POSSIBILITÉ ET LIMITE DE LA DÉGÉNÉRESCENCE EN SYSTÈME DIFFÉRENTIEL DU MODÈLE MATHÉMATIQUE DES INTUMESCENCES

Communication
présentée au Comité technique
de la Société Hydrotechnique de France
le 9 juin 1967

PAR C. THIRRIOT * ET
H. BARTHET **

Introduction

Issu des équations de Saint-Venant modifiées, le modèle mathématique des régimes transitoires dans les canaux et rivières est un système aux dérivées partielles de type hyperbolique résolu avec justesse et de manière très proche de la réalité physique à l'aide de la théorie des caractéristiques. Il peut être aussi étudié par d'autres procédés; en particulier, depuis quelques années, de nombreux travaux ont été consacrés à la traduction en différences finies de ce modèle mathématique et en son traitement numérique. Pour notre part, nous avons envisagé de transformer le système aux dérivées partielles en système différentiel en utilisant seulement la discrétisation par rapport à la variable espace.

Le système différentiel ainsi obtenu peut être traité par différents procédés; en particulier, lorsque le nombre d'équations n'est pas trop élevé, on peut user avec profit du matériel analogique. On peut aussi envisager la résolution numérique directe des équations différentielles à l'aide des schémas explicites ou implicites d'intégration. Enfin, cette façon de procéder permet d'obtenir par voie analytique une solution fermée fondée sur la détermination des valeurs propres et des vecteurs propres du système.

* Professeur s.c. à la Faculté des Sciences de Toulouse.

** Maître-Assistant à la Faculté des Sciences de Toulouse.

Modèle mathématique

1. Equations de Saint-Venant.

Les équations de Saint-Venant, régissant les écoulements à surface libre en régime transitoire, s'écrivent sous leur forme habituelle :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_1$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(i - j) \quad (1)$$

où

$S(x, h)$: section mouillée;

$Q(x, t)$: débit;

$v(x, t)$: vitesse moyenne de l'écoulement;

$h(x, t)$: profondeur;

i : pente du fond;

j : pente de la ligne de charge;

q_1 : débit latéral.

Nous choisissons, pour l'exposé de notre méthode, le couple de coordonnées Q et h .

Observons que la section et la profondeur sont liés par une relation :

$$S = f[h, \alpha(x)],$$

$\alpha(x)$ étant un coefficient de forme tenant compte de la modification longitudinale du profil dans le cas d'un canal non cylindrique.

Les équations (1) deviennent :

$$B \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} - B \frac{Q}{S} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{Q}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} + gS(1 - \mathcal{F}^2) \frac{\partial h}{\partial x} = gSJ$$
(2)

Si l'on admet la formule de Strickler pour l'évaluation de la perte de charge :

$$J = i - \frac{1}{K_s^2 R^{2/3}} \frac{Q}{S} \left| \frac{Q}{S} \right| + \frac{1}{g} \frac{Q^2}{S^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha} \right)_{h=Cte} \frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

K_s : coefficient de Strickler;

$B = (\partial S / \partial h)_{a=Cte}$: largeur au miroir;

$\mathcal{F}$: nombre de Froude.

2. Transformation des équations aux dérivées partielles en un système d'équations différentielles par introduction d'un opérateur de différenciation par rapport à x .

Considérons un découpage du canal ou de la rivière en n tronçons soit $n + 1$ sections, les longueurs des tronçons étant ou non égales; ce découpage possible en intervalles inégaux permettant le calcul des points où sont situées des singularités telles que déversoirs, siphons, changement de section, etc. A chaque instant t et dans chaque section, si nous connaissons le débit Q , la profondeur h , la section mouillée S et enfin les valeurs des dérivées partielles $\partial Q / \partial x$ et $\partial h / \partial x$, les équations (2) se ramènent à un système d'équations différentielles en dQ/dt et dh/dt qu'il suffit alors d'intégrer.

