pour déterminer  $\zeta'$ , et :

$$\frac{u' - u}{2\tau} - fv + R \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{h + \zeta'} u' + g \frac{\Delta\zeta'}{\Delta\rho} = 0$$

$$\frac{v' - v}{2\tau} + fu + R \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{h + \zeta'} v' + \frac{g}{\rho} \frac{\Delta\zeta'}{\Delta\theta} = 0$$

pour déterminer  $u'$  et  $v'$ .

On voit, sur les formules, que l'on a choisi une expression explicite de la force de Coriolis et une expression semi-implicite de la force de frottement.



1/ Implantation des réseaux de calcul / Computation network positions.

**XI. Conditions aux limites et conditions initiales**

Pour écrire les conditions aux limites, on distingue les limites côtières et les limites ouvertes. Les lignes côtières fixes sont schématisées par des arcs de lignes coordonnées  $\rho = Cte$  ou  $\theta = Cte$  le long desquels la composante normale de la vitesse  $u(\rho, \theta, t)$  ou  $v(\rho, \theta, t)$  est nulle. Pour les limites ouvertes, isolant la mer littorale, nous avons pris des arcs de cercle  $\rho = Cte$ , le long desquels :

$$u(\rho = Cte, \theta, t) \quad \zeta(\rho = Cte, \theta, t)$$

sont des données.

**XII. Résultats du calcul numérique des marées moyennes dans la Manche**

Pour étudier les phénomènes de diffusion géophysique dans la Manche, il nous a fallu accroître la précision des modèles mathématiques de marées littorales existants. Nous cherchions à obtenir une représentation correcte, non seulement des dénivellations, mais encore et surtout du champ des courants d'une marée moyenne. Nous sommes partis des travaux de W. Hansen (chez qui on trouvera la bibliographie relative aux modèles mathématiques des marées littorales) et de F. Gohin (qui a étudié le cas particulier de la Manche).

La discrétisation du domaine s'est faite suivant la méthode précédemment décrite, à l'aide d'un système de coordonnées cylindriques centré sur le point à partir duquel nous nous proposons d'étudier ultérieurement la diffusion. Le domaine d'es-

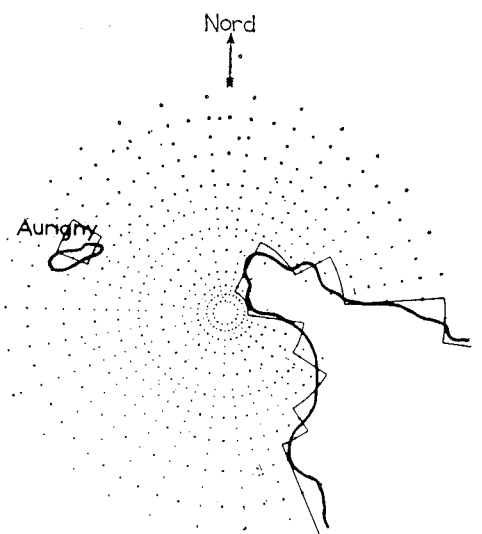
pace a été divisé en trois zones concentriques pour lesquelles le demi-pas angulaire d'espace  $\phi$  vaut respectivement 3, 6 et 12°. Les trois réseaux obtenus pour  $\zeta$ ,  $u$  et  $v$  ont ainsi respectivement 831, 721 et 711 points et sont montrés sur les figures 1 et 2. Ces figures montrent aussi la schématisation du tracé côtier par des arcs de lignes coordonnées. Les limites ouvertes de la Manche, rebord du plateau continental à l'ouest et Pas-de-Calais à l'est, ont été représentées par deux arcs de cercle le long desquels on s'est donné à chaque instant de calcul, les valeurs de  $\zeta$  et  $u$  correspondant à une marée moyenne semi-diurne :

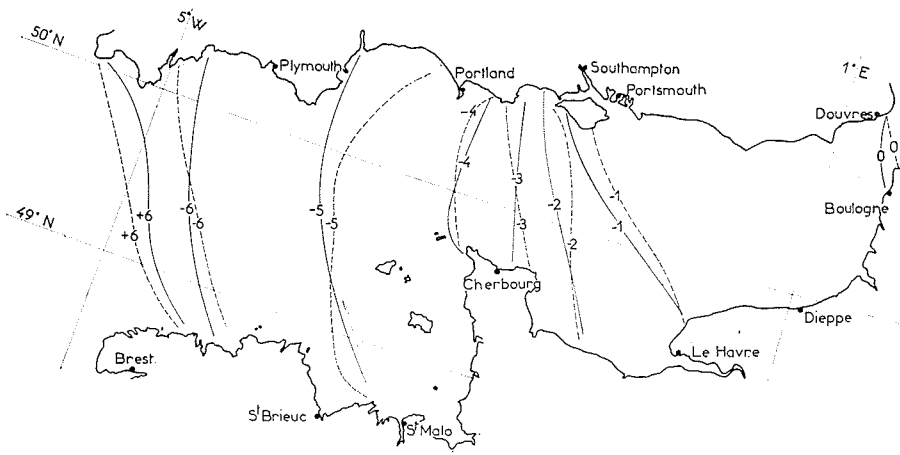
$$\zeta_i = (\zeta_{max})_i \cdot \cos \frac{2\pi}{T} (t - \beta_i),$$

$$u_j = (u_{max})_j \cdot \cos \frac{2\pi}{T} (t - \alpha_j) \quad T = 44\ 700 \text{ s}$$

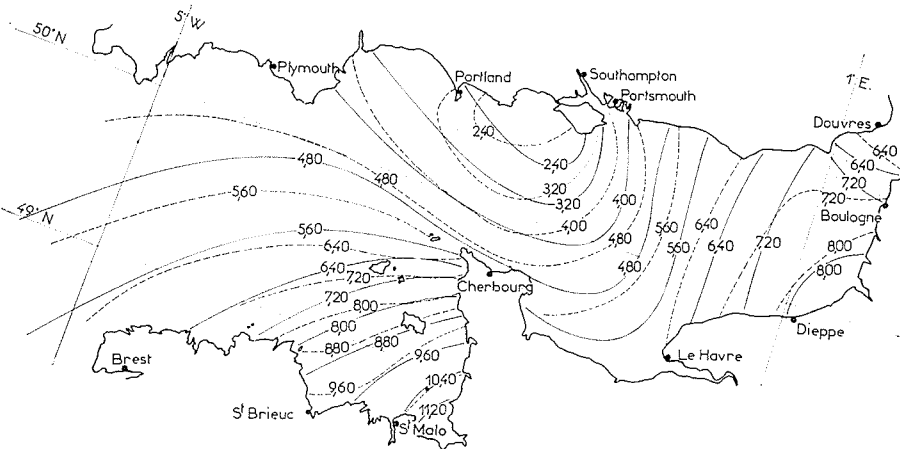
2/

Centre des réseaux de calcul.  
Centre of computation network.

