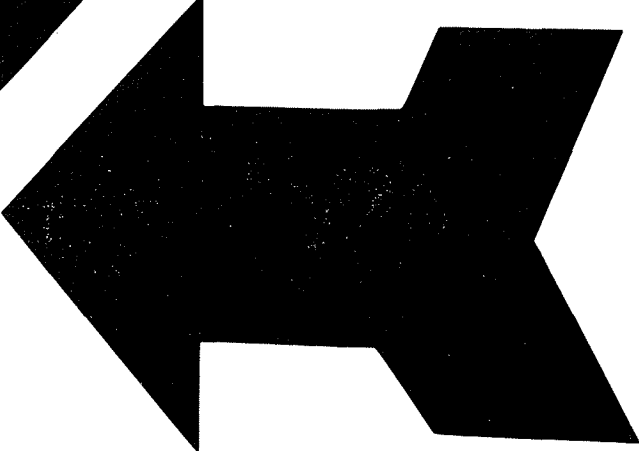


**QUELQUES ASPECTS
DES ÉCOULEMENTS PRESQUE
HORIZONTAUX
A DEUX DIMENSIONS EN PLAN
ET NON PERMANENTS
APPLICATION AUX
ESTUAIRES**

PAR A. DAUBERT *
ET Mlle O. GRAFFE *



Communication
présentée au Comité technique
de la Société Hydrotechnique de France
le 9 juin 1967

Introduction

Les écoulements à surface libre presque horizontaux, qui sont le siège de propagation d'ondes dites longues, sont couramment traités par la théorie des caractéristiques, dans le cas des rivières ou canaux où il n'y a qu'une variable spatiale représentée par l'abscisse curviligne le long de la rivière.

Cette étude prolonge la théorie précédente dans un espace à deux dimensions. Cette théorie, établie par Hadamard, est d'une utilisation moins courante avec trois variables indépendantes (en ajoutant le temps) et il nous a paru bon de la rappeler en l'appliquant de façon correcte au problème des écoulements non permanents dans une zone littorale. Nous en avons tiré des conséquences qui nous paraissent importantes pour bien définir le problème mathématiquement, surtout en ce qui concerne les conditions aux limites. On en a également déduit un schéma d'intégration numérique, sur lequel a été bâti un programme de calcul sur ordinateur permettant de résoudre les problèmes d'hydraulique dans les zones littorales.

Il nous a paru également intéressant de reprendre le problème à la base, d'en établir les équations, de montrer les diverses simplifications qu'on peut y apporter.

En particulier, les effets non linéaires seront pris

en compte et l'accent sera mis également sur ce qu'ils apportent.

Mise en équation

L'espace étant rapporté à un trièdre orthonormé $\vec{x}\vec{y}\vec{z}$ (z vertical ascendant), on se propose d'étudier l'écoulement d'une masse liquide à surface libre et de profondeur variable.

Principales hypothèses.

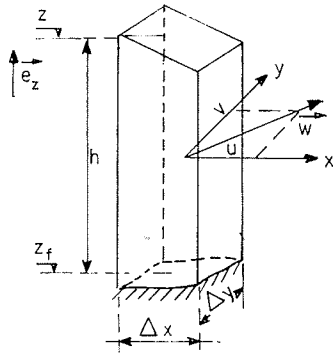
Les principales hypothèses de cette étude sont les suivantes :

- 1° La répartition des vitesses est supposée uniforme sur une verticale; autrement dit, la vitesse calculée sera la vitesse moyenne d'une colonne d'eau;
- 2° L'accélération verticale est négligée devant l'accélération de la pesanteur ou encore la répartition des pressions est hydrostatique;
- 3° Les pentes du fond et de la surface libre sont supposées faibles.

Les inconnues à déterminer en chaque point en fonction du temps sont :

h = tirant d'eau ou Z = cote de la surface libre
($Z = h + Z_f$ Z_f = cote du fond);

* E.D.F., Direction des Etudes et Recherches, 6, quai Watier - (78) Chatou.



\vec{w} = vecteur vitesse $\left\{ \begin{array}{l} u = \text{projection de } \vec{w} \text{ sur } \vec{x} \\ v = \text{projection de } \vec{w} \text{ sur } \vec{y} \end{array} \right.$

Considérons un prisme élémentaire de base Δx , Δy et de hauteur h :

L'équation de continuité.

L'équation de continuité s'obtient en écrivant que l'accroissement de volume élémentaire est dû à la différence des débits qui y pénètrent et qui en sortent :

$$\Delta h \Delta x \Delta y = [uh(x, y, t) - uh(x + \Delta x, y, t)] \Delta y \Delta t + [vh(x, y, t) - vh(x, y + \Delta y, t)] \Delta x \Delta t$$

d'où en divisant par $\Delta x \Delta y \Delta t$ et en faisant tendre ces grandeurs vers 0 :

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (vh)}{\partial x} + \frac{\partial (uh)}{\partial y} = 0}$$

Les équations dynamiques.

Les équations dynamiques s'obtiennent en appliquant l'équation des quantités de mouvement au prisme considéré :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma} (\vec{w}, \vec{n}) \vec{w} d\Gamma = \Sigma \vec{F}_{\text{ext}}$$

Ω = volume } du prisme;
 Γ = surface }

\vec{F}_{ext} représente les forces extérieures.

En projetant sur \vec{x} il vient :

$$h \Delta x \Delta y \frac{\partial u}{\partial t} + (hu^2 \Delta y)_{x+\Delta x} - (hu^2 \Delta y)_x + (huv \Delta x)_{y+\Delta y} - (huv \Delta x)_y + \frac{\partial h}{\partial t} u \Delta x \Delta y = F_x$$

divisons par $\Delta x \Delta y$ et faisons tendre ces quantités vers 0; on obtient :

$$\boxed{h \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hu^2) + \frac{\partial}{\partial y} (huv) = F_x}$$

De même en projection sur \vec{y} :

$$\boxed{h \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (huv) + \frac{\partial}{\partial y} (hv^2) = F_y}$$

les forces extérieures sont dues à la pression, au poids, aux frottements et à l'accélération de Coriolis.

La pression. — Dans l'hypothèse d'une répartition hydrostatique des pressions, les isobares sont des surfaces parallèles à la surface libre. Soit \vec{p} la résultante des pressions s'exerçant sur le prisme élémentaire.

$$|\vec{p}| = gh \Delta x \Delta y$$

et \vec{p} est dirigée suivant la normale \vec{n} à la surface libre :

$$z = Z(x, y)$$

l'hypothèse d'écoulement presque horizontal entraîne que :

$$1 + (\partial Z / \partial x)^2 + (\partial Z / \partial y)^2 \approx 1$$

d'où :

$$\vec{n} = \begin{cases} \partial Z / \partial x \\ \partial Z / \partial y \\ -1 \end{cases}$$

et :

$$P_x = -gh \partial Z / \partial x \Delta x \Delta y \\ P_y = -gh \partial Z / \partial y \Delta x \Delta y$$

le poids n'intervient pas car il est parallèle à \vec{z} .