En effet, les équations (2) sont valables pour tout x et pour tout t appartenant au domaine du régime transitoire, c'est-à-dire défini par un tronçon de canal ou de rivière.

Soit f , l'une ou l'autre des fonctions Q et h . Dans une section d'abscisse d'ordre k et à un instant donné t , nous aurons les différentes fonctions f_k et leurs dérivées $\partial f_k / \partial x$. Introduisons un opérateur de différenciation tel que nous ayons :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_k = \Delta f_k = a_{-i}^k f_{k-i} + \dots + a_{-1}^k f_{k-1} + a_0^k f_k + a_1^k f_{k+1} + \dots + a_i^k f_{k+i}$$
(3)

les f_{k-i} représentant la fonction f aux sections d'abscisse d'ordre $k + i$ et l'opérateur Δ défini ci-dessus s'appliquant à un panneau central.

L'opérateur différentiel Δ permet ainsi de faire correspondre à une section donnée et à une fonction f donnée, à un instant t , une quantité déterminée dépendant d'une manière uniforme des valeurs :

$$f_{k-i}, \dots, f_k, \dots, f_{k+i}$$

Cette quantité, représentant les dérivées partielles par rapport à x et étant connue explicitement

en fonction des f_{k+p} , p variant de 0 à i , nous l'introduisons dans le système d'équations (2), qui peut alors s'écrire à un instant t :

$$\frac{dh_k}{dt} = \frac{1}{B_k} \Delta Q_k$$

$$\frac{dQ_k}{dt} = B_k \frac{dh_k}{dt} \frac{Q_k}{S_k} - \frac{Q_k}{S_k} \Delta Q_k - gS_k(1 - \mathcal{F}_k^2) \Delta h_k + gS_k J_k$$
(4)

Avant de tenir compte des conditions aux limites, nous avons ainsi un système en h et Q à $2n + 2$ équations différentielles.

Les conditions initiales étant données par les valeurs de h et Q aux $n + 1$ sections et les conditions aux limites étant imposées à l'amont et à l'aval du tronçon de canal ou de rivière considéré. Les conditions aux limites sont, dans notre exposé, des lois $Q(t)$ à la section de manœuvre et $h(t)$ à la section posée.

3. Opérateur de différenciation.

L'expression générale (3) de l'opérateur de différenciation permet d'adopter une méthode de résolution du système différentiel indépendante du choix de l'opérateur, le calcul des Δf_k pouvant être fait en sous-programme à chaque instant. Ce principe donne une grande souplesse pour le choix des méthodes.

Dans le cadre de nos applications, l'opérateur de différenciation est établi à partir des formules d'interpolation de polynômes de Lagrange ou Newton à deux, trois ou cinq points ou à partir de méthodes de lissage telles que la méthode de Sheppard (lissage local par polynôme du second degré).

La formule d'interpolation à trois points de Lagrange donne :

$$\Delta f_k = a_{k-1}^k f_{k-1} + a_k^k f_k + a_{k+1}^k f_{k+1}$$

où

$$a_{k-1}^k = \frac{x_k - x_{k+1}}{(x_k - x_{k-1})(x_{k+1} - x_{k-1})}$$

$$a_k^k = \frac{x_k - x_{k+1} - x_{k-1}}{(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})}$$

$$a_{k+1}^k = \frac{x_k - x_{k-1}}{(x_{k+1} - x_k)(x_{k+1} - x_{k-1})}$$

La méthode de lissage de Sheppard (lissage local par polynômes du second degré), pour des abscisses équidistantes de Δx , donne :

$$\Delta f_k = \frac{-2f_{k-2} - f_{k-1} + f_{k+1} + 2f_{k+2}}{10 \Delta x}$$

Il est bien certain que pour ces différents opérateurs interviennent des panneaux de tête et de queue que nous ne développerons pas ici.

La critique de ces différents opérateurs est vue dans le paragraphe 4 des applications.