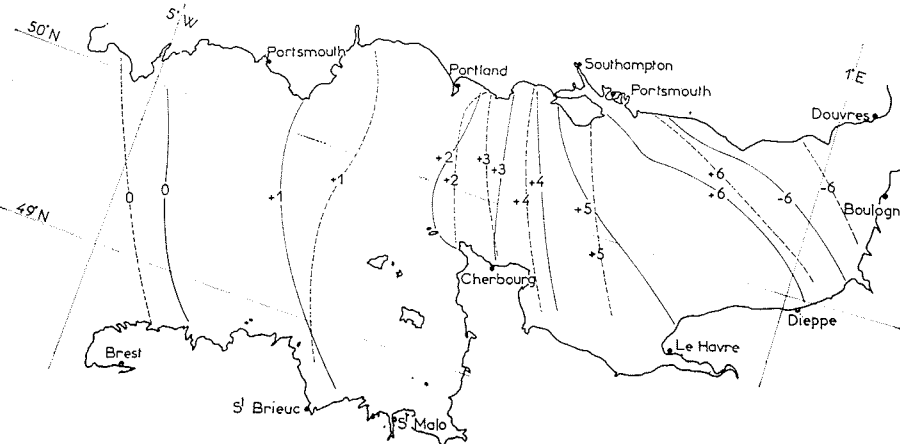




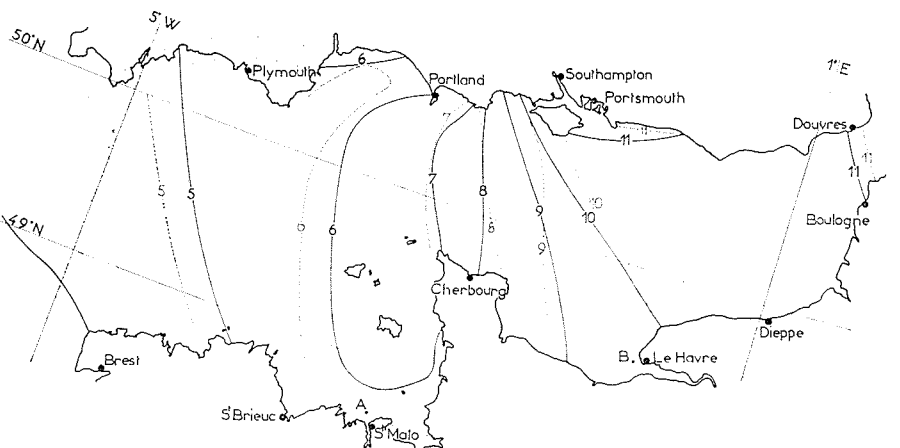
**3/** Heure de la pleine mer. Origine des temps : Pleine mer de Douvres. Coefficient : 95.  
 — Données nature (Amirauté anglaise).  
 ---- Données modèle mathématique.  
 High tide times. Zero time: High tide at Dover. Coefficient: 95.  
 — Real life data (Brit. Admiralty).  
 ---- Mathematical model data.



**4/** Amplitude en mètres de la marée. Coefficient : 95.  
 — Données nature (Amirauté anglaise).  
 ---- Données modèle mathématique.  
 Tide amplitude in metres. Coefficient: 95.  
 — Real life data (Brit. Admiralty).  
 ---- Mathematical model data.



**5/** Heure de la basse mer. Origine des temps : Pleine mer de Douvres. Coefficient : 95.  
 — Données nature (Amirauté anglaise).  
 ---- Données modèle mathématique.  
 Low tide times. Zero time: High tide at Dover. Coefficient: 95.  
 — Real life data (Brit. Admiralty).  
 ---- Mathematical model data.

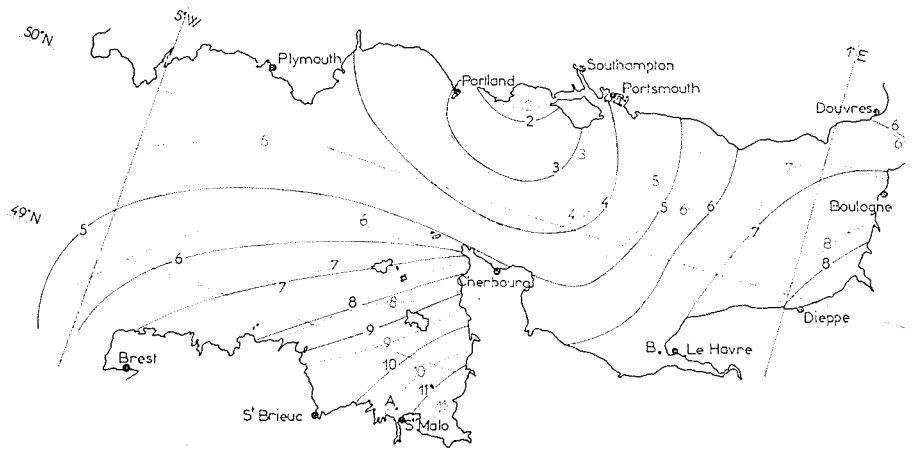


**6/** Heure de la pleine mer. Origine des temps : Passage de la lune au méridien de Greenwich. Coefficient : 95.  
 — Données nature (G. Sager).  
 ---- Données modèle mathématique.  
 High tide times. Zero time: Moon passing Greenwich meridian. Coefficient: 95.  
 — Real life data (G. Sager).  
 ---- Mathematical model data.

