QUELQUES APPLICATIONS DE MODÈLES MATHÉMATIQUES A L'ÉTUDE DES ÉCOULEMENTS NON PERMANENTS DANS UN RÉSEAU RAMIFIÉ DE RIVIÈRES OU DE CANAUX

Communication
présentée au Comité technique
de la Société Hydrotechnique de France
le 9 juin 1967

PAR
A. DAUBERT, P. MARVAUD,
L. FABRE ET Mlle A. MARGNAC *

Notations

l : largeur au miroir;
 S : section mouillée;
 Z : cote de la surface libre;
 Q : débit de la rivière;
 Q_r : débit latéral de ruissellement;
 U : vitesse moyenne;
 α : coefficient de répartition de vitesse;
 J_e : pente de la ligne d'énergie.

Introduction

Les « modèles mathématiques » sont devenus des outils courants pour les hydrauliciens. La présente étude voudrait simplement préciser la façon de les mettre en œuvre, leur portée ainsi que leur limitation, quand on les applique aux écoulements non permanents en rivières et canaux.

Après un bref rappel des équations et de leur analyse par la théorie des caractéristiques, fort utile pour la compréhension des choses, un exposé succinct des principales méthodes de calcul sera présenté.

Enfin, pour que l'on puisse se rendre bien compte des possibilités de ces modèles, des exemples d'applications seront exposés. Ils ont été choisis de

façon à donner une idée de l'éventail des phénomènes hydrauliques représentables et du choix de la méthode à adopter.

Énoncé du problème

Le réseau hydraulique est divisé en branches. Sur chaque branche, l'abscisse curviligne sera notée x et t représentera le temps.

1. Equations indéfinies.

Sur chacune des branches, le mouvement de l'eau est régi par les équations de Saint-Venant.

Equation de continuité :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = -Q_r$$

Equation des quantités de mouvement :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \alpha \frac{\partial (QU)}{\partial x} + gS \frac{\partial z}{\partial x} = -gSJ_e - kQU$$

J_e représente la pente de la ligne d'énergie dont l'expression communément admise est celle de Strickler.

α est un coefficient de répartition des vitesses dont il faudra tenir compte dans le cas d'un écoulement dans un lit majeur.

La valeur du coefficient $k \leq 1$ dépend de la composante longitudinale de la vitesse du débit de fuite linéaire Q_r .

* Electricité de France, Direction des Etudes et Recherches :
6, quai Watier, 78 - Chatou, France.

Lorsque $\alpha = 1$, par différence, on peut également obtenir une seconde forme de l'équation dynamique qui est en général plus connue :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial Z}{\partial x} = -gJ_e + \frac{1-k}{S} Q_r U$$

Le système qu'on obtient est alors du type « conservatif ».

Ces équations sont bien connues, ainsi que leur analyse, qui montre qu'elles constituent un système hyperbolique dont les pentes c des caractéristiques valent :

$$c = U \pm \sqrt{gS/l}$$

En chaque point intérieur au domaine d'intégration, il passe deux caractéristiques.

2. Conditions aux limites.

Aux limites du domaine, le nombre de conditions à imposer sera égal au nombre de caractéristiques pénétrant dans le domaine dans le sens des t croissants. Dans un écoulement fluvial, une seule condition sera nécessaire à chaque extrémité. Un écoulement torrentiel imposera deux conditions à l'amont. Dans certains problèmes, la nature de l'écoulement peut changer à une limite au cours du temps. Nous verrons un exemple où la section aval initialement commandée par un niveau deviendra critique.

3. Conditions initiales.

En principe, il faut se donner la vitesse et la cote sur tout le bief à l'instant initial. Si on part

d'un état permanent, ces données peuvent se calculer. Si le système est déjà en cours d'évolution au début du calcul, à moins de disposer de mesures instantanées et réparties sur tout le bief (ce qui ne se produit jamais), il faut imaginer ces données initiales qui sont forcément fausses. Mais vu la nature hyperbolique du problème et la présence de frottements, cela n'a que relativement peu d'importance, car ces données n'auront pratiquement plus d'influence au bout d'un certain temps.

4. Nature mathématique du problème.

Le problème ainsi posé est un problème mixte aux conditions initiales et aux limites.

Trois idées maîtresses le dominent : son caractère hyperbolique qui le rattache à la théorie des caractéristiques (phénomène de propagation) — son caractère non linéaire auquel se rattachent des propriétés très importantes de ces écoulements (distinction entre fluvial et torrentiel, ressaut, etc.) — son caractère conservatif qui le rattache à un vaste domaine d'études effectuées sur les méthodes numériques d'intégration, dont nous allons pouvoir profiter.

Différentes méthodes d'intégration

Les méthodes explicites et implicites.

Dans le plan (x, t) le domaine d'intégration Ω est en général une demi-bande parallèle à l'axe des temps et de largeur L (longueur du bief étudié). La solution est recherchée aux nœuds d'un réseau qui recouvre la demi-bande Ω . Les dérivées sont évaluées à partir des différences finies des valeurs en des nœuds voisins.

Nous appellerons respectivement Δx et Δt , les pas du réseau suivant x et suivant t .

Il existe essentiellement deux types de méthodes numériques pour intégrer le problème.

Connaissant la solution jusqu'à l'étage $n\Delta t$, il s'agit de la déterminer à l'étage suivant. Selon que l'évaluation des dérivées en x fera ou non intervenir des valeurs de l'étage $(n+1)\Delta t$ (encore inconnu) la méthode sera dite implicite ou explicite. Cela tient à ce que l'écriture des équations avec des différences finies permet, dans ce dernier cas, une résolution explicite locale.