La force due au frottement est proportionnelle à la surface de contact de l'eau et du fond : le fond étant supposé relativement plat, cette surface est égale, pour le prisme élémentaire, à $\Delta x \Delta y$.

Elle est proportionnelle au carré de la vitesse et dirigée en sens opposé, d'où une expression de la forme :

$$-c_f \vec{w} |\vec{w}| \Delta x \Delta y$$

la loi de Chézy donne $c_f = g/C^2$; C = coefficient de Chézy.

La force de Coriolis est égale à :

$$(-2 \vec{\Omega} \wedge \vec{w}) h \Delta x \Delta y$$

$\vec{\Omega}$ = vecteur rotation de la terre.

Soit $\omega \sin \lambda$ sa projection sur l'axe \vec{z} ; λ = latitude du lieu :

$$(-2 \vec{\Omega} \wedge \vec{w}) h \Delta x \Delta y = \begin{cases} 2 \omega v h \sin \lambda \Delta x \Delta y & \text{sur } \vec{x} \\ -2 \omega u h \sin \lambda \Delta x \Delta y & \text{sur } \vec{y} \end{cases}$$

on notera par F le coefficient $2 \omega \sin \lambda$.

Posons :

$$\vec{W} = \begin{cases} U = uh \\ V = vh \end{cases}$$

les équations obtenues sont les suivantes :

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \tag{I}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (U^2/h) + \frac{\partial}{\partial x} (UV/h) + gh \frac{\partial Z}{\partial x} = -g \frac{U \sqrt{U^2 + V^2}}{C^2 h^2} + FV \tag{II}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (UV/h) + \frac{\partial}{\partial y} (V^2/h) + gh \frac{\partial Z}{\partial y} = -g \frac{V \sqrt{U^2 + V^2}}{C^2 h^2} - FU \tag{III}$$

en variables uvh :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (uh) + \frac{\partial}{\partial y} (vh) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} = -g \frac{u \sqrt{u^2 + v^2}}{C^2 h} - g \frac{\partial Z_f}{\partial x} + Fv \tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} = -g \frac{v \sqrt{u^2 + v^2}}{C^2 h} - g \frac{\partial Z_f}{\partial y} - Fu \tag{3}$$

On peut vérifier que :

$$\begin{aligned} (I) &\equiv (1); \\ (II) &\equiv h \times (2) + u \times (1); \\ (III) &\equiv h \times (3) + v \times (1). \end{aligned}$$

Différentes formes des équations

Les équations obtenues comportent des termes non linéaires.

a) Les termes convectifs :

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &\text{ dans (2)} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &\text{ dans (3)} \end{aligned} \right\} \vec{w} \text{ grad } \vec{w}$$

b) Les termes de frottement :

$$\left. \begin{aligned} -g \frac{u \sqrt{u^2 + v^2}}{C^2 h} \\ -g \frac{v \sqrt{u^2 + v^2}}{C^2 h} \end{aligned} \right\} -g \frac{\vec{w} |\vec{w}|}{C^2 h}$$

Nous allons voir sous quelles hypothèses on peut linéariser ces termes.

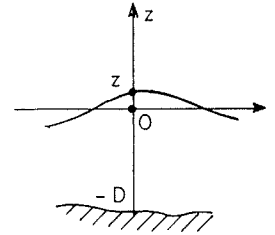
Equations linéaires.

Prenons comme zéro des cotes le niveau moyen de la surface libre. Soit D la profondeur à partir de ce niveau moyen :

$$Z_f = -D$$

alors :

$$h = Z + D$$



On suppose que Z, u, v et leurs dérivées sont petits et on néglige les termes quadratiques (donc en particulier les termes convectifs).

$$uh = u(Z + D) \approx uD$$

$$vh = v(Z + D) \approx vD$$

les termes de frottement :

$$\begin{aligned} \vec{w} |\vec{w}| / (Z + D) &= \frac{\vec{w} |\vec{w}|}{D} \left(1 + \frac{Z}{D}\right)^{-1} \\ &\approx \frac{\vec{w} |\vec{w}|}{D} \left(1 - \frac{Z}{D}\right) \approx \frac{\vec{w} |\vec{w}|}{D} \end{aligned}$$

On représentera le terme $g|\vec{W}|/C^2D$ par un coefficient K et on posera encore :

$$U = uD \quad V = vD$$

d'où les équations linéaires :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0 & (I a) \\ \frac{\partial U}{\partial t} + gD \frac{\partial Z}{\partial x} &= -KU/D + FV & (II a) \\ \frac{\partial V}{\partial t} + gD \frac{\partial Z}{\partial y} &= -KV/D - FU & (III a) \end{aligned}$$

Elles seront utilisables dans les zones maritimes où la profondeur est importante relativement au marnage, et lorsque les déplacements des colonnes d'eau sont petits devant les dimensions de la région étudiée.

Equations « délinéarisées ».

Lorsqu'on se rapproche du littoral, on est amené à considérer des équations dans lesquelles seuls les termes convectifs sont négligés, car ces termes représentent l'accélération subie par une colonne d'eau lors d'une variation de la section de passage. Les variations des fonds sont en général suffisamment petites à l'échelle considérée pour qu'on puisse négliger ces accélérations. D'où des équations dites « délinéarisées », qui s'obtiennent à partir des précédentes en remplaçant D par $Z + D$, et K par $g|\vec{W}|/C^2D$; on retrouve bien les équations (I) (II) (III) privées des termes convectifs.

Equations non linéaires.

Les équations non linéaires enfin, sont celles que nous avons établies. Leur résolution numérique est beaucoup plus délicate, mais elle est intéressante dans le voisinage du littoral, ne serait-ce que pour donner une idée de l'erreur commise en n'utilisant que les équations linéaires ou délinéarisées.

Théorie des caractéristiques

On désire résoudre le système des équations (I) (II) (III) dans un ouvert connexe \mathcal{O} de l'espace $\{xyt\}$; on se contentera d'un domaine cylindrique :

$$\mathcal{O} = \Omega \times [0, T]$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est la région géographique étudiée;
 $[0, T]$ est l'intervalle de temps durant lequel on désire connaître la solution.