Intégration numérique

Le système d'équations différentielles (4) peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\frac{dV}{dt} = AV + B$$

où V est un vecteur à $2n$ composantes (Q_k, h_k), A la matrice des coefficients des composantes du vecteur V , et B un vecteur de $2n$ composantes représentant l'influence des termes de perte de charge et des conditions aux limites amont et aval.

Nous avons souligné la possibilité de traitement de ce système par du matériel analogique lorsque le nombre d'équations n'est pas trop élevé.

La résolution numérique du système (5) peut se faire à l'aide des méthodes explicites ou implicites classiques des équations différentielles ou encore par une résolution matricielle sous forme de solution fermée.

L'organigramme de la planche I permet de suivre l'évolution du calcul avec la méthode explicite d'intégration de Heun. Pour faciliter la lecture, nous avons adopté la notation vectorielle $V(t)$, le vecteur V ayant pour composantes les fonctions h_k et Q_k . Suivant cet algorithme, le système différentiel s'écrit :

$$h_k(t + dt) = h_k + \frac{dt}{4} (m_0 + 3m_2) \quad (6)$$

$$Q_k(t + dt) = Q_k + \frac{dt}{4} (J_0 + 3J_2)$$

Avec :

$$m_0 = \frac{d}{dt} (h[t, Q_k, h_k])$$

$$m_1 = \frac{d}{dt} \left(h \left[t + \frac{dt}{3}, Q_k + \frac{dt}{3} J_0, h_k + \frac{dt}{3} m_0 \right] \right)$$

$$m_2 = \frac{d}{dt} \left(h \left[t + \frac{2dt}{3}, Q_k + \frac{2dt}{3} J_1, h_k + \frac{2dt}{3} m_1 \right] \right)$$

et les formules analogues pour J_0, J_1, J_2 .

Les conditions initiales sont données par la courbe de remous calculée en début de programme. Aux abscisses limites, les conditions de fonctionnement de la forme $F(t, Q, h) = 0$ imposent la résolution du système défini par la loi à la limite, d'une part, et par le système (6), d'autre part.

La méthode d'Euler-Cauchy, à pas séparés aussi, mais implicite, donne comme algorithme général :

$$V_k(t + dt) = V_k(t) + \frac{dt}{2} \left(\frac{dV_k(t)}{dt} + \frac{dV_k^*(t + dt)}{dt} \right)$$

Une itération pour le calcul de :

$$\frac{dV_k^*(t + dt)}{dt}$$

permet d'améliorer la solution.

Les programmes établis à partir de ces méthodes sont d'une grande simplicité et ne font appel à aucun artifice. Les méthodes d'intégration aussi

bien que l'opérateur de différenciation sont interchangeables puisque calculées en sous-programme. L'encombrement machine est réduit et ne dépend que du nombre de sections choisies. Le temps de calcul est réduit par rapport à d'autres méthodes, telles la méthode des caractéristiques ou des méthodes itératives comme nous le verrons dans les applications. Enfin, la discrétisation en x se faisant suivant des intervalles égaux ou inégaux, il est possible de suivre l'évolution de la propagation de la perturbation en n'importe quelle section.

Dans la résolution d'un système différentiel tel que (5), intervient un problème de valeurs propres dont dépend la stabilité et la convergence de la solution. Ce problème est très important dans le cas de notre méthode. En effet, l'approximation des dérivées partielles par rapport à x à l'aide de l'opérateur de différenciation entraîne la naissance de perturbations auxquelles s'ajoutent les perturbations dues au processus numérique d'intégration.

Ainsi, la résolution du système (5) va dépendre de trois paramètres :

- 1° Le découpage en x qui détermine les valeurs propres;
- 2° La méthode d'intégration et le pas de temps choisis d'après les valeurs propres;
- 3° Le temps de manœuvre.

L'influence de ces trois paramètres est étudiée dans les applications. La stabilité numérique ne sera assurée que si la relation :

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

est vérifiée. Les résultats numériques ont montré que l'on peut prendre directement Δt tel que :

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{c}$$

les résultats étant sensiblement les mêmes que ceux obtenus avec le pas d'intégration tel que $\Delta t < (\Delta x/c)$. Ceci résulte des valeurs propres qui déterminent le choix du pas de temps et, dans le cas de cette méthode, le problème est de limiter la fréquence propre de la plus grande valeur propre.