Les méthodes explicites sont donc en général d'un maniement très simple, mais elles sont toujours soumises à des conditions de stabilité qui restreignent le pas Δt dès que Δx est donné. Cette condition est connue sous les noms de Courant, Friedrich et Lévy. Les méthodes implicites, par contre, peuvent être inconditionnellement stables, pourvu que les dérivées en x soient suffisamment « implicites », c'est-à-dire pondérées entre l'étage $n\Delta t$ et l'étage $(n+1)\Delta t$, mais avec un poids plus élevé sur ce dernier. Mais la résolution numérique à chaque étage en temps est plus lourde. Elle nécessite, en principe, la résolution simultanée d'un système d'équations linéaires comportant toutes les inconnues de l'étage. Il existe des algorithmes de calcul qui, après deux balayages du bief, fournissent la solution (méthode du double balayage ou algorithme de Richtmeyer).

1/ Schéma hydraulique du Rhin et de ses aménagements.
Hydraulic diagram of the Rhine and its power schemes.

Les calculs des coefficients étant également plus compliqués que dans les méthodes explicites, on peut grossièrement dire que la résolution d'un étage en temps est trois fois plus longue que dans les méthodes explicites. On gagnera donc du temps de calcul dans la mesure où pour un même pas Δx , on pourra adopter un pas Δt supérieur au triple du pas imposé par la condition de stabilité des méthodes explicites.

Il existe de nombreuses méthodes explicites et implicites.

Nous ne citerons que celles que nous avons effectivement testées sur ce problème.

MÉTHODES EXPLICITES	SCHÉMA
Lax.	$(n+1) \Delta t$ $n \Delta t$
En quinconce.	$(n+1) \Delta t$ $n \Delta t$ $(n-1) \Delta t$
Lax-Wendroff (système conservatif).	$(n+1) \Delta t$ $n \Delta t$
Caractéristiques locales.	$(n+1) \Delta t$ $n \Delta t$

+ points calculés; x points d'appui pour le calcul; — caractéristiques locales.	

On peut facilement interpréter ces schémas par la théorie des caractéristiques en utilisant les caractéristiques dessinées ci-dessus.

Le schéma de Lax-Wendroff est une combinaison de celui de Lax et du schéma en quinconce. La mise en œuvre nécessite des équations dites « conservatives ».

MÉTHODES IMPLICITES	SCHÉMA
De la case.....	$(n+1) \Delta t$ $n \Delta t$

+ points calculés; — caractéristiques locales.	

Ce schéma s'interprète par les caractéristiques en considérant qu'un point à l'intérieur de la case pourra être calculé de deux façons différentes en partant des deux côtés opposés de la case. En écrivant ensuite la compatibilité entre ces deux déterminations, on retrouve les équations du schéma.

Comment doit-on décider du choix de la méthode à utiliser?

Le premier point à fixer est le pas Δx , il sera choisi de façon à décrire fidèlement la géométrie du lit et à définir avec assez de précision les lignes d'eau.

Ce pas Δx étant choisi, on considérera le pas Δt autorisé par les conditions de stabilité des méthodes explicites. Il y a là une échelle des temps imposée par le calcul numérique. Le phénomène physique peut avoir une autre échelle des temps, c'est-à-dire des variations non significatives pendant cet intervalle de temps Δt . Pour une crue qui dure 8 jours, la variation pendant une minute est tout à fait insignifiante; il faut alors utiliser une méthode implicite. Dans le cas contraire, on emploiera de préférence une méthode explicite.

Sans en dire davantage sur ces techniques numériques, nous allons passer à des exemples d'applications où nous verrons comment elles ont été mises en œuvre. (Quelques précisions sur ces méthodes numériques sont données en annexe).

Exemples d'application

1. Etude de propagation des crues.

Modèle du Rhin de Bâle (PK 170) à Karlsruhe (PK 362).

Le schéma du réseau hydraulique est donné sur la figure 1.

L'étude a été conduite à l'aide d'un modèle mathématique étalonné pour reproduire les phénomènes observés au cours de crues connues.

Le champ d'inondation a été représenté de façon à tenir compte de la surélévation des berges par rapport au lit majeur. La rugosité a été prise variable avec l'abscisse et avec la cote.

On impose l'hydrogramme à l'amont ainsi que ceux des divers affluents et une relation hauteur-débit à l'aval.

Dans les aménagements, la cote de retenue sur les différents barrages a été conservée égale à la cote normale pendant toute la durée des crues, les débits dérivés et restitués étant conservés constants.

L'étalonnage a été effectué, dans le cas du Rhin partiellement aménagé (Kembs et Ottmarsheim seuls en service), par passage des crues de juin-juillet 1953 et janvier 1955. L'influence des affluents, faible pour la crue de 1953, est prépondérante pour la crue de 1955.

L'ajustement du calcul aux observations a été effectué par action sur les coefficients de rugosité de manière à obtenir une bonne concordance des relations hauteur-débit aux différentes échelles ainsi que par l'adaptation du champ d'inondation mal connu.

Les résultats obtenus sont donnés par les figures 2 et 3 à l'échelle de Strasbourg (PK 294,903) et par les figures 4 et 5 à l'échelle de Maxau (PK 362, 318) respectivement pour les crues de 1953 et 1955.

Modèle du Rhône à l'amont de Lyon.

Le schéma du réseau est représenté sur la figure 6 : on distingue :

— une branche AB; en B, un barrage impose à son

2/ et 3/ Rhin naturel. Echelle de Strasbourg (P.K. 294,903).
Natural Rhine. Strasbourg gauge (K.P. 294.903).