Cette solution dépend évidemment des conditions imposées aux inconnues sur la frontière de \mathcal{O} .

Γ étant la frontière de Ω , les conditions imposées sur Ω à $t = 0$ sont les conditions initiales; les conditions sur $\Gamma \times [0, T]$ sont les conditions aux limites. On verra que sur Ω , à $t = T$, il n'y a rien à imposer.

Pour savoir quelles sont ces conditions à imposer, on peut se poser le problème suivant : les valeurs des inconnues, qui sont ici Z, U, V , étant données sur une surface (S) de l'espace $[xyt]$, à quelle condition peut-on en déduire une solution des équations au voisinage de cette surface? C'est le problème de Cauchy.

Pour étudier ce problème, nous allons mettre les équations (I) (II) (III) sous la forme suivante :

$$\partial Z / \partial t + \partial U / \partial x + \partial V / \partial y = 0$$

$$\begin{aligned} \partial U / \partial t + 2u \partial U / \partial x + v \partial U / \partial y \\ + u \partial V / \partial y - (u^2 - gh) \partial Z / \partial x \\ - uv \partial Z / \partial y = X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial V / \partial t + u \partial V / \partial x + v \partial U / \partial x \\ + 2v \partial V / \partial y - uv \partial Z / \partial x \\ - (v^2 - gh) \partial Z / \partial y = Y \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} X &= -gU \sqrt{U^2 + V^2} / C^2 h^2 + FV + u^2 D_x + uv D_y \\ Y &= -gV \sqrt{U^2 + V^2} / C^2 h^2 - FU + uv D_x + v^2 D_y \end{aligned}$$

Soit le vecteur :

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} Z \\ U \\ V \end{pmatrix}$$

Le système s'écrit :

$$\begin{aligned} \partial \vec{R} / \partial t + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ gh - u^2 & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{pmatrix} \partial \vec{R} / \partial x \\ + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ gh - v^2 & 0 & 2v \end{pmatrix} \partial \vec{R} / \partial y = \begin{pmatrix} 0 \\ X \\ Y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

soit :

$$\partial \vec{R} / \partial t + A_x \partial \vec{R} / \partial x + A_y \partial \vec{R} / \partial y = \vec{B} \quad (4)$$

Considérons la surface (S) d'équation :

$$t = \varphi(x, y)$$

et supposons \vec{R} donné sur (S) :

$$\vec{R}(x, y, t) = \vec{R}[x, y, \varphi(x, y)] = \vec{R}_0(x, y) \quad (5)$$

on en déduit :

$$\partial \vec{R}_0 / \partial x = \partial \vec{R} / \partial x + \partial \varphi / \partial x \cdot \partial \vec{R} / \partial t \quad (6)$$

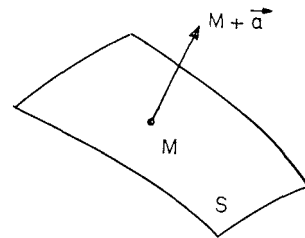
$$\partial \vec{R}_0 / \partial y = \partial \vec{R} / \partial y + \partial \varphi / \partial y \cdot \partial \vec{R} / \partial t \quad (7)$$

Le problème est le suivant : pour tout point M de la surface (S), $\vec{R}(M)$ est donné; soit le vecteur :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta t \end{pmatrix}$$

la formule de Taylor en M s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{R}(M + \vec{a}) &= \vec{R}(M) \\ &+ \Delta x \partial \vec{R} / \partial x (M) + \Delta y \partial \vec{R} / \partial y (M) \\ &+ \Delta t \partial \vec{R} / \partial t (M) + 0(|\vec{a}|^2) \end{aligned}$$



\vec{R} , vérifiant les équations (4) et (5), sera déterminé au premier ordre au voisinage de (S) si l'on peut déduire de ces équations les valeurs de $\partial \vec{R} / \partial x (M)$, $\partial \vec{R} / \partial y (M)$ et $\partial \vec{R} / \partial t (M)$ pour tout M appartenant à (S).

Il s'agit donc de résoudre le système (4) (6) (7) où les inconnues sont :

$$\partial \vec{R} / \partial x \quad \partial \vec{R} / \partial y \quad \text{et} \quad \partial \vec{R} / \partial t$$

pour cela, éliminons $\partial \vec{R} / \partial x$ et $\partial \vec{R} / \partial y$; il vient :

$$\begin{aligned} (I - A_x \partial \varphi / \partial x - A_y \partial \varphi / \partial y) \partial \vec{R} / \partial t \\ = \vec{B} - (A_x) \partial \vec{R}_0 / \partial x - (A_y) \partial \vec{R}_0 / \partial y \quad (8) \end{aligned}$$

où I désigne la matrice unité. Nous poserons :

$$A \equiv I - A_x \partial \varphi / \partial x - A_y \partial \varphi / \partial y$$

$\partial \vec{R} / \partial t$ n'est déterminé que si $\det. A \neq 0$.

Ce déterminant est appelé déterminant caractéristique.

Remarquons que cette condition est réalisée lorsque la surface (S) est $t = 0$.

Voyons quelle est la situation lorsque ce déterminant est nul; signalons au passage que l'étude de ce cas particulier mérite d'être approfondie, car elle nous conduira à une méthode de résolution.

Posons :

$$\partial\varphi/\partial x = p \quad \partial\varphi/\partial y = q$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -p & -q \\ (u^2 - gh)p + uvq & 1 - 2up & -uq \\ uvp + (v^2 - gh)q & -vp & 1 - up - 2vq \end{vmatrix} = 0$$

ou :

$$\begin{vmatrix} 1 & -p & -q \\ -u + (u^2 - gh)p + uvq & 1 - up - vq & 0 \\ -v + uvp + (v^2 - gh)q & 0 & 1 - up - vq \end{vmatrix} = 0$$

$$(1 - up - vq) [(1 - up - vq)^2 - gh(p^2 + q^2)] = 0$$

d'où :

$$(1 - up - vq)^2 - gh(p^2 + q^2) = 0 \quad (9)$$

$$1 - up - vq = 0 \quad (10)$$

Chacune de ces relations lie les cosinus directeurs de la normale à (S); elle définit donc une famille de surfaces (S) qui est dite première ou deuxième famille de surfaces caractéristiques.

Comme nous effectuons une étude locale, nous allons remplacer les surfaces caractéristiques par leurs plans tangents au point considéré que nous prendrons comme origine des coordonnées; l'équation des plans tangents est donc :

$$t = px + qy$$

Cherchons l'enveloppe de cette famille de plans.

Première famille de surfaces caractéristiques.