**7/ Amplitude en mètres de la marée. Coefficient : 95.**

— Données nature (G. Sager).  
 ---- Données modèle mathématique.

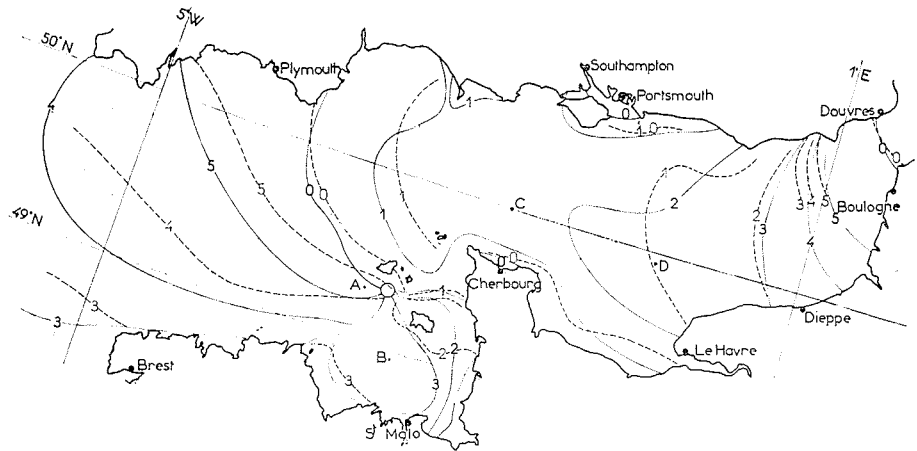
*Tide amplitude in metres. Coefficient: 95.*  
 — Real life data (G. Sager).  
 ---- Mathematical model data.



**8/ Heure du courant de marée maximal. Origine des temps : Passage de la lune au méridien de Greenwich. Coefficient : 95.**

— Données nature (G. Sager).  
 ---- Données modèle mathématique.

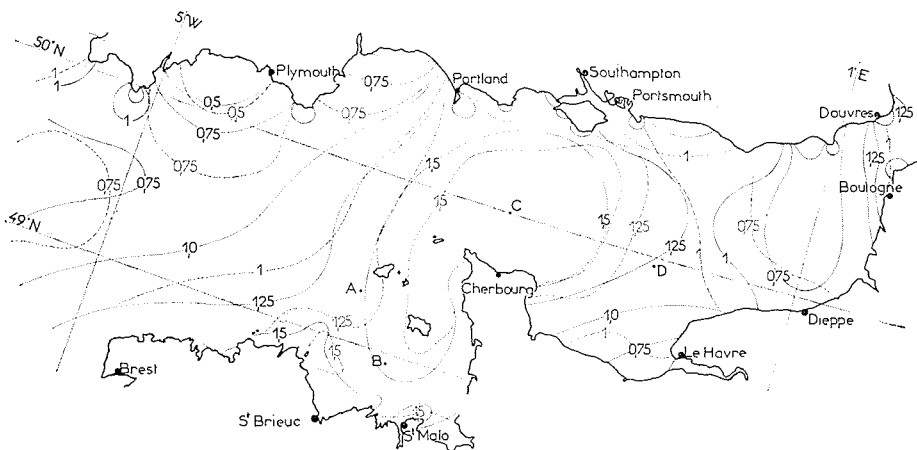
*Time of peak tide flow. Zero time: Moon passing Greenwich meridian. Coefficient: 95.*  
 — Real life data (G. Sager).  
 ---- Mathematical model data.



**9/ Valeur en m/s du courant de marée maximal. Coefficient : 95.**

— Données nature (G. Sager).  
 ---- Données modèle mathématique.

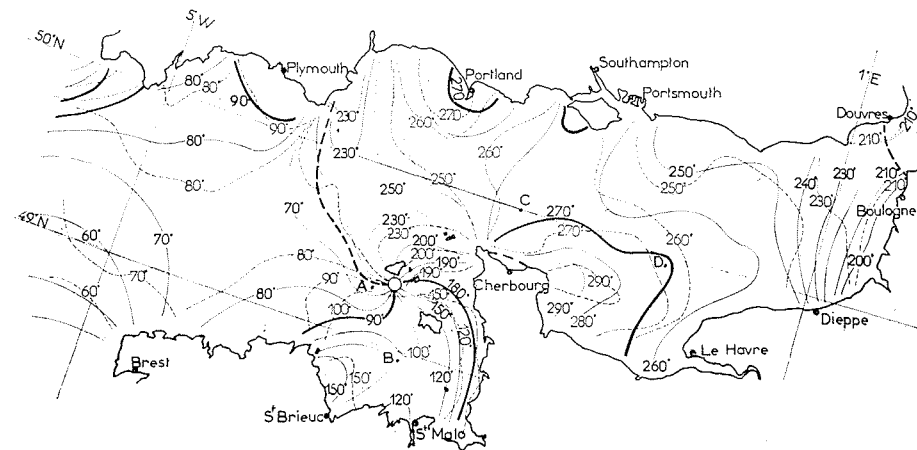
*Peak tide flow velocity in m/sec. Coefficient: 95.*  
 — Real life data (G. Sager).  
 ---- Mathematical model data.