4/ et 5/ Rhin naturel. Echelle de Maxau (P.K. 362,318).
Natural Rhine. Maxau gauge (K.P. 362.318).

amont immédiat une cote constante pendant toute la période où, par le jeu des vannes, on peut maintenir cette cote; hors de cette période, les vannes du barrage sont entièrement levées et la cote amont évolue en fonction de la loi de perte de charge à la traversée du barrage;

- en amont du barrage, un canal BGE dérive un débit constant qui est restitué en aval du déversoir E;
- en aval du barrage, sur la branche BCDE, on distingue en C et D deux brèches dans la digue qui peuvent être assimilées à des déversoirs dont le débit suit une loi $Q(z)$. A l'extrémité aval E de la branche, est implanté un déversoir imposant lui aussi une loi $Q(z)$.

Le débit passant par les brèches C et D alimente la branche CHE; il est restitué immédiatement à l'aval du déversoir E.

F est l'extrémité aval du réseau étudié.

Tout le long des branches ABCDE, la crue peut alimenter un vaste champ d'inondation dans lequel les vitesses peuvent être considérées comme nulles.

Les coefficients de rugosité dans les branches

ABCDEF ont été déterminés à partir des relevés de ligne d'eau effectués au cours de crues à débit connu et suffisamment lentes pour que l'hypothèse d'un écoulement permanent soit valable (crues telles qu'aucun déversement ne se produise en C et D). Le débit global (en A ou en F) étant connu ainsi que la loi de déversement sur le déversoir E et la valeur du débit constant prélevé en B, le calcul des coefficients de rugosité dans les différentes branches se fait sans difficulté par approximations successives à partir des méthodes classiques de calcul de lignes de remous.

Les lois $Q(z)$ sont connues en F et au déversoir E. En C et D, les lois de déversement $Q(z)$ ont été déterminées à partir des relevés de cotes effectués dans les différentes branches au maximum d'une crue dont le débit était suffisamment étalé dans le temps pour justifier, en première approximation, l'hypothèse d'un écoulement permanent.

On a établi aux points C et D une courbe $Q = B(z - z_0)^{3/2}$ passant par les points représentatifs ($z_0 = z$ minimal, $Q = 0$), (z maximal, Q maximal) et représentant ainsi une approximation de la loi $Q(z)$ cherchée.

6/ Schéma hydraulique du Rhône en amont de Lyon.
Hydraulic diagram of the Rhone above Lyons.

7/ et 8/ Courbes des niveaux et des débits.
Stage and Discharge curves.

Il a été possible d'autre part de schématiser la branche CHE, très mal définie naturellement, par un canal rectangulaire dont les caractéristiques géométriques déterminées par approximations successives permettaient de retrouver les cotes de l'eau relevées dans la région de cette branche au paroxysme de la crue, c'est-à-dire pour les débits Q_{max} évacués par les brèches C et D dans la branche CHE.

Le modèle mathématique étant ainsi bâti dans une première schématisation, il est ensuite ajusté à une crue déterminée pour achever son étalonnage. C'est ainsi qu'en particulier, doivent être déterminées les sections d'écoulement lorsqu'il y a débordement.

Sur la figure 8, on a représenté la loi $Q(t)$ imposée au point A et les courbes $Q(t)$ calculées en divers points du réseau.

La figure 7 donne les mêmes courbes pour les cotes z .

Nous pouvons noter l'atténuation du maximum de la crue et l'influence des zones de débordement, notamment par comparaison de l'amont et de l'aval de la branche CH où a lieu un fort débordement.

2. Etudes d'aménagements hydro-électriques.

Eclusées. Intumescences dans un réseau ramifié.

Le modèle mathématique représentait le Rhin et ses aménagements dans le bief Marckolsheim-Rhinau suivant le schéma de la figure 9.

Il s'agissait d'étudier les intumescences produites dans ce réseau hydraulique ramifié pour un fonctionnement en éclusées des usines.

Le Rhin étant bien connu dans cette zone, l'étalement en a été simplifié. Par ailleurs, pour le phénomène étudié, la rugosité a un rôle minime.

Malgré l'évolution du phénomène relativement plus rapide que dans une crue, la méthode implicite a été utilisée pour gagner du temps de calcul.

Dans ce cas, les lois de débit étaient imposées aux limites.

A titre d'exemple, les figures 13, 12, 11 et 10 montrent l'évolution de la cote à l'usine et au barrage de Rhinau ainsi qu'à l'usine et à la restitution de Marckolsheim et les figures 14, 15, 16 et 17, celle des débits à l'usine et à la restitution de Marckolsheim ainsi qu'à la prise de Rhinau.

Intumescences à front raide.

Pour des fermetures plus rapides, sur des vitesses initiales importantes, il se forme des intumescences beaucoup plus raides et les phénomènes évoluent beaucoup plus vite. Pour bien les décrire, il est nécessaire de prendre un pas Δt plus petit qui vérifie alors les conditions de stabilité des méthodes explicites. Ces dernières sont alors préférables. En toute rigueur, on se trouve en présence de phénomènes nouveaux qui risquent de remettre en cause le calcul lui-même et non la méthode de résolution. Les intumescences ne répondent pas aux hypothèses des écoulements graduellement variés. A travers le front, la pression n'est plus hydrostatique et l'accélération verticale n'est plus négligeable. Mais de part et d'autre du front, l'écoulement reprend son allure graduellement variée et les équations s'appliquent de nouveau (aux oscillations des ondes de Favre près, sur lesquelles nous reviendrons); il faudrait donc interrompre le calcul sur toute la zone du front, étudier séparément cette zone et la raccorder au reste du calcul.

On peut se passer de l'étude fine de la zone du front si on sait relier les valeurs des inconnues (vitesses ou débit et cote) de part et d'autre de la zone. Or ceci est classique en hydraulique : en axes liés au front, les équations de conservation en masse et quantité de mouvement fournissent ces relations. Ce sont celles du ressaut mobile.