Posons :

$$p = \rho \cos \theta \quad q = \rho \sin \theta$$

$$(9) \Rightarrow 1 - 2\rho(u \cos \theta + v \sin \theta) + \rho^2 [(u \cos \theta + v \sin \theta)^2 - gh] = 0$$

d'où :

$$\rho = 1/(u \cos \theta + v \sin \theta - \varepsilon \sqrt{gh}); \quad \varepsilon = \pm 1$$

on peut fixer $\varepsilon = -1$ car changer ε en $-\varepsilon$ revient à changer θ en $\theta + \pi$.

L'équation de la famille de plans dépendant d'un paramètre θ peut s'écrire :

$$t(u \cos \theta + v \sin \theta + \sqrt{gh}) = x \cos \theta + y \sin \theta$$

ou encore :

$$\cos \theta (x - ut) + \sin \theta (y - vt) = \sqrt{gh} t$$

Dérivons par rapport à θ :

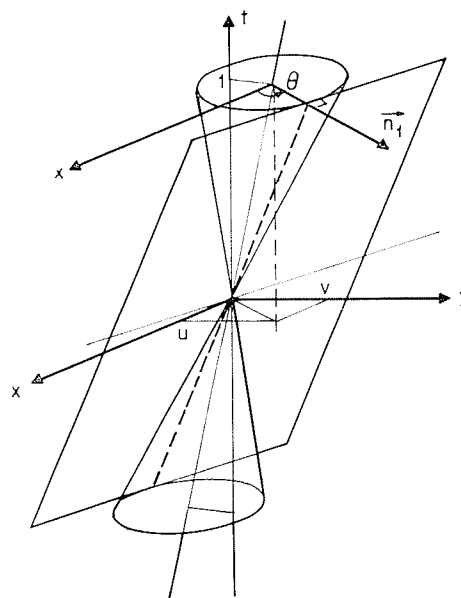
$$-\sin \theta (x - ut) + \cos \theta (y - vt) = 0$$

éliminons θ entre ces deux dernières relations, il vient :

$$(x - ut)^2 + (y - vt)^2 = ght^2 \quad (11)$$

Cette enveloppe est un cône. Si nous le coupons par le plan $t = 1$ nous obtenons le cercle :

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 = gh$$



centré au point $(1, u, v)$ ce qui permet de paramétrer le cône sous la forme :

$$\begin{aligned} x &= (u + \sqrt{gh} \cos \theta) t \\ y &= (v + \sqrt{gh} \sin \theta) t \\ t &= t \end{aligned} \quad (11')$$

θ est l'angle formé avec x par la projection sur le plan $\{xy\}$ de la normale extérieure au cône.

Une génératrice du cône est appelée une bicaractéristique.

Deuxième famille de surfaces caractéristiques.

$$(10) \Rightarrow q = (1 - up)/v$$

d'où l'équation des plans :

$$t = px + (1 - up) y/v$$

Il est clair que tous ces plans contiennent le vecteur :

$$\lambda u \quad \lambda v \quad \lambda$$

La deuxième famille est donc constituée localement des plans pivotant autour de ce vecteur qui n'est autre que le lieu des centres des cercles, sections horizontales du cône enveloppe de la première famille.

Relations caractéristiques.

Les surfaces que nous venons de définir sont celles sur lesquelles le déterminant caractéristique est nul. Nous sommes dans le cas où le problème de Cauchy est soit impossible, soit indéterminé.

L'indétermination a lieu lorsque dans le système (8) une des équations est une combinaison linéaire des deux autres.

Autrement dit, si nous écrivons (8) sous la forme:

$$(A) \vec{X} = \vec{Y}$$

il existe un vecteur ligne \vec{l} tel que :

$$\vec{l}(A) = 0 \quad \text{et} \quad \vec{l}\vec{Y} = 0$$

$\vec{l}(A) = 0$ permet de déterminer le vecteur \vec{l} .

$$\vec{l}\vec{Y} = 0 \Rightarrow \vec{l} [\vec{B} - (A_x) \partial\vec{R}_0/\partial x - (A_y) \partial\vec{R}_0/\partial y] = 0$$

en tenant compte de (6) et (7).

$$\vec{l} \{ \vec{B} - (A_x) \partial\vec{R}/\partial x - (A_y) \partial\vec{R}/\partial y - [(A_x) p + (A_y) q] \partial\vec{R}/\partial t \} = 0$$

Relation valable sur une surface caractéristique de la première famille.

Calcul de $\vec{l} = (l_1, l_2, l_3)$:

$$(l_1, l_2, l_3) \begin{bmatrix} 1 & -p & -q \\ (u^2 - gh) p + uvq & 1 - 2 up - vq & -uq \\ uv p + (v^2 - gh) q & -vp & 1 - up - 2 vq \end{bmatrix} = 0$$

En prenant :

$$p = \rho \cos \theta \quad q = \rho \sin \theta$$

avec :

$$\rho = 1/(u \cos \theta + v \sin \theta + \sqrt{gh})$$

on obtient :

$$\vec{l} = (\sqrt{gh} - u \cos \theta - v \sin \theta, \cos \theta, \sin \theta)$$

d'où la relation caractéristique :

$$\begin{aligned} & (\sqrt{gh} - u \cos \theta - v \sin \theta) [\partial Z/\partial t + \partial U/\partial x + \partial V/\partial y] \\ & + \cos \theta [\partial U/\partial t + 2 u \partial V/\partial x + v \partial U/\partial y \\ & + u \partial V/\partial y - (u^2 - gh) \partial Z/\partial x - uv \partial Z/\partial y] \\ & + \sin \theta [\partial V/\partial t + u \partial V/\partial x + v \partial U/\partial x \\ & + 2 v \partial V/\partial y - uv \partial Z/\partial x \\ & - (v^2 - gh) \partial Z/\partial y] \\ & = X \cos \theta + Y \sin \theta \end{aligned}$$

(13)

or :

$$\vec{l}(A) = 0 \Rightarrow \vec{l}(I) = \vec{l} [(A_x) p + (A_y) q]$$

d'où :

$$\vec{l} [\partial\vec{R}/\partial t + (A_x) \partial\vec{R}/\partial x + (A_y) \partial\vec{R}/\partial y - \vec{B}] = 0 \quad (12)$$

Cette relation est une combinaison linéaire des équations (4).

A chaque famille de caractéristiques correspond un vecteur l et la relation caractéristique correspondante.