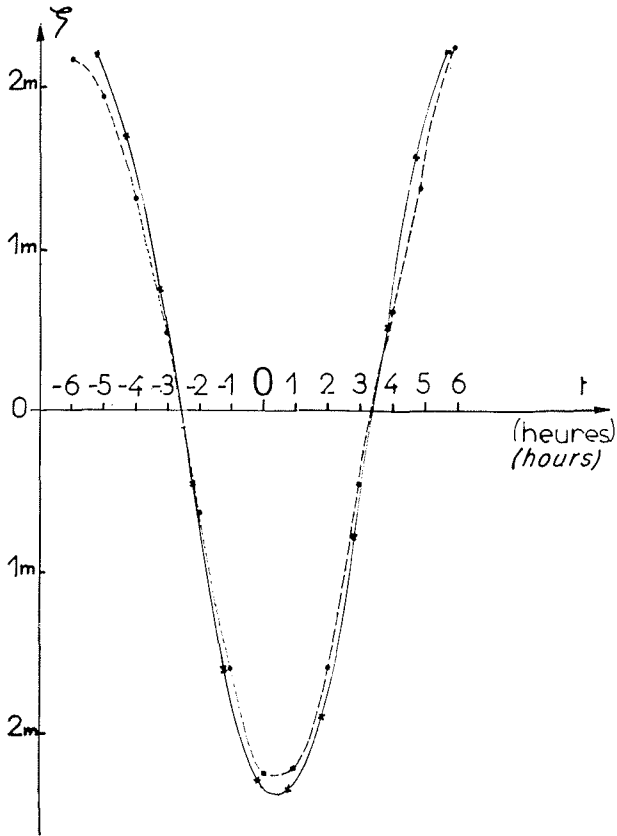


**10/ Direction du courant de marée maximal, comptée en degrés du nord vers l'est. Coefficient : 95.**

— Données nature (G. Sager).  
 ---- Données modèle mathématique.

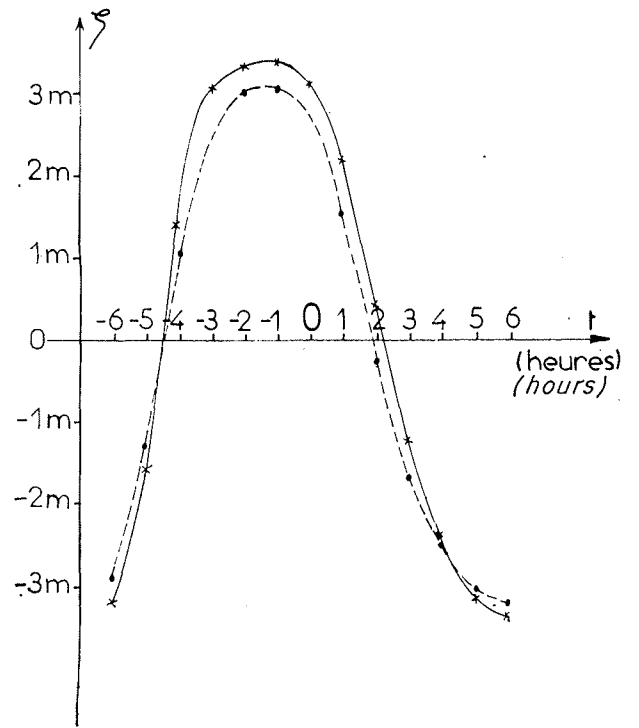
*Direction of peak tide flow, in degree from N. to E. Coefficient: 95.*  
 — Real life data (G. Sager).  
 ---- Mathematical model data.





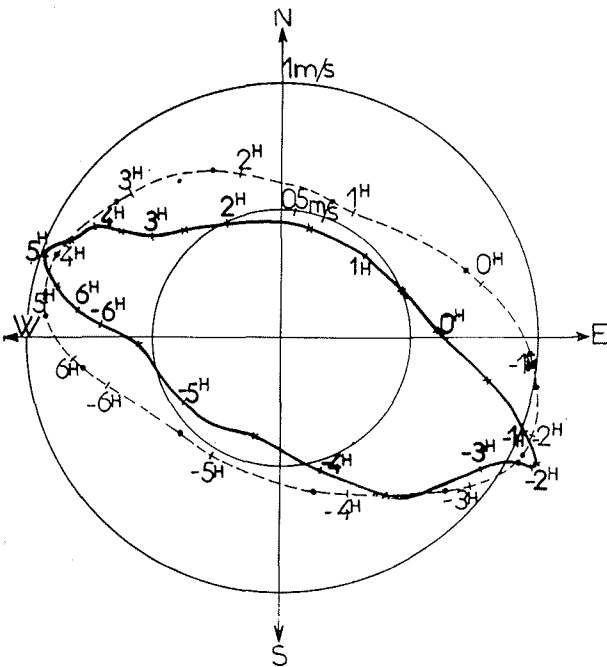
11/ Plymouth. Dénivellations. Coefficient : 95. Origine des temps : Passage de la lune au méridien de Greenwich. Plymouth. Tide range. Coefficient: 95. Zero time: Moon passing Greenwich meridian.

— Données nature / Real life data.  
 ---- Données modèle mathématique / Mathematical model data.



12/ Le Havre. Dénivellations. Coefficient: 95. Origine des temps : Passage de la lune au méridien de Greenwich. Le Havre. Tide range. Coefficient: 95. Zero time: Moon passing Greenwich meridian.

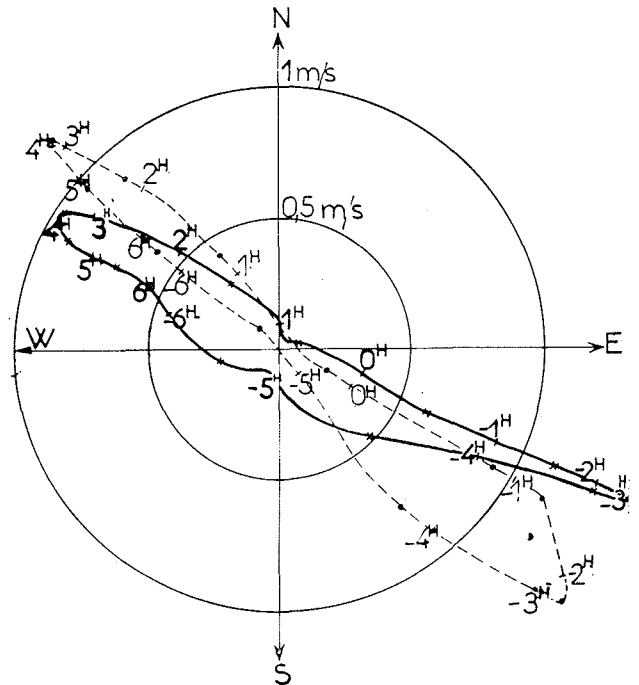
— Données nature / Real life data.  
 ---- Données modèle mathématique / Mathematical model data.