La longueur de la zone frontale, à travers laquelle les variables subissent une variation finie, est elle-même finie. Mais si on la néglige, le problème se trouve grandement simplifié et susceptible d'être formulé mathématiquement d'une façon cohérente avec les seules hypothèses des écoulements graduellement variés presque partout. En effet, ces hypothèses conduisent aux équations de Saint-Venant que nous avons rappelées et qui sont quasi linéaires par rapport aux dérivées et de type hyperbolique. Elles admettent des solutions faibles qui peuvent développer des discontinuités que nous adapterons aux intumescences, en leur imposant de vérifier les relations à travers ces dernières. Ceci est tout à fait l'équivalent des ondes de choc pour

l'écoulement des fluides compressibles dans un tuyau.

Nous ferons ici une petite remarque. L'équation dynamique, pour les solutions lisses, peut exprimer aussi bien un théorème d'énergie que de quantité de mouvement. A travers la discontinuité, cette équivalence ne subsiste plus et nous avons choisi de maintenir la conservation des quantités de mouvement, ce qui impose une non-conservation de l'énergie et la perte de charge bien connue à travers le ressaut.

Rappelons aussi que, dans la théorie des caractéristiques, le développement des discontinuités est lié à la non-linéarité du problème qui rend les pentes des caractéristiques fonction des variables inconnues. Il arrive alors que des caractéristiques d'une même famille puissent se couper, définissant en ce point deux solutions possibles avec la caractéristique de l'autre famille. La théorie du choc consiste précisément à mettre en place une coupure à travers laquelle on saute de la solution qui se raccorde à gauche à celle qui se raccorde à droite.

Sur le plan numérique, il n'y a pas de difficultés insurmontables à propager un tel choc. Cette méthode est appelée « ajustement du choc ».

Nous l'avons utilisée pour des problèmes d'onde de submersion ou de propagation de houle sur une plage, mais nous n'en parlerons pas ici, ces applications débordant un peu notre sujet.

Il suffit de mentionner ici que les intumescences (ou le mascaret) constituent des chocs faibles et qu'il n'est pas nécessaire pour les calculer de faire appel à un ajustement du choc. En général, les méthodes numériques qui sont stables peuvent être appliquées sans précaution aucune, même en présence d'un choc faible. Leur stabilité tient en général à leur capacité de lisser un peu les accidents : les discontinuités seront alors également légèrement lissées. Ce lissage sera tout à fait acceptable en précision dans la mesure où le choc sera faible. Il a été imaginé des méthodes mathématiques pour absorber ces chocs. Citons, par exemple, la méthode de la pseudo-viscosité qui consiste à ajouter un terme de perte d'énergie qui ne devient appréciable qu'à travers le choc. Une telle méthode est tout à fait inutile pour les intumescences. Il est bon d'en rappeler le caractère artificiel. En pratique, elle introduit des oscillations secondaires qui n'ont absolument rien à voir avec celles qui existent parfois effectivement (ondes de Favre). Les méthodes explicites stables absorbent, en général, également bien les chocs faibles. L'étude de leur consistance montre en effet qu'en général, la stabilité s'obtient par une approximation des opérateurs différentiels qui peuvent s'interpréter en faisant apparaître des opérateurs d'ordre plus élevé, mais affecté de coefficients très petits tendant vers zéro avec le pas de calcul. Ce sont ces opérateurs d'ordre plus élevé qui lissent la solution en agissant comme des agents de diffusion.

La méthode qui paraît la plus satisfaisante pour les intumescences est celle des caractéristiques locales.

La méthode de Lax-Wendroff développe des oscillations parasites sur le front, mais semble permettre des pas d'intégration légèrement plus grands (elle est un peu plus précise).

La méthode implicite est inutilisable en particu-

lier si l'écoulement dans les axes fixes passe du type torrentiel au type fluvial.

Asservissement niveau-puissance.

Nous citerons l'exemple d'un aménagement où l'on voulait asservir le débit turbiné au niveau de la retenue amont alimentant la chaîne constituée par un canal, une galerie en charge munie de deux cheminées d'équilibre et de la conduite forcée (fig. 18).

Les équations de Saint-Venant ne représentent que l'écoulement dans le canal.

A l'amont, la donnée est constituée par le débit qui entre dans la retenue. Une inconnue supplémentaire est constituée par la cote de la retenue : une équation peut être écrite à l'amont faisant le bilan du volume de la retenue en tenant compte du débit pénétrant dans le canal.

A l'aval du canal, la chaîne galerie-cheminées d'équilibre-conduite et turbine est représentée par un système différentiel liant les débits et les cotes dans les cheminées d'équilibre et à l'aval du canal.

Le problème est fermé par la chaîne d'asservissement du débit aux cotes de l'eau dans le bassin et dans la dernière cheminée d'équilibre.

Les conditions aux limites du canal étaient donc constituées par un système différentiel comportant les autres éléments de la chaîne hydraulique et liant l'amont à l'aval du canal.

Le problème a été traité sans difficultés particulières par des méthodes explicites. En effet, la présence de la chaîne d'asservissement rebouclant les conditions de l'aval à celles de l'amont rend malaisée la résolution des équations implicites.

3. Ecoulements liés à la marée.

Il y a ici un caractère périodique qui ne sera pas exploité systématiquement, pour conserver aux effets non linéaires toute leur importance.

Le mascaret.

La manifestation la plus spectaculaire de ces non-linéarités est probablement la formation du mascaret. Du point de vue théorique ou numérique, il sera à peine utile d'en parler ici, ce qui a été dit plus haut à propos des intumescences à front raide s'appliquant de nouveau intégralement.