En faisant apparaître les opérateurs :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (u + \sqrt{gh} \cos \theta) \frac{\partial}{\partial x} + (v + \sqrt{gh} \sin \theta) \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{d}{d\theta} = -\sqrt{gh} \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{gh} \cos \theta \frac{\partial}{\partial y}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} & (\sqrt{gh} - u \cos \theta - v \sin \theta) \frac{dZ}{dt} \\ & + (u \sin \theta - v \cos \theta) \frac{dZ}{d\theta} \\ & + \cos \theta \frac{dU}{dt} + \sin \theta \frac{dV}{dt} \\ & - \sin \theta \frac{dU}{d\theta} + \cos \theta \frac{dV}{d\theta} = X \cos \theta + Y \sin \theta \end{aligned}$$

(13')

Relation valable sur la deuxième famille de caractéristiques.

Etant donné la relation (10),

$$1 - up - vq = 0$$

$\vec{l}(A) = 0$ s'écrit :

$$(l_1, l_2, l_3) \begin{bmatrix} 1 & -p & -q \\ u - gh p & -up & -uq \\ v - gh q & -vp & -vq \end{bmatrix} = 0$$

d'où :

$$\vec{l} = (uq - vp, -q, p)$$

Le plan caractéristique est défini par le vecteur $(1, u, v)$ et par son intersection avec le plan $t = 1$; cette intersection étant définie par l'angle θ que fait sa normale avec \vec{x} , a pour composantes $(0, -\sin \theta, \cos \theta)$. L'équation du plan tangent s'écrit alors :

$$\begin{vmatrix} t & x & y \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \\ 1 & u & v \end{vmatrix} = 0$$

soit :

$$-t(v \sin \theta + u \cos \theta) + x \cos \theta + y \sin \theta = 0$$

la normale à ce plan a pour composantes :

$$\begin{vmatrix} -v \sin \theta - u \cos \theta \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{vmatrix}$$

et l'on a :

$$\frac{-1}{-v \sin \theta - u \cos \theta} = \frac{p}{\cos \theta} = \frac{q}{\sin \theta} = \lambda$$

d'où :

$$p = \lambda \cos \theta \quad q = \lambda \sin \theta$$

$$\vec{l} = (u \sin \theta - v \cos \theta, -\sin \theta, \cos \theta)$$

et la relation caractéristique :

$$\begin{aligned}
 & (u \sin \theta - v \cos \theta) [\partial Z/\partial t + \partial U/\partial x + \partial V/\partial y] \\
 & - \sin \theta [\partial U/\partial t + 2u \partial U/\partial x + v \partial U/\partial y \\
 & + u \partial V/\partial y \\
 & - (u^2 - gh) \partial Z/\partial x - uv \partial Z/\partial y] \\
 & + \cos \theta [\partial V/\partial t + u \partial V/\partial x + v \partial U/\partial x \\
 & + 2v \partial V/\partial y \\
 & - uv \partial Z/\partial x - (v^2 - gh) \partial Z/\partial y] \\
 & = -X \sin \theta + Y \cos \theta
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

En faisant apparaître les opérateurs :

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta}{\delta t} &= \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \\
 \frac{d}{d\theta} &= -\sqrt{gh} \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{gh} \cos \theta \frac{\partial}{\partial y}
 \end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
 & (u \sin \theta - v \cos \theta) \frac{\delta Z}{\delta t} + \sqrt{gh} \frac{dZ}{d\theta} \\
 & - \sin \theta \frac{\delta U}{\delta t} + \cos \theta \frac{\delta V}{\delta t} = -X \sin \theta + Y \cos \theta
 \end{aligned}
 \tag{14'}$$

Interprétation géométrique.

En transformant les relations caractéristiques obtenues, on a pu mettre en évidence qu'elles ne font intervenir que des dérivées intérieures sur la surface caractéristique correspondante; en particulier, des dérivées le long de la bicaractéristique :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + (u + \sqrt{gh} \cos \theta) \frac{\partial}{\partial x} \\
 &+ (v + \sqrt{gh} \sin \theta) \frac{\partial}{\partial y} \text{ pour la famille 1}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\delta}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \text{ pour la famille 2}$$

et des dérivées transversales :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\theta} &= -\sqrt{gh} \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{gh} \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \\
 &\text{pour les deux familles}
 \end{aligned}$$

Un point de l'espace xyt est donc lié par les relations caractéristiques à ses voisins appartenant aux surfaces caractéristiques passant par ce point. Il est donc lié à l'enveloppe de ces surfaces.

Autrement dit, une perturbation en un point (x_0, y_0) à l'instant t_0 va influencer les points du cône caractéristique de sommet $x_0 y_0 t_0$ pour $t > t_0$. Ces points, à leur tour, jouent le rôle de perturbateurs et l'on voit ainsi que la région intérieure au cône caractéristique futur sera perturbée. Cette région est appelée région d'influence du point $x_0 y_0 t_0$.

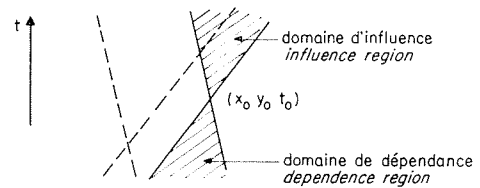
Le cône caractéristique est donc la représentation

mathématique des « ronds dans l'eau » qui vont en s'élargissant au cours du temps.

On peut remarquer que si l'eau est animée d'une vitesse non négligeable, on peut voir les « ronds » se déplacer avec le courant. Ceci illustre le fait que le lieu des centres des sections par des plans parallèles à $\{x, y\}$ est l'enveloppe des vecteurs $(u, v, 1)$, c'est-à-dire la trajectoire de la particule. Le rayon du cercle croît avec la vitesse \sqrt{gh} qui est la célérité en eau calme.

De même que le point $x_0 y_0 t_0$ influence les points situés dans son cône caractéristique futur, ce point est lui-même influencé par tous ceux qui se trouvent dans son cône caractéristique passé; c'est pourquoi cette région est appelée « domaine de dépendance du point ».

L'état du point étudié ne dépend que de celui de son domaine de dépendance; en effet, les points qui en sont extérieurs ont eux-mêmes une région d'influence qui ne contient pas ce point.



Application aux équations linéaires.

Pour les équations linéaires, l'étude des caractéristiques permet d'établir les résultats suivants :

Les surfaces de la première famille sont tangentes aux plans :

$$x \cos \theta + y \sin \theta - t \sqrt{gD} = 0$$

qui ont pour enveloppe un cône dont l'axe est colinéaire à \vec{t} :

$$x^2 + y^2 = gDt^2 \tag{15}$$

Les surfaces de la seconde famille ont pour enveloppe l'axe de ce cône.