15/ Point A. Courants. Coefficients : 95. Origine des temps : Pleine mer de Saint-Malo.

Point A. Tide flow velocity. Coefficient: 95. Zero time: High tide at St.-Malo.

— Données nature / Real life data.  
 ---- Données modèle mathématique / Mathematical model data.

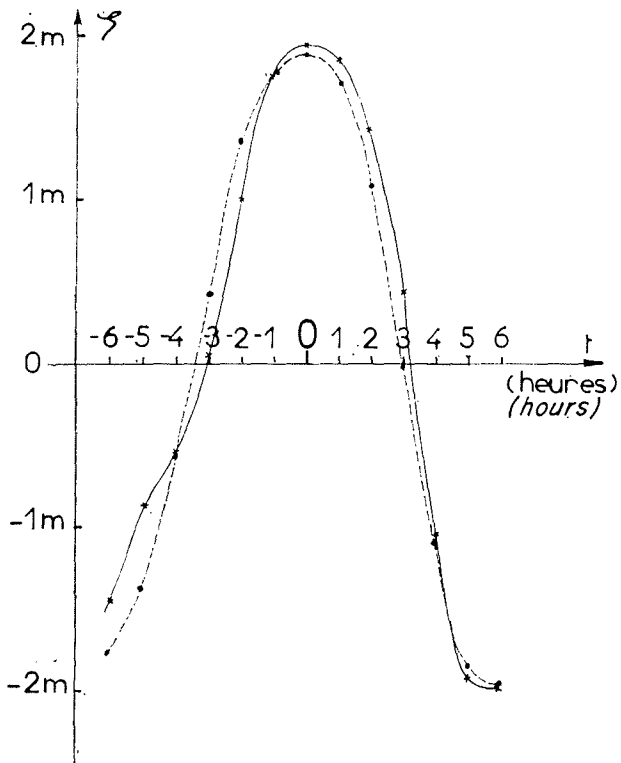


16/ Point B. Courants. Coefficient : 95. Origine des temps : Pleine mer de Saint-Malo.

Point B. Tide flow velocity. Coefficient: 95. Zero time: High tide at St.-Malo.

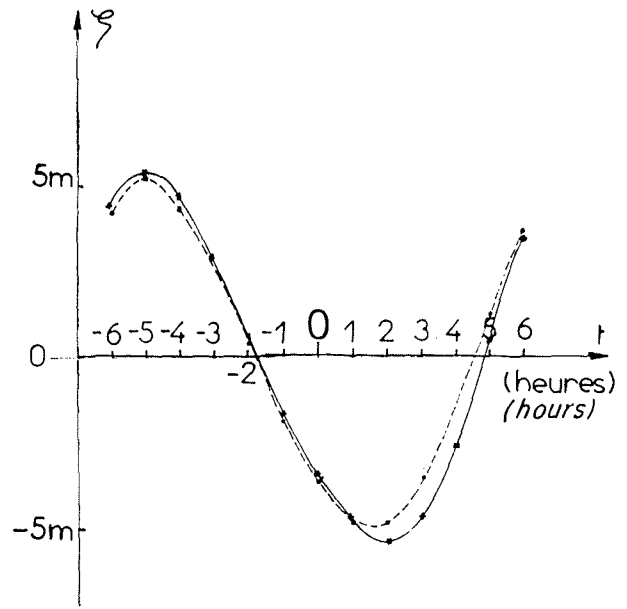
— Données nature / Real life data.  
 ---- Données modèle mathématique / Mathematical model data.





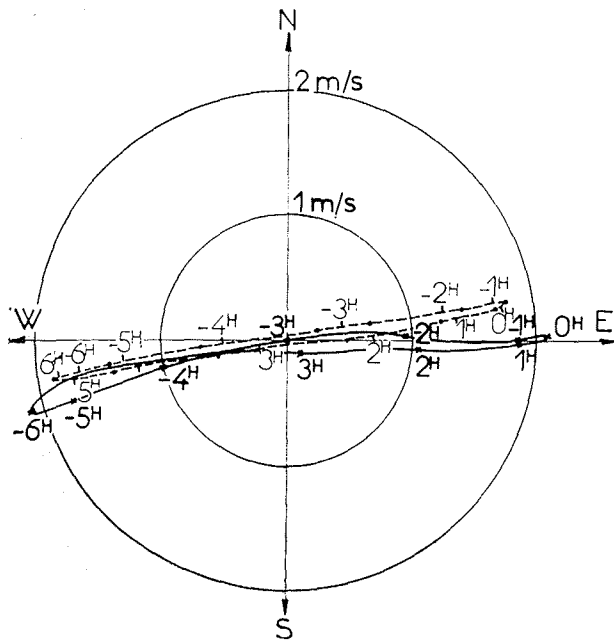
**13/** Portsmouth. Dénivellations. Coefficient : 95. Origine des temps : Passage de la lune au méridien de Greenwich. Portsmouth. Tide range. Coefficient: 95. Zero time: Moon passing Greenwich meridian.

— Données nature / Real life data.  
 ---- Données modèle mathématique / Mathematical model data.