Vu sous cet angle, le mascaret n'est donc rien d'autre qu'une onde de choc, mais faible et il pourra pratiquement être traité en utilisant une méthode explicite.

Les figures 19, 20 et 21 montrent ce phénomène dans l'estuaire de la Seine.

Ecoulement dans des bras morts.

Le problème s'est posé à propos du refroidissement d'une centrale thermique qui doit utiliser l'eau de la Loire et la rejeter dans un bras peu profond. La particularité de cet écoulement est qu'à la basse mer, les deux extrémités du bras se trouvent découverts par les eaux de la Loire et que l'écoulement se fait en chute libre. Il a fallu y prévoir des conditions critiques d'écoulement quand le niveau dans la Loire baissait trop. Un tel problème a été résolu très simplement en utilisant des méthodes explicites.

La figure 22 montre l'évolution du niveau à une des extrémités du bras mort où l'on constate bien l'effet de contrôle dû à la section critique.

9/ Rhinau.

10/ Evolution de la cote à l'usine de Marckolsheim.
Stage at Marckolsheim power house.11/ Evolution de la cote à la restitution de Marckolsheim.
Stage at Marckolsheim tailwater canal.12/ Evolution de la cote au droit du barrage de Rhinau.
Stage at Rhinau barrage.13/ Evolution de la cote à l'usine de Rhinau.
Stage at Rhinau power house.

18/ Chavarroche.

14/ Loi de débit à l'usine de Marckolsheim.
Discharge at Marckolsheim power house.15/ Evolution du débit à la restitution de Marckolsheim.
Discharge at Marckolsheim tailwater canal.16/ Evolution du débit à la prise de Rhinau.
Discharge at Rhinau intake.17/ Loi de débit à l'usine de Rhinau.
Discharge at Rhinau power house.

19/ Tancarville.

Portes à flot.

Un autre exemple sera cité pour illustrer les possibilités du calcul numérique. Il s'agit d'un écoulement dans un petit cours d'eau dont le débouché à la mer est fermé par une porte à flot. Cette porte se ferme au flot et s'ouvre au jusant afin d'éviter la pénétration des eaux de mer.

Le modèle avait donc comme condition à l'aval une loi $Z(t)$ (celle de la marée) dès que le niveau de la marée était inférieur à celui derrière la porte, et une condition de débit nul dès que le débit avait une tendance à s'inverser.

La figure 23 montre l'évolution de la cote et du débit au droit de la porte à flot.

Ce modèle a également été traité en méthode explicite.

En remarque générale, les modèles à marées sont donc pratiquement toujours traités en méthodes explicites. Les lignes d'eau ici sont en effet, sous la dépendance essentielle des effets d'inertie, contrairement aux problèmes de crue où ce sont toujours les frottements qui contrôlent l'écoulement. Or les méthodes explicites sont précisément basées sur les dérivées par rapport au temps, c'est-à-dire sur les effets d'inertie. Les méthodes implicites, par contre, permettent de bien réaliser l'équilibre entre les forces de pesanteur et de frottement.

Conclusion

Nous avons essayé de montrer sur un assez large éventail, les possibilités du calcul numérique dans le domaine des écoulements en rivières et canaux.

Les exemples cités ne constituent certes pas une liste exhaustive. Ils ont été choisis parmi les problèmes qui nous ont été posés pour montrer la diversité des conditions qui peuvent être imposées aux équations de Saint-Venant.

Bien que les méthodes soient connues et programmées, la mise au point d'un modèle mathématique hydraulique n'est jamais quelque chose d'automatique. Nous ne saurions dire ce qui est le plus

important du côté numérique ou du côté hydraulique du problème. L'ordinateur est une machine rigoureuse qui ne tolère pas la moindre faute comme pourrait le faire un modèle réduit physique. Une cote mal lissée n'empêchera pas l'eau de couler sur un modèle réduit; cette même négligence attirera au programmeur de secs commentaires de la machine et un refus d'aller plus loin.

D'autre part, l'ingénieur qui a la charge d'un modèle mathématique devra être très attentif à l'hydraulique de son problème: si une section de contrôle, par exemple, doit se présenter quelque part, il faudra qu'il l'ait prévue: qu'il ne compte pas sur la machine pour la mettre en place!

Ce double aspect plaide un peu en faveur de ces modèles qui méritent bien qu'on leur fasse confiance, puisqu'ils nécessitent de la part de ceux qui les bâtissent un gros effort pour comprendre la physique des phénomènes, l'hydraulique du problème.

Annexes

1. Bref rappel de la théorie des caractéristiques.

Dans tout ce qui suit, nous raisonnerons sur un canal rectangulaire de pente i . Le cas général d'une rivière de section quelconque n'en diffère que formellement; dans leur essence même, les propriétés que nous mettrons en lumière demeurent et l'écriture sera tout de même bien simplifiée.

Les équations de Saint-Venant s'écrivent:

$$\vec{W}_t + A_x \vec{W}_x = \vec{B}$$

où:

$$\vec{W} = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} \quad A_x = \left(\frac{v}{g} \frac{y}{v} \right) \quad \vec{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ g(i - J) \end{bmatrix}$$

La recherche des caractéristiques revient à celle d'un vecteur $\vec{l}$ et d'une constante c tels que:

$$\vec{l}(\vec{W}_t + A_x \vec{W}_x) = \vec{l}(\partial_t + c \partial_x) \vec{W}$$

22/ Cordemais.

23/ Marée coefficient 106.
Tide coefficient 106.

En termes clairs, on utilise la propriété des caractéristiques d'être des chemins le long desquels l'opérateur différentiel portant sur $\vec{W}$ est intérieur : on cherche donc une combinaison linéaire des équations qui ne fasse apparaître que des différentiations le long d'une seule direction $(dx/dt) = c$.