Application

1. Modèle physique.

Le modèle physique choisi pour étudier les possibilités et les limites de notre méthode est un canal trapézoïdal de 5 km de long. Nous avons supposé le régime d'écoulement uniforme et les pertes de charge faibles, coefficient de Strickler $K_s = 100$. Les caractéristiques en sont les suivantes

$$B_0 = 10 \text{ m} \quad m = 1 \quad Q_0 = 100 \text{ m}^3/\text{s} \quad h_0 = 5 \text{ m}$$

Aux limites, nous imposons une loi linéaire de débit à l'aval en fonction du temps et un niveau constant à l'amont.

Tableau 1

$x = 4\,000$ Comparaison des résultats
en fonction des paramètres Δx , Δt , τ

$\frac{C\Delta t}{\Delta x}$	$\frac{C\tau}{\Delta x}$	0	3	6	12	24
0,3	$\frac{TC}{\Delta x}$		6,6	6,6	4,8	6
	$\frac{\delta\Delta h}{\Delta h}$		0,363	0,212	0,089	0,040
	α		0,097	0,113	0,020	0,067
0,6	$\frac{TC}{\Delta x}$	7,42	6,6	6,36	4,8	6
	$\frac{\delta\Delta h}{\Delta h}$	0,45	0,355	0,207	0,086	0,038
	α	0,0904	0,1314	0,071	0,027	0,077
1	$\frac{TC}{\Delta x}$		6	6	6	4,8
	$\frac{\delta\Delta h}{\Delta h}$		0,306	0,186	0,046	0,022
	α		0,220	0,206	0,080	0,245

$$\alpha : \frac{\Delta [\text{Log } \delta(\Delta h)]}{\Delta (Ct/\Delta x)}$$

T : période des oscillations;
 τ : temps de manœuvre.

Tableau 2

$x = 3\,000$ Comparaison des résultats
en fonction des paramètres Δx , Δt , τ

$\frac{C\Delta t}{\Delta x}$	$\frac{C\tau}{\Delta x}$	0	3	6	12	24
0,3	$\frac{TC}{\Delta x}$		6,6	6,6	7,2	6
	$\frac{\delta\Delta h}{\Delta h}$		0,482	0,352	0,437	0,058
	α		0,092	0,091	0,056	0,094
0,6	$\frac{TC}{\Delta x}$	8,35	6,6	6,6	7,2	6
	$\frac{\delta\Delta h}{\Delta h}$	0,54	0,472	0,347	0,423	0,052
	α	0,0674	0,101	0,107	0,093	0,111
1	$\frac{TC}{\Delta x}$		6	6	6	6
	$\frac{\delta\Delta h}{\Delta h}$		0,417	0,335	0,325	0,034
	α		0,222	0,197	0,010	0,198

$$\alpha : \frac{\Delta [\text{Log } \delta(\Delta h)]}{\Delta (Ct/\Delta x)}$$

T : période des oscillations;
 τ : temps de manœuvre.

Planche I **Tableau 3**

2. Etude de l'opérateur de différenciation.

L'opérateur de différenciation obtenu à partir de la méthode de lissage de Sheppard ne donne pas de résultats satisfaisants. Le découpage en x entraîne des fréquences des valeurs propres élevées et une amplitude des oscillations importantes.

L'utilisation des formules d'interpolation des polynômes de Lagrange donne, par contre, des résultats satisfaisants.

Les écarts obtenus à partir de l'interpolation à deux, trois ou cinq points sont faibles, aussi est-ce avec la formule à trois points que l'étude de l'influence des paramètres a été faite.

3. Influence de la méthode d'intégration.

La comparaison des courbes $h(t)$ du tableau 3 montre l'allure similaire des courbes quelle que soit la méthode d'intégration de Heun ou d'Euler-Cauchy. Sur ce tableau, sont répartis les résultats obtenus à partir de la méthode des caractéristiques.