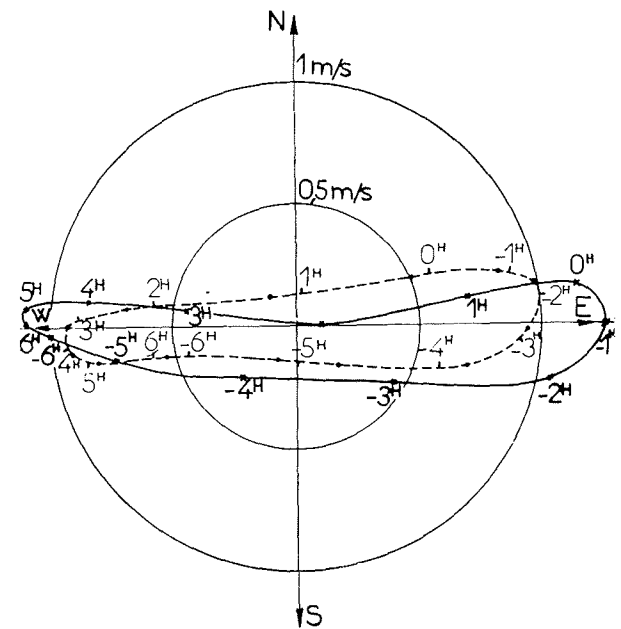
**14/** Saint-Malo. Dénivellations. Coefficient : 95. Origine des temps : Passage de la lune au méridien de Greenwich. St.-Malo. Tide range. Coefficient: 95. Zero time: Moon passing Greenwich Meridian.

— Données nature / Real life data.  
 ---- Données modèle mathématique / Mathematical model data.



**17/** Point C. Courants. Coefficient : 95. Origine des temps : Pleine mer de Cherbourg. Point C. Tide flow velocity. Coefficient: 95. Zero time: High tide at Cherbourg.

— Données nature / Real life data.  
 ---- Données modèle mathématique / Mathematical model data.



**18/** Point D. Courants. Coefficient : 95. Origine des temps : Pleine mer du Havre. Point D. Tide flow velocity. Coefficient: 95. Zero time: High tide at Le Havre.

— Données nature / Real life data.  
 ---- Données modèle mathématique / Mathematical model data.

La valeur du demi-pas de temps choisi  $\tau = 44,7$  s est telle que chaque point du domaine  $\zeta, u, v$  est calculé 500 fois dans une période de marée. La profondeur moyenne variant de 100 à 15 m et le demi-pas d'espace  $s$  variant de  $2,5 \cdot 10^2$  m à  $1,4 \cdot 10^4$  m, le demi-pas de temps critique  $\tau_{crit.}$  varie de 30 s à 560 s. Aussi, à l'intérieur d'une zone circulaire passant par l'île d'Aurigny, le critère de stabilité n'est-il pas assuré et a-t-on appliqué des formules de relaxation pour les dénivellations à chaque instant.

Partant d'un état initial de repos, nous avons constaté qu'après une phase transitoire de l'ordre de deux périodes, les résultats numériques avaient la même périodicité que les conditions aux limites imposées. Ils ne présentaient plus, entre des instants séparés par une période complète, que des écarts de l'ordre de 5 à 10 cm pour  $\zeta$  et de l'ordre de 5 cm/s pour  $u$  et  $v$ .

Fait sur l'ordinateur IBM 7044 de l'Université de Grenoble, le calcul d'une période complète de marée avec cette méthode nécessite un temps de 1 heure. L'écriture des résultats sur bandes magnétiques, demande 1 h. Enfin, le dépouillement d'ensemble d'une période, c'est-à-dire la recherche des extrema des dénivellations et de courants, se fait en 30 mn.

Les figures nos 3 à 10 montrent les résultats de ce dépouillement pour une marée moyenne de coefficient 95. La notion de marée « moyenne » variant légèrement d'un Service hydrographique à un autre, nous avons comparé les données de dénivellations du modèle mathématique d'une part aux valeurs publiées par l'Amirauté anglaise (fig. 3 et 5), d'autre part à celles de l'Atlas allemand de Sager [7] (fig. 6 et 7). Cet auteur donne aussi des courbes d'ensemble relatives aux courants de marée qui ont permis la comparaison faite sur les figures n° 8 à 10. Nous donnons enfin des exemples de courbes des dénivellations et de roses de courants respectivement dans les séries de figures 11 à 14 et 15 à 18.

On constate que le modèle mathématique rend bien compte des traits caractéristiques de la marée en Manche : comportement de l'onde de marée dans le golfe de Saint-Malo, « tenue du plein » au Havre, amphidromie de courants dans la région des îles Anglo-Normandes.

### XIII. Conclusion

Nous voudrions marquer l'intérêt de l'étude analytique préalable du système (1) qui nous a guidés, en dépit de son peu de rigueur, dans le maniement des méthodes approchées. Il semble, de plus, que notre calcul des marées littorales dans la Manche ait permis de retrouver les données nature avec une plus grande précision que celle atteinte antérieurement. On peut ainsi aborder sur notre modèle l'étude de la diffusion marine à grande échelle.

On peut aussi désormais envisager d'entreprendre avec des chances de succès le calcul numérique d'un cycle de marées dans la Manche et dépasser ainsi le stade actuel d'une marée moyenne. De telles recherches, combinées avec celles entreprises sur le modèle hydraulique tournant, pourraient aboutir à une connaissance plus profonde du mécanisme des cycles des marées.

\*\*

Cet article recouvre en partie le travail d'une thèse de Doctorat d'Etat ès Sciences physiques à soutenir devant la Faculté des Sciences de Grenoble par M. Hyacinthe.

### Bibliographie

- [1] W. HANSEN. — Hydrodynamical methods applied to oceanographic problems. N.A.T.O. Symposium (1961), *Inst. für Meeresk., Univ. Hamburg.*
- [2] F. GOHIN. — Détermination des dénivellations et des courants de marée. VII<sup>e</sup> Congrès du Coastal Engineering (juin 1960).
- [3] J. L. HYACINTHE. — *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome 263 (1966), pp. 181-184, 271-274, 292-295.
- [4] R. BONNEFILLE. — Note sur le coefficient de frottement de la marée dans les mers littorales. *Bulletin du C.R.E.C.*, n° 4 (juin 1963).
- [5] R. COURANT, K. FRIEDRICHS, G. LEWY. — Über die partiellen Differenzen Gleichungen der mathematische Physik. *Math. Ann.*, 100 (1928), 32.
- [6] H. HOLSTERS. — Remarques sur la stabilité dans les calculs de marée. N.A.T.O. Symposium (1961), *Ham-bourg.*
- [7] SAGER. — Atlas der Element der Tiden Hub und der Gezeitenströme, Rostock (1963).