On trouve finalement :

$$\vec{\mu} = \vec{l} \quad \text{et} \quad c\vec{l} = \vec{l}A_x$$

$\vec{l}$ est un vecteur propre à gauche de la matrice A_x et c représente la valeur propre correspondante :

$$c = c_\epsilon = v + \epsilon \sqrt{gy}$$

$$\vec{l} = \vec{l}_\epsilon = \left(\epsilon \sqrt{\frac{g}{y}}, 1 \right)$$

$$\epsilon = \pm 1$$

La relation sur la caractéristique est donc :

$$\vec{l}(\vec{W}_t + A_x \vec{W}_x) = \vec{l}(\partial_t + c \partial_x) \vec{W} = \vec{l}B$$

ou :

$$(c_\epsilon) \quad (\partial_t + c_\epsilon \partial_x) v + \epsilon \sqrt{\frac{g}{y}} (\partial_t + c_\epsilon \partial_x) y = g(i - J)$$

Cette relation exprime que sur le chemin :

$$(c'_\epsilon) \quad dx = c_\epsilon dt \quad \text{on a :} \quad dv + \epsilon \sqrt{\frac{g}{y}} dy = g(i - J) dt$$

2. Schéma explicite des caractéristiques locales.

Ce schéma exploite la relation (c'_ϵ) en confondant différentielles et différences finies :

$$v_c - v_{a\epsilon} + \epsilon \sqrt{g/y_0} (y_c - y_{a\epsilon}) = g(i - J_0) \Delta t$$

En faisant $\epsilon = \pm 1$, on peut localement résoudre le système obtenu en v_c et y_c .

Calculons la valeur d'une fonction f (qui sera v ou y) en α_ϵ par interpolation linéaire entre celles prises en A, 0 et B.

$$f(\alpha_\epsilon) = f(0) - \frac{|c_\epsilon| \Delta t}{\Delta x} (1 - T^{-\sigma_\epsilon \Delta x}) f(0)$$

où $\sigma_\epsilon = \text{signe de } c_\epsilon$.

où nous avons noté par $T^{\Delta x}$ l'opérateur de translation :

$$T^{\Delta x} f(x) = f(x + \Delta x)$$

En substituant on obtient :

$$\left(\frac{T^{\Delta t} - 1}{\Delta t} + c_\epsilon \frac{1 - T^{-\sigma_\epsilon \Delta x}}{\Delta x} \right) v_0 + \epsilon \sqrt{\frac{g}{y_0}} \left(\frac{T^{\Delta t} - 1}{\Delta t} + c_\epsilon \frac{1 - T^{-\sigma_\epsilon \Delta x}}{x} \right) y_0 = g(i - J_0)$$

On constate que le résultat peut s'obtenir directement à partir de l'équation (c_ϵ) en remplaçant les dérivées par des rapports de différences finies et en prenant bien soin de calculer les différences en x du bon côté.

Etude de la stabilité.

Nous allons appliquer le critère de Von Neuman. On suppose que le problème à résoudre est péri-

La figure 24 donne la construction de λ où on voit que $|\lambda| \leq 1$ si :

(CFL)

$$c_{\epsilon} \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$$

condition connue sous le nom de Courant-Friedrichs-Levy.

3. Etude d'un schéma implicite.

Considérons une « case » ABCD dans le plan (x, t) (fig. 25) et un point 0 à l'intérieur que nous prendrons comme origine des coordonnées. α_1 , α_2 , β_1 et β_2 désigneront les coordonnées des côtés de la case.

Considérons en outre les caractéristiques c_+ et c_- qui passent par 0.

Supposons connus $\vec{W}$ en A, B, C et D. Ces valeurs ne peuvent pas être indépendantes. En effet, à partir de celles en A et D, on peut calculer $\vec{W}_0$ et de même à partir de celles en B et C, si on suppose que sur AD et BC une interpolation linéaire est valable pour calculer en a, d et b, c.

$$v_0 + \sqrt{\frac{g}{y_0}} y_0 - \left(v_a + \sqrt{\frac{g}{y_0}} y_a \right) = -\frac{\alpha_2}{c_+} g (i - J)$$

$$v_0 + \sqrt{\frac{g}{y_0}} y_0 - \left(v_c + \sqrt{\frac{g}{y_0}} y_c \right) = -\frac{\alpha_1}{c_+} g (i - J)$$

$$v_0 - \sqrt{\frac{g}{y_0}} y_0 - \left(v_d - \sqrt{\frac{g}{y_0}} y_d \right) = -\frac{\alpha_2}{c_-} g (i - J)$$

$$v_0 - \sqrt{\frac{g}{y_0}} y_0 - \left(v_b - \sqrt{\frac{g}{y_0}} y_b \right) = -\frac{\alpha_1}{c_-} g (i - J)$$

Ce qui exige que :

(D)

$$\begin{cases} v_c - v_a + \sqrt{\frac{g}{y_0}} (y_c - y_a) = \frac{1}{c_+} g (i - J) (\alpha_1 - \alpha_2) \\ v_b - v_d - \sqrt{\frac{g}{y_0}} (y_b - y_d) = \frac{1}{c_-} g (i - J) (\alpha_1 - \alpha_2) \end{cases}$$

relations qu'on peut écrire directement en considérant les variations sur (c_+) entre a et c et sur (c_-) entre b et d.

dique en x et on en considère un développement en série de Fourier.

On pose :

$$T^{\Delta t} f_0 = \lambda f_0 \quad f = \sum_k f_k e^{ikx}$$

λ est le coefficient d'amplification.