Les relations caractéristiques sont : Sur les plans de la première famille :

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{gD} (\partial Z/\partial t + \partial U/\partial x + \partial V/\partial y) \\
 & + \cos \theta (\partial U/\partial t + gD \partial Z/\partial x) \\
 & + \sin \theta (\partial V/\partial t + gD \partial Z/\partial y) \\
 & = \cos \theta (-KU/D + FV) \\
 & + \sin \theta (-KV/D - FU)
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Sur les plans de la deuxième famille :

$$\begin{aligned}
 & - \sin \theta (\partial U/\partial t + gD \partial Z/\partial x) \\
 & + \cos \theta (\partial V/\partial t + gD \partial Z/\partial y) \\
 & = - \sin \theta (-KU/D + FV) \\
 & + \cos \theta (-KV/D - FU)
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Ou sous forme vectorielle :

$$\begin{aligned} & \sqrt{gD} (\partial Z / \partial t + \operatorname{div} \vec{W}) \\ & + \vec{n}_1 \cdot \partial \vec{W} / \partial t + gD \vec{n}_1 \cdot \operatorname{grad} Z \\ & = [\vec{Fk} \wedge \vec{W} - K\vec{W}/D] \cdot \vec{n}_1 \\ \vec{n}_2 \cdot [\partial \vec{W} / \partial t + gD \operatorname{grad} Z] \\ & = \vec{n}_2 \cdot [\vec{Fk} \wedge \vec{W} - K\vec{W}/D] \end{aligned}$$

avec :

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \vec{k} = \text{vecteur unitaire de l'axe vertical } \vec{z}$$

En utilisant les opérateurs :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sqrt{gD} \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} \right); \quad \frac{\delta}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{d}{d\theta} = \sqrt{gD} \left(-\sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

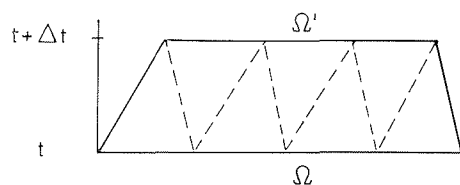
on peut écrire :

$$\begin{aligned} & \sqrt{gD} dZ/dt + \cos \theta dU/dt + \sin \theta dV/dt \\ & - \sin \theta dU/d\theta + \cos \theta dV/d\theta \\ & = \cos \theta [-KU/D + FV] \\ & + \sin \theta [-KV/D - FU] \\ & - \sin \theta \delta U/\delta t + \cos \theta \delta V/\delta t + \sqrt{gD} dZ/d\theta \\ & = -\sin \theta [-KU/D + FV] \\ & + \cos \theta [-KV/D - FU] \end{aligned}$$

(16')
(17')

**Conditions initiales.
Conditions aux limites**

Le vecteur inconnu $\vec{R} = (Z, U, V)$ étant donné sur la surface Ω à $t = 0$; soit \vec{R}_0 cet état initial. Les points qui seront déterminés, à l'aide de \vec{R}_0 , à $t + \Delta t$ sont ceux dont le domaine de dépendance est contenu dans l'ensemble $\Omega \times [t, t + \Delta t]$;



En revenant à l'espace x, y , ce sont les points d'un ensemble Ω' plus petit que Ω .

Si l'on s'intéresse à l'état de la région Ω à l'in-

stant $T > 0$, on voit qu'il est nécessaire d'introduire à chaque instant des données sur le contour Γ de Ω .

Par contre l'état $\vec{R}(x, y, T)$, $(x, y) \in \Omega$ est entièrement déterminé par les conditions initiales et aux limites.

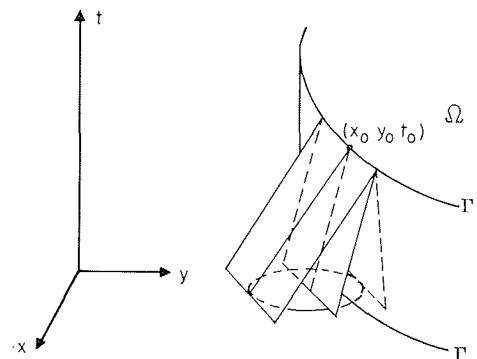
La présence des termes de frottement dans les équations entraîne que l'influence des conditions initiales diminue au cours du temps; ceci permet de choisir ces conditions arbitrairement (par exemple le repos) si l'on ne considère les résultats du calcul comme valables qu'au bout d'un certain temps. Dans le cas où le domaine comporte peu de limites réfléchissantes, les conditions aux limites supplantent rapidement les conditions initiales.

Le traitement des conditions aux limites est plus délicat si l'on veut que le problème soit « bien posé ».

Γ étant le contour de Ω , considérons la surface $\Gamma \times [0, T]$ et en chaque point (x_0, y_0, t_0) de cette surface, les surfaces caractéristiques s'appuyant sur Γ et contenues dans le demi-espace passé ($t < t_0$).

La théorie des caractéristiques montre que le nombre minimal de conditions aux limites à imposer en ce point est égal au nombre de demi-plans caractéristiques (localement confondus avec les surfaces caractéristiques) extérieurs au volume :

$$\Omega \times [0, T]$$



Il y aura 0, 1, 2 ou 3 conditions à imposer suivant les cas :

Soit \vec{n} la normale extérieure à Γ ; éliminons le cas de 0 ou 3 conditions à imposer qui ne peut se produire que pour un écoulement torrentiel; en effet :

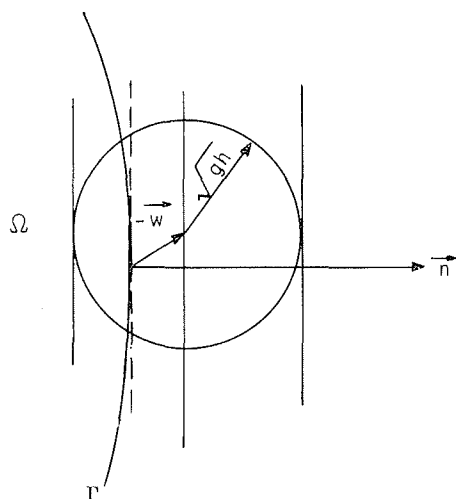
$$\sqrt{gh} < |\vec{w} \cdot \vec{n}| \Rightarrow \sqrt{gh} < |\vec{w}|$$

Dans les autres cas, pour savoir s'il faut imposer une ou deux conditions, il faut regarder la position du plan de la deuxième famille s'appuyant sur Γ ; elle est donnée par le signe de $-\vec{w} \cdot \vec{n}$.

Si $-\vec{w} \cdot \vec{n}$ est positif, c'est-à-dire si le courant pénètre dans Ω , on doit imposer deux conditions sur Γ .