### Discussion

Président : M. BANAL

M. le Président remercie M. KRAVTCHEKO et M. HYACINTHE de leurs exposés.

Il souligne l'intérêt qu'il y avait, et que M. HYACINTHE a signalé, à ne pas dissocier cette communication des deux autres de cette séance consacrée à l'étude des phénomènes de diffusion géophysique faite sur modèle tournant, bien qu'elle se rapproche plus, par certains côtés, des modèles mathématiques d'écoulements maritimes à surface libre, mis à l'ordre du jour de la séance de l'après-midi du 9 juin.

« D'autre part, ajoute M. le Président, M. KRAVTCHEKO a commencé son exposé par un rappel magistral, au sens pro-

pre du terme, des hypothèses générales de calcul de tous ces modèles mathématiques, de sorte que son exposé se situait bien au début de notre session. »

M. BIESEL rapproche le modèle mathématique décrit par M. HYACINTHE et celui conçu et utilisé il y a sept ou huit ans par son collègue M. GOHIN, précisément en vue de la réalisation de la plaque tournante dont M. CHABERT d'HERÈS va parler tout à l'heure.

Les hypothèses de base sont les mêmes dans les deux cas et les méthodes numériques utilisées sont très voisines;

cependant on peut noter les deux différences importantes suivantes :

- M. GOHIN utilisait un réseau de coordonnées plus général (réseau isotherme) qui inclut comme cas particulier le système cylindrique;
- Les conditions aux limites utilisées par M. GOHIN permettaient d'étudier aussi bien la marée non perturbée que le « remous » provoqué par le fonctionnement d'une usine marémotrice; au contraire, le système de condition aux limites utilisé par MM. KRAVTCHENKO et HYACINTHE ne permet que l'étude de l'état naturel, puisqu'il nécessite l'introduction aux limites de données nature.

M. GOHIN aurait certainement d'autres remarques à faire sur la comparaison des méthodes et des résultats de ces deux modèles.

M. GOHIN apporte les précisions ci-après :

A. — Les modèles mathématiques réalisés à SOGREAH pour l'étude des marées naturelles et perturbées diffèrent de celui décrit par les auteurs de la communication sur un certain nombre de points :

1. Le réseau de calcul (méthode de tracé dite « des petits carreaux ») de SOGREAH permet, à égalité de nombre de points, de suivre plus fidèlement le trait de cote. De plus les deux composantes du vecteur vitesse sont calculées en un même point.

On peut, à volonté, introduire le long des limites soit des dénivellations, soit des courants, soit des débits (courants et débits pouvant être fonctions du temps directement ou de la dénivellation instantanée locale).

2. La force de frottement est également quadratique, mais utilise un coefficient dépendant de l'inverse de la puissance 4/3 de la profondeur instantanée. L'expérience de SOGREAH est que cette représentation est préférable.

3. La latitude du lieu est prise en compte, ce qui peut être nécessaire lorsque la mer littorale est orientée selon un méridien.

4. Le terme d'inertie spatiale peut, à volonté, être introduit (il n'est pas négligeable par petits fonds).

5. Les dénivellations obtenues à partir de l'équation de continuité sont très légèrement corrigées (par une méthode très semblable à celle indiquée par M. HYACINTHE). Cette question a été étudiée assez en détail par SOGREAH.

B. — Les calculs effectués en 1960 par SOGREAH pour le compte de la S.E.U.M. ont permis d'obtenir la marée en Manche d'une façon très correcte (aussi bien les dénivellations que les courants). Les difficultés soulignées par M. HYACINTHE en bassin de Seine ont été aussi rencontrées sur le modèle de SOGREAH.

Ce modèle a permis de définir le modèle physique tournant (plaque Coriolis) et de déterminer l'ordre de grandeur du remous créé par l'usine marémotrice de Chausey.

C. — SOGREAH a réalisé depuis lors deux autres modèles de marée. L'un d'eux est actuellement en cours de réglage. Il comporte environ 600 points de calcul pour un pas de temps de 120 s. La durée de calcul sur ordinateur 360/50 est de deux secondes par pas.

L'intervention de M. GOHIN est illustrée de projections.

M. HYACINTHE répond à MM. BIESEL et GOHIN :

A - 2. — En ce qui concerne le terme de frottement, M. HYACINTHE pense qu'il est préférable d'utiliser la loi de Chézy qui physiquement est la plus adaptée au problème, comme l'a montré M. BONNEFILLE, et qui fait intervenir un coefficient adimensionnel, relativement bien déterminé *in situ* (mesures de W. Hansen en particulier). La valeur numérique a été prise constante, en première approximation et égale à  $3 \cdot 10^{-3}$ ; elle est, en fait, variable suivant les endroits et, notamment, plus grande dans le golfe de Saint-Malo qu'au centre de la Manche. Dans le voisinage des côtes, il faudrait apporter des perfectionnements par un réglage, au sens propre du terme, utilisant des valeurs variables de coefficient de frottement.

A - 4. — L'introduction du terme d'inertie spatiale ne présente aucune difficulté du point de vue numérique mais, physiquement, elle n'a beaucoup d'importance qu'au voisinage des côtes à forte courbure. Elle allonge les calculs, sans améliorer les résultats dans 90 % du domaine.

A - 1. — Le modèle de SOGREAH qui avait servi lors de la construction de la plaque, avait un pas d'espace et un pas de temps relativement grands (100 points de calcul de chaque sorte et pas de temps de 10 mn). La réduction de ces pas à des valeurs dix fois moindres a posé des problèmes numériques nouveaux.

D'autre part, au point de vue calcul, la différence est importante, entre le schéma à deux réseaux (l'un pour les composantes U et V de la vitesse, l'autre pour les dénivellations  $\zeta$ ) et celui où l'on utilise trois réseaux séparés pour U, V, et  $\zeta$ . Le développement en série de Taylor montre que le fait d'imbriquer les réseaux de U et de V permet, pour les termes différentiels faisant intervenir la vitesse, d'avoir une approximation meilleure au sens de l'analyse numérique.