La condition de Von Neuman s'exprime par :

$$|\lambda| \leq 1 + O(\Delta t)$$

On peut donc négliger les termes d'ordre Δt . Sur le développement de Fourier, on obtient :

$$\left[\begin{array}{c} \left(\lambda - 1 + \frac{|c_+| \Delta t}{\Delta x} (1 - e^{ik\sigma_+ \Delta x}) \right) \left| \sqrt{\frac{g}{y_0}} \left[\lambda - 1 + \frac{|c_+| \Delta t}{\Delta x} (1 - e^{ik\sigma_+ \Delta x}) \right] \right| \\ \left(\lambda - 1 + \frac{|c_-| \Delta t}{\Delta x} (1 - e^{ik\sigma_- \Delta x}) \right) \left| -\sqrt{\frac{g}{y_0}} \left[\lambda - 1 + \frac{|c_-| \Delta t}{\Delta x} (1 - e^{ik\sigma_- \Delta x}) \right] \right| \end{array} \right] \begin{vmatrix} v_k \\ y_k \end{vmatrix} = 0$$

Ce qui impose que :

$$\lambda = 1 - \frac{|c_{\epsilon}| \Delta t}{\Delta x} (1 - e^{ik\sigma_{\epsilon} \Delta x}) = 1 - \frac{|c_{\epsilon}| \Delta t}{\Delta x} + \frac{|c_{\epsilon}| \Delta t}{\Delta x} e^{ik\sigma_{\epsilon} \Delta x}$$

Les formules d'interpolation sur AD et BC s'écrivent pour une fonction f :

$$f_a = f_A + \left(\frac{\alpha_2}{c_+} - \beta_2 \right) \frac{f_D - f_A}{\beta_1 - \beta_2}$$

$$f_c = f_B + \left(\frac{\alpha_1}{c_+} - \beta_2 \right) \frac{f_C - f_B}{\beta_1 - \beta_2}$$

d'où :

$$c_+ (f_c - f_a) = c_+ (f_B - f_A)$$

$$+ \frac{\alpha_1 - c_+ \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} (f_C - f_B) - \frac{\alpha_2 - c_+ \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} (f_D - f_A)$$

$$f_b = f_B + \left(\frac{\alpha_1}{c_-} - \beta_2 \right) \frac{f_C - f_B}{\beta_1 - \beta_2}$$

$$f_d = f_A + \left(\frac{\alpha_2}{c_-} - \beta_2 \right) \frac{f_D - f_A}{\beta_1 - \beta_2}$$

d'où :

$$c_- (f_b - f_d) = c_- (f_B - f_A)$$

$$+ \frac{\alpha_1 - c_- \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} (f_C - f_B) - \frac{\alpha_2 - c_- \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} (f_D - f_A)$$

Si l'on pose :

$$R^\varepsilon = v + \varepsilon \sqrt{\frac{g}{y_0}} y$$

après substitution, les 2 relations (D) s'écrivent :

(R)

$$\begin{aligned} (\alpha_2 - c_\varepsilon \beta_1) R^\varepsilon_A - (\alpha_1 - c_\varepsilon \beta_1) R^\varepsilon_B \\ + (\alpha_1 - c_\varepsilon \beta_2) R^\varepsilon_C - (\alpha_2 - c_\varepsilon \beta_2) R^\varepsilon_D \\ = g(i - J)(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) \end{aligned}$$

Ces formules constituent un schéma implicite puisqu'elles font intervenir les valeurs de W en D et C simultanément.

Il faut noter au passage que, si on pose :

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} R^+ \\ R^- \end{bmatrix}$$

$$\vec{R} = (\vec{l}_\varepsilon) \vec{W} \quad \text{où} \quad (\vec{l}_\varepsilon) = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{g}{y}} & 1 \\ -\sqrt{\frac{g}{y}} & 1 \end{bmatrix}$$

Les R^ε peuvent être considérés comme les « invariants locaux » de Rieman.

Principe de résolution.

Une condition aux limites peut localement s'écrire :

$$\alpha v + \beta y = \gamma$$

ou :

$$\alpha' R^+ + \beta' R^- = \gamma' \text{ relation dite « d'impédance »}$$

Connaissant une telle relation en C, les relations

(R) permettent de la « remonter » en D et ainsi de suite jusqu'à l'autre extrémité du bief, sauf si un coefficient de R^ε_C est nul. Ceci peut se produire par exemple pour R^-_C si :

$$\frac{\alpha_1}{c_-} = \beta_2$$

c'est-à-dire si b est en B (il en sera de même si a vient en A).

En effet, R^-_D ne dépend alors que de R^-_B puisqu'il n'y a pas à interpoler entre C et B pour avoir R^-_b .

Mais, dans ces cas, R^-_D est alors directement calculable et il suffit de prendre $\alpha' = 0$ et $\beta' = 1$ et $\gamma' = R^-_D$.

Arrivée à l'extrémité du bief, la relation d'impédance ainsi remontée et la condition imposée à cette extrémité permettent d'y calculer R^ε . Un deuxième balayage en sens inverse déterminera R^ε sur tout le bief.

Cette méthode dite du double balayage est parfois connue sous le nom d'algorithme de Richtmeyer.

Schéma de la case.

Ajoutons et retranchons membre à membre les relations (R).