Si $-\vec{w} \cdot \vec{n}$ est négatif : courant sortant de Ω , il n'y a qu'une condition à imposer.

En ce qui concerne les conditions aux limites du problème linéaire (ou « délinéarisé »), les plans caractéristiques de la deuxième famille restant verticaux quel que soit le sens de l'écoulement, on n'a dans tous les cas qu'une seule condition à imposer.



Limitons-nous au cas du problème linéaire; les frontières que nous considérons sont de deux types :

a) les frontières littorales, où la condition imposée est une condition d'imperméabilité :

$$\vec{W}n = 0$$

b) les frontières maritimes ou perméables, sur lesquelles on peut se donner la cote ou le débit normal en fonction du temps ou une relation entre les trois inconnues.

Nous allons voir en effet que la théorie des caractéristiques permet d'introduire dans le modèle mathématique une onde incidente qui sera exprimée par une relation de la forme :

$$\alpha U + \beta V + \gamma Z = f(x, y, t)$$

Pour cela, étudions d'abord les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \partial Z / \partial t + \partial U / \partial x + \partial V / \partial y &= 0 \\ \partial U / \partial t + gD \partial Z / \partial x &= 0 \\ \partial V / \partial t + gD \partial Z / \partial y &= 0 \end{aligned}$$

la profondeur D étant supposée constante.

En éliminant U et V, on obtient l'équation d'onde :

$$\partial^2 Z / \partial t^2 - gD (\partial^2 Z / \partial x^2 + \partial^2 Z / \partial y^2) = 0$$

Cherchons une solution de la forme :

$$Z = \mathcal{R} \exp [i\omega t + iK(\alpha x + \beta y)]$$

c'est une onde plane se propageant dans la direction $\vec{\delta}$ définie par :

$$(\vec{x}, \vec{\delta}) = \varphi$$

avec :

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos \varphi & \beta &= \sin \varphi \\ \omega^2 - gDK^2 (\alpha^2 + \beta^2) &= 0 \\ K &= \pm \omega / \sqrt{gD} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z &= \mathcal{R} \exp \left[i\omega \left(t \pm \frac{\alpha x + \beta y}{\sqrt{gD}} \right) \right] \\ &= \cos \omega \left[t \pm \frac{\alpha x + \beta y}{\sqrt{gD}} \right] \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} Z &= A \cos \frac{\omega}{\sqrt{gD}} (\alpha x + \beta y + t \sqrt{gD}) \\ &+ B \cos \frac{\omega}{\sqrt{gD}} (\alpha x + \beta y - t \sqrt{gD}) \end{aligned}$$

Considérons maintenant le problème du point de vue des caractéristiques, la première famille de caractéristiques donne :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\sqrt{gD} Z + U \cos \theta + V \sin \theta] \\ + \frac{d}{d\theta} [-U \sin \theta + V \cos \theta] &= 0 \end{aligned}$$

avec les opérateurs d/dt et $d/d\theta$ qui ont été définis dans l'étude des caractéristiques :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sqrt{gD} \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{d}{d\theta} = \sqrt{gD} \left(-\sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \right) \end{cases}$$

Cherchons l'onde plane se propageant dans la direction $\vec{\delta}$, solution de ces équations. Si $\theta = \varphi$ l'opérateur $d/d\theta$ est identiquement nul, car c'est une dérivation dans la direction perpendiculaire à φ .

Il reste :

$$\frac{d}{dt} [U \cos \varphi + V \sin \varphi + \sqrt{gD} Z] = 0$$

sur le plan caractéristique d'équation :

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - \sqrt{gD} t = 0$$

d'où la relation :

$$\begin{aligned} U \cos \varphi + V \sin \varphi + \sqrt{gD} Z \\ = f(x \cos \varphi + y \sin \varphi - t \sqrt{gD}) \end{aligned}$$

de même si :

$$\theta = \varphi + \pi \quad d/d\theta = 0$$

d'où :

$$\frac{d}{dt} [-U \cos \varphi - V \sin \varphi + \sqrt{gD} Z] = 0$$

sur le plan caractéristique d'équation :

$$-x \cos \varphi - y \sin \varphi - \sqrt{gD} t = 0$$

et l'on a :

$$\begin{aligned} U \cos \varphi + V \sin \varphi - \sqrt{gD} Z \\ = g(x \cos \varphi + y \sin \varphi + t \sqrt{gD}) \end{aligned}$$

Des deux relations que nous venons d'obtenir, il résulte :

$$Z = \frac{1}{2\sqrt{gD}} [f(x \cos \varphi + y \sin \varphi - t\sqrt{gD}) - g(x \cos \varphi + y \sin \varphi + t\sqrt{gD})]$$

En comparant avec le résultat obtenu plus haut, on voit que l'on peut poser :

$$f(X) = 2 B \sqrt{gD} \cos(\omega X / \sqrt{gD})$$

$$g(X) = -2 A \sqrt{gD} \cos(\omega X / \sqrt{gD})$$

Revenons aux relations caractéristiques :

On peut dire que le plan caractéristique défini par $\theta = \varphi$ propage une onde incidente qui s'exprime par :

$$U \cos \varphi + V \sin \varphi + \sqrt{gD} Z$$

$$= 2 B \sqrt{gD} \cos \frac{\omega}{\sqrt{gD}} (x \cos \varphi + y \sin \varphi - t\sqrt{gD})$$

et que le plan défini par $\theta = \varphi + \pi$ propage l'onde réfléchié exprimé par :

$$U \cos \varphi + V \sin \varphi - \sqrt{gD} Z$$

$$= -2 A \sqrt{gD} \cos \frac{\omega}{\sqrt{gD}} (x \cos \varphi + y \sin \varphi + t\sqrt{gD})$$

Lorsqu'on voudra introduire une onde de marée dans le modèle mathématique sans rien supposer sur la réponse de ce modèle, on pourra imposer aux limites la relation d'onde incidente.

Schémas de résolution numérique

Nous n'allons pas calculer le vecteur $\vec{R}(xyt)$ en tout point de $\Omega \times [0, T]$, mais uniquement aux points de coordonnées $(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t)$; Δx , Δy et Δt étant donnés, on notera :

$$f_{ij}^n = f(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t)$$

et :

$$(i, j, n) = (i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t)$$

Les équations à résoudre sont approchées par des équations aux différences finies; par exemple, $\partial f / \partial x$ est approchée par :

$$\delta x f = (f_{i,j} - f_{i-1,j}) / \Delta x$$

ou :

$$\delta x f = (f_{i+1,j} - f_{i,j}) / \Delta x$$

Pour simplifier, on prendra :

$$\Delta x = \Delta y = \Delta s$$

Pour que cette approximation soit valable, il faut que le schéma numérique soit *consistant*, *convergent* et *stable*.