Il faut préciser qu'à la section limite de manœuvre, $h(t)$ est calculé par une formule itérative explicite. En effet, nous imposons une loi de débit $Q(t)$ et nous connaissons donc la dérivée de Q par rapport au temps. Dans le système (4), nous avons, ainsi, seulement deux inconnues : $h(t)$ et sa dérivée par rapport au temps. Il est facile, par un procédé itératif convergent, de déterminer ces valeurs. Nous voyons les résultats sur le tableau 3 pour $X = 5\,000$ m. Notons que, si, à la limite de manœuvre, on calcule directement par intégration $h(t)$, comme aux autres sections, les oscillations dues aux valeurs propres que nous trouvons par exemple à l'abscisse $X = 4\,000$ m, apparaissent aussi dans le calcul à la limite. Ce procédé de calcul itératif pour $h(t)$ à la section de manœuvre permet d'atténuer l'influence des valeurs propres à cette même section.

4. Influence du découpage en x et du temps de manœuvre.

Les tableaux 1 et 2 représentent l'évolution du calcul en fonction des paramètres Δx , Δt et τ , τ : temps de manœuvre. Pour chaque cas, nous avons examiné les périodes des oscillations, les amplitudes maximales et le taux d'atténuation des amplitudes, ces grandeurs étant ramenées à des grandeurs réduites par rapport au découpage en x et à la vitesse de propagation de la perturbation.

La stabilité étant assurée par la condition :

$$\frac{C\Delta t}{\Delta x} < 1$$

t peut être pris tel que $C\Delta t/\Delta x$ soit très voisin de un par valeurs inférieures à un.

Le découpage en x est très important, car c'est lui qui détermine les valeurs propres. Pour un même temps de manœuvre, l'influence est nette sur la période et l'amplitude des oscillations. Sur les tableaux 1 et 2, les résultats correspondant à $C\Delta t/\Delta x = 0,6$ et $C\tau/\Delta x = 6$ et 12 sont obtenus pour le même temps de manœuvre, mais pour un découpage en x variant de Δx à $\Delta x/2$. La variation de l'amplitude est très nette, puisqu'elle est de 0,207 pour $C\tau/\Delta x = 6$ et de 0,086 pour $C\tau/\Delta x = 12$, c'est-

à-dire pour un Δx moitié. Il en est de même pour la variation de la période qui est rapportée sur les tableaux à Δx .

Il est possible de rendre plus fin le découpage en x et d'atténuer l'amplitude des vecteurs propres pour une manœuvre donnée : mais alors on augmente l'encombrement machine du programme et le temps de calcul machine.

En pratique, étant donné un problème physique à étudier, la transposition numérique entraîne donc le choix de la finesse du découpage en fonction du temps de manœuvre, le pas de temps devant vérifier la condition de stabilité.

Il faut souligner enfin la rapidité de calcul de notre méthode due à l'extrême simplicité du programme. La méthode des caractéristiques, pour un essai, a donné un temps de calcul, sur I.B.M. 7044, de trois minutes. Cette méthode, pour le même essai et sur le même ordinateur, pour un découpage de 50 m sur les 5 000 m, a pris une minute vingt secondes. Les résultats correspondant à cet essai sont ceux du tableau 3.

Conclusions

La dégénérescence en système différentiel du modèle mathématique des intumescences et l'intégration numérique de ce système par des procédés classiques conduit à un moyen de calcul stable suivant une méthode de type explicite. Certes, l'influence du découpage en x sur les valeurs propres du système et, par suite, sur le temps de manœuvre, limite les possibilités d'utilisation de la méthode, mais le programme de calcul numérique est d'une grande simplicité de mise en œuvre, facilement exploitable, les points de calcul pouvant être localisés en n'importe quelle section grâce au découpage en abscisses non équidistantes, et enfin le temps de calcul machine est réduit.