En regroupant, on obtient :

$$\begin{aligned} (1 - \theta_x) \frac{y_C - y_B}{\Delta t} + \theta_x \frac{y_D - y_A}{\Delta t} \\ + v_0 \left[(1 - \theta_t) \frac{y_C - y_D}{\Delta x} + \theta_t \frac{y_B - y_A}{\Delta x} \right] \\ + y_0 \left[(1 - \theta_t) \frac{v_C - v_D}{\Delta x} + \theta_t \frac{v_B - v_A}{\Delta x} \right] = 0 \end{aligned} \quad (S)$$

$$\begin{aligned} (1 - \theta_x) \frac{v_C - v_B}{\Delta t} + \theta_x \frac{v_D - v_A}{\Delta t} \\ + v_0 \left[(1 - \theta_t) \frac{v_C - v_D}{\Delta x} + \theta_t \frac{v_B - v_A}{\Delta x} \right] \\ + g \left[(1 - \theta_t) \frac{y_C - y_D}{\Delta x} + \theta_t \frac{y_B - y_A}{\Delta x} \right] = g(i - J) \end{aligned}$$

On constate que ces équations se déduisent directement des équations de Saint-Venant en calculant les dérivées par différences finies et en les pondérant par les coefficients :

$$\theta_x = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} = -\frac{\alpha_2}{\Delta x}$$

$$\theta_t = \frac{-\beta_2}{\beta_1 - \beta_2} = -\frac{\beta_2}{\Delta t}$$

Stabilité.

Nous ne considérerons que le cas où $\theta_x = 1/2$ et poserons $\theta_t = \theta$.

En procédant avec le système (S) comme dans le schéma explicite, nous obtenons pour définir le coefficient d'amplification λ :

$$\left| \begin{aligned} & \frac{e^{ik\Delta x} + 1}{2} (\lambda - 1) + v_0 (\lambda \theta + 1 - \theta) (e^{ik\Delta x} - 1) \frac{\Delta t}{\Delta x} \\ & g (\lambda \theta + 1 - \theta) (e^{ik\Delta x} - 1) \frac{\Delta t}{\Delta x} \\ & y_0 (\lambda \theta + 1 - \theta) (e^{ik\Delta x} - 1) \frac{\Delta t}{\Delta x} \\ & \frac{e^{ik\Delta x} + 1}{2} (\lambda - 1) + v_0 (\lambda + 1 - \theta) (e^{ik\Delta x} - 1) \frac{\Delta t}{\Delta x} \end{aligned} \right| = 0$$

Soit, en posant $k\Delta x/2 = \alpha$:

$$\lambda = \frac{\cos \alpha - 2 i c_\varepsilon \frac{\Delta t}{\Delta x} (1 - \theta) \sin \alpha}{\cos \alpha + 2 i c_\varepsilon \frac{\Delta t}{\Delta x} \theta \sin \alpha}$$

et l'on aura : $|\lambda| \leq 1$, si :

$$0 > \frac{1}{2} \quad \text{quel que soit } \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

le schéma est alors inconditionnellement stable.

Abstract

A few applications of mathematical models to the study of unsteady flows in a ramified river or canal network

by A. Daubert, P. Marvaud, L. Fabre and Miss A. Margnac *

Mathematical models are coming into increasing use as a means of investigating unsteady river and channel flow. Their potential scope is briefly described.

The Saint-Venant equations for gradually varying unsteady flow constitute a hyperbolic quasi-linear system. They can be integrated by two basic numerical methods: explicit methods requiring a stability condition, and implicit methods which may be unconditionally stable. The choice of which method to use is very often given by the type of problem, for whereas the increment along the abscissa depends on river or channel bed geometry and water level definition accuracy, the time increment, on the other hand, must account for significant variations. In the case of a flood (a 'slow' phenomenon) the implicit method is the obvious one as it can cope with a comparatively large time increment. Very rapidly developing phenomena, on the other hand, require a short time increment, which satisfies the stability condition of explicit methods.

Each problem is represented by a hydraulic scheme allowing for the various ramifications and featuring all the weirs, flow inputs, cross-sectional changes, diversions and other special points in the system.

One or two conditions (hydrograph or level chart) will be given upstream from each branch, and a stage/discharge relationship or a level record downstream from the model, also an operating relationship for each singular point.

The initial conditions also require defining. They can be calculated for steady flow, but if the phenomenon is already developing at the point at which the calculation starts, they have to be assumed; they are usually of little importance, however, as their effects are no longer felt after a certain time.

Reference is made to examples of a few applications, to illustrate the potential usefulness of mathematical models in this field.

Examples of flood-routing studies mentioned are a study of the Rhine at Karlsruhe and one of the Rhone above Lyons. The Rhine's hydraulic scheme features a number of hydro-power plants and that of the Rhone several weirs (Fig. 1 to 8).

Under the heading of hydro-power development an example of a surge wave study arises in the problem of 'by the lockful' operation (Fig. 9 to 17). In this particular case, the implicit method could be used to reduce the computing time requirements, but it should be noted that the explicit one is preferable for cases involving more rapid operation.

A scheme with power governed by water level is mentioned as a further example. It features a reservoir, a canal, a pressure tunnel with two surge tanks and a penstock. Turbine discharge is governed by reservoir level (Fig. 18.) Downstream and upstream boundary conditions remain permanently interdependent in this example.

Mathematical models have also been used to study tidal propagation. Figures 19, 20 and 21 show the close agreement reached between observed and calculated data in a study of the Seine and the formation of a tidal bore which, if considered as a weak shock wave, can be dealt with by the explicit method.

In a tidal propagation problem in a small river the downstream condition represents a floodgate system keeping the sea out at rising tide and opening at the ebb tide (Fig. 23).

In a study of a cooling system for a thermal power station using water from the Loire and discharging it back to a shallow river arm the mathematical model features control sections at the ends of the river arm when the latter are high and dry at low water (Fig. 22).

The various examples are merely mentioned as an illustration of the potential scope of mathematical models; a brief discussion on numerical integration methods is given in an Appendix.

* Electricité de France, Direction des Etudes et Recherches : 6, quai Watier, 78 - Chatou, France.