Le modèle faisant l'objet du mémoire discuté est plus récent et donc plus puissant que celui de SOGREAH mentionné par MM. BIESEL et GOHIN, puisqu'il a 800 points de calcul de chaque sorte, et un pas de temps de l'ordre de 90 s au lieu de 10 mn. Antérieurement, il n'existait pas dans la littérature de données d'ensemble sur les courants. Le modèle construit par SOGREAH donnait seulement quelques roses de courants, non datées en heure. Or, si une image sommaire des courants permet en général une représentation assez bonne des dénivellations dans un modèle hydraulique ou dans un modèle mathématique destinés à étudier les modifications de dénivellations dues au fonctionnement d'une usine marémotrice, une connaissance relativement bonne des courants est nécessaire dans les problèmes de diffusion que le Laboratoire de Mécanique des Fluides de Grenoble voulait étudier sur modèle mathématique.

En réponse à MM. BIESEL et GOHIN, M. KRAVTCHENKO rappelle que les équations des marées littorales sont classiques. Il l'a dit explicitement au cours de son exposé. Il n'y a de divergence marquante qu'à propos des termes de frottement.

M. KRAVTCHENKO ajoute qu'il rejoint tout à fait M. BIESEL en ce sens qu'il a indiqué la différence du travail de SOGREAH et de celui qui a été fait, au point de vue numérique, par M. HYACINTHE. Il est certain que le Laboratoire de Mécanique des Fluides de l'Université de Grenoble n'a voulu étudier que les marées « à l'état sauvage », tandis que M. GOHIN a étudié un problème d'interaction entre les conditions limites créées par le fonctionnement de l'usine, d'une part, et les conditions limites au loin d'autre part. Mais les méthodes de M. HYACINTHE pourraient certainement être adaptées à ce problème différent si besoin était.

M. THIRRIOT pose trois questions :

1. Y a-t-il une analogie entre la méthode proposée par l'auteur et la méthode des directions alternées?

2. Peut-on utiliser une méthode comparable à la méthode des caractéristiques?

3. Dans ce problème d'oscillations forcées, peut-on avoir une idée sur la comparaison des termes d'inertie et de frottement?

M. HYACINTHE répond à M. THIRRIOT qu'il n'a pas utilisé suffisamment la méthode des directions alternées pour savoir si elle présente une analogie avec la méthode faisant l'objet du mémoire discuté; cependant, en utilisant dans un domaine de temps et d'espace, une discrétisation par réseaux entrelacés pour l'approximation d'un système à dérivées partielles, on approche l'opérateur aux différences partielles à un ordre plus grand. Le modèle numérique constitué par un schéma aux différences finies ne peut représenter exactement et ce système d'équations, et le système des conditions limites et initiales.

M. HYACINTHE ajoute que M. KRAVTCHENKO a bien fait ressortir la notion de « problème bien posé » et de « problème mal posé » au point de vue mathématique. Or, cette notion existe aussi au point de vue numérique et elle soulève de nombreuses questions.

En ce qui concerne la méthode des caractéristiques, M. KRAVTCHENKO répond à M. THIRRIOT qu'il n'a pas utilisé cette méthode simplement parce que, bien qu'elle soit un moyen puissant d'investigation des propriétés qualitatives des équations hyperboliques aux dérivées partielles, la méthode des différences finies semble plus efficace et moins coûteuse.

**Abstract**

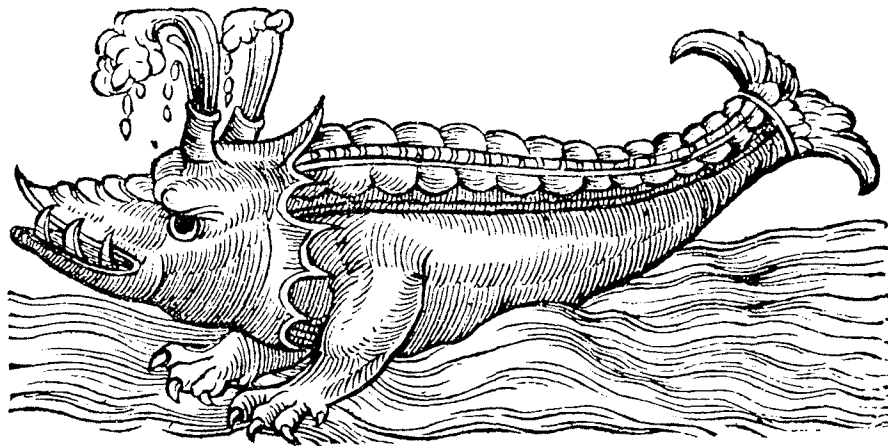
**A mathematical model of coastal tides. Digital computation  
on the example of the English Channel**

**by J.-L. Hyacinthe \* and J. Kravtchenko \*\***

---

The authors review a few standard ideas on coastal tides for which they give a more restrictive definition than the generally accepted one. They set out the basic equations in standard form to within the friction terme, which is quadratic with respect to velocity.

They obtain a quasi-linear system of partial differential equations of the hyperbolic type with non-analytical coefficients. With the theory of tides, this system becomes a composite problem which is still awaiting rigorous discussion. By extrapolation of data from simpler cases to this problem some of the properties of tides can be interpreted qualitatively and the digital methods applied for their calculation to some extent justified. The authors then describe their digital computation scheme for mean Channel tides, which is an application of the finite-difference method relying on a predetermined 'discretization' of the variation range of the unknowns. The mean tide given by the mathematical model reflects the real-life tide to within a satisfactory degree of approximation, also such specific properties as amphidrom of currents, high-tide persistence at Le Havre and the tide configuration in Saint-Malo Bay.



*Bois gravé du XVI<sup>e</sup> siècle.*

---

\* Maître-assistant à la Faculté des Sciences, Laboratoire de Mécanique des fluides de l'Université de Grenoble.  
\*\* Professeur à la Faculté des Sciences, Laboratoire de Mécanique des Fluides de l'Université de Grenoble.