Bibliographie

- HOLSTERS. — Le calcul du mouvement non permanent dans les rivières par la méthode dite des « lignes d'influence ». *Revue générale de l'Hydraulique*, n°s 37, 38, 39, 40 et 41 (1947).
- CUÉNOD et GARDEL. — Etude des ondes de translation de faible amplitude - Laboratoire d'Hydraulique de l'Ecole Polytechnique de l'Université de Lausanne (1952).
- MINEUR. — Techniques de calcul numérique. *Librairie Polytechnique Béranger*, Paris (1952).
- ISAACSON, STOKER and TROESCH. — Numerical solution of flood prediction and river regulation problems. New York University, Reports I, II, III (1956).
- NOUGARO, GUYOT et THIRRIOT. — Calcul numérique des régimes transitoires dans les canaux découverts. *C.R.A.S.*, t. 249, p. 1859 (1959).
- SCHOLER et GERMANIS. — Unsteady flow in rivers and artificial canals - *The Institution of Engineers* (1959).
- PREISSMANN. — Propagation des intumescences dans les canaux et les rivières. Premier congrès de l'Association Française de Calcul. Grenoble (1960).

- THIRRIOT. — Contribution à l'étude des régimes variés et des régimes transitoires dans les canaux d'usines. Thèse Université de Toulouse (1960).
- PREISSMANN et CUNGE. — Calcul des intumescences sur des machines électroniques. IX^e Assemblée Générale de l'A.I.R.H., Dubrovnik (1961).
- FAURE et NAHAS. — Etude numérique et expérimentale d'intumescences à forte courbure du fond. Société Hydro-technique de France (15 juin 1961).
- PIQUEMAL et DAVIS. — Détermination sur calculatrice des oscillations du plan d'eau dans les cheminées d'équilibre. C.R.A.S., t. 255, p. 2713 (1962).
- ESCANDE, PIQUEMAL et DAVIS. — Etude sur calculatrice analogique des manœuvres superposées dans les cheminées d'équilibre à section constante avec ou sans étranglement. C.R.A.S., t. 256, p. 1412 (1963).
- CUNGE et WEGNER. — Intégration numérique des équations d'écoulement de Barré de Saint-Venant par un schéma implicite de différences finies. *La Houille Blanche*, n° 1 (1964).
- CESCHINO et KUNTZMANN. — Problèmes différentiels de conditions initiales - *Dunod* (1963).
- VASSILIEV. — Numerical methods for the calculation of shock wave propagation in open channels. XI^e Congrès A.I.R.H. Leningrad (septembre 1965).
- PREISSMANN. — Difficultés rencontrées dans le calcul des ondes de translation à front raide. XI^e Congrès A.I.R.H. Leningrad (septembre 1965).
- KUNTZMANN. — Interpolation-dérivées. *Dunod*.

Abstract

The possibility and limit of degeneration of a mathematical surge wave model into a differential system

by C. Thirriot * and H. Barthet **

A mathematical model of transient conditions in rivers and canals stems from modified Saint Venant equations and is a hyperbolic partial differential system for which the theory of characteristics provides an accurate solution which agrees closely with physical reality. It can also be studied by other methods, among which especially translation of the mathematical model into a finite difference and its digital processing, which have been the subject of much investigation during the last few years. The authors have considered transformation of the partial differential system into a differential one solely by discretization with respect to the space variable.

A differentiation operator Δf_k enables the value of the partial derivatives $\partial f_k / \partial x$ to be found if f is either function Q or function H .

There are various approaches to the differential system this yields, especially if there are not too many equations, in which case an analogy approach is likely to be profitable. Numerical solution of the differential equations by explicit or implicit integration schemes provides an adequate solution to the problem, provided the stability condition $(c\Delta t / \Delta x) \leq 1$ is satisfied and a sufficiently fine subdivision is taken along the space variable for the operation to eliminate any influence of the frequency and amplitude of the system's eigenvalues.

* Professeur s.e. à la Faculté des Sciences de Toulouse.

** Maître-Assistant à la Faculté des Sciences de Toulouse.