Consistance.

Le schéma est consistant si, en faisant tendre Δx , Δy et Δt vers 0 dans les équations aux différences finies, on retrouve bien les équations aux dérivées partielles du problème. Cette condition est respectée par la façon même dont on discrétise ces équations.

Convergence.

Lorsque les équations sont discrétisées, les dérivées $\partial / \partial t$ sont remplacées par des différences entre les valeurs des inconnues à l'étage $n\Delta t$ et à $(n+1)\Delta t$; à $t=0$ tout est donné, on peut donc en déduire les inconnues à Δt . Lorsque celles-ci sont calculées, on calcule de la même façon $2\Delta t$ et ainsi de suite.

On conçoit que, pour que ce procédé donne une solution proche de la solution réelle lorsqu'il est répété un très grand nombre de fois, il faut que la somme des erreurs faites à chaque pas en temps en remplaçant les équations réelles par des équations approchées reste bornée. Le schéma est dit convergent si la solution discrète calculée tend vers la solution réelle, quand Δt , Δx et Δy tendent vers zéro, dans un domaine $\Omega \times [0, T]$ donné.

Stabilité.

La stabilité est une notion voisine : la résolution du problème discret comportant uniquement des opérations numériques, on ne peut éviter, même dans les calculateurs les plus puissants, des erreurs d'arrondi. Le schéma est dit stable lorsque ces erreurs ne sont pas amplifiées par le calcul.

Citons le *théorème d'équivalence de Lax* :

Pour un problème aux valeurs initiales « bien posé », approché par des équations aux différences finies consistantes, la stabilité est une condition nécessaire et suffisante de convergence.

Les schémas que nous allons considérer sont explicites. C'est-à-dire que seules les dérivées en temps font intervenir les inconnues à l'étage $(n+1)\Delta t$; les dérivées spatiales ainsi que les divers coefficients sont évalués à l'étage $n\Delta t$.

Pour de tels schémas, la stabilité exige que le rapport $\Delta t / \Delta s$ ne dépasse pas une certaine valeur, qui dépend du schéma choisi et des équations. (Voir R. D. RICHTMYER, *Difference Methods for Initial Value Problems.*)

Schéma numérique déduit de la théorie des caractéristiques

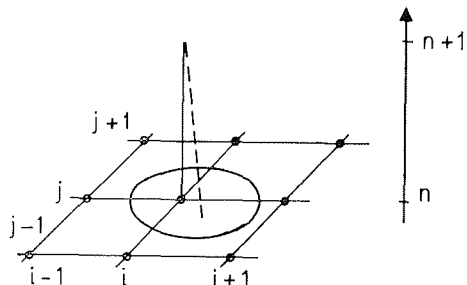
On suppose $\vec{R} = (Z, U, V)$ connu à l'étage $n\Delta t$ en tous les points $(i\Delta x, j\Delta y)$ du maillage rectangulaire qui recouvre Ω .

On veut calculer \vec{R} en ces mêmes points à l'étage $(n+1)\Delta t$.

Pour cela, on considère les cônes caractéristiques ayant leur sommet en ces points.

Calcul du point courant.

Prenons, pour fixer les idées, le calcul de $\vec{R}_{i,j}^{n+1}$ et le cône caractéristique de sommet $(i, j, n + 1)$; il coupe le plan $t = n\Delta t$ suivant un cercle (γ) de rayon $\sqrt{gh} \Delta t$ et de centre $(-u\Delta t, -v\Delta t)$ lorsque le point (i, j) est pris comme origine.



En toute rigueur, h, u et v sont le tirant d'eau et les composantes de la vitesse au point $(i, j, n + 1)$, mais Δt étant supposé petit, on admet que ces grandeurs varient peu d'un pas en temps à l'autre et on détermine la position du cercle à l'aide des valeurs de h, u, v données en (i, j, n) .

$\vec{R}_{i,j}^{n+1}$ est relié aux valeurs de \vec{R} en (i, j) et sur (γ) par les relations caractéristiques; les valeurs de \vec{R} sur (γ) sont obtenues par interpolation entre les points du maillage qui sont voisins.

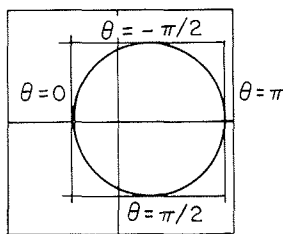
A chaque valeur de θ correspond une relation caractéristique pour chacune des deux familles. Or, on a trois inconnues à déterminer; il suffit donc de trois relations, d'où une infinité de possibilités.

Nous avons choisi de n'utiliser que les plans caractéristiques de la première famille, et parmi ceux-ci, ceux qui correspondent à :

$$\theta = 0, \pi \quad \text{et} \quad \pm \frac{\pi}{2}$$

Ils ont donc, dans le plan $n\Delta t$ des traces parallèles aux axes; les points de contact de ces traces avec le cercle (γ) sont les points où \vec{R} doit être évalué par interpolation lorsqu'on discrétise l'opérateur suivant la bicaractéristique :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (u + \sqrt{gh} \cos \theta) \frac{\partial}{\partial x} + (v + \sqrt{gh} \sin \theta) \frac{\partial}{\partial y}$$



L'opérateur transversal :

$$\frac{d}{d\theta} = -\sqrt{gh} \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{gh} \cos \theta \frac{\partial}{\partial y}$$

est pris entièrement dans le plan $n\Delta t$.

Pratiquement, il revient au même de prendre les relations caractéristiques sous leur forme primitive et de discrétiser directement les dérivées partielles

en prenant soin de prendre les dérivées du côté où se trouve le plan caractéristique considéré.

En notant :

$$T^x(f_{i,j}) = f_{i+1,j} \quad T^{-y}(f_{i,j}) = f_{i,j-1} \quad \text{etc.}$$

on approchera les dérivées spatiales de la façon indiquée dans le tableau ci-dessous :

	$\theta = 0$	$\theta = \pi$
$\partial/\partial x$	$(1 - T^{-x})/\Delta s$	$(T^x - 1)/\Delta s$
$\partial/\partial y$	$(T^y - T^{-y})/2 \Delta s$	
	$\theta = \frac{\pi}{2}$	$\theta = -\frac{\pi}{2}$
$\partial/\partial x$	$(T^x - T^{-x})/2 \Delta s$	
$\partial/\partial y$	$(1 - T^{-y})/\Delta s$	$(T^y - 1)/\Delta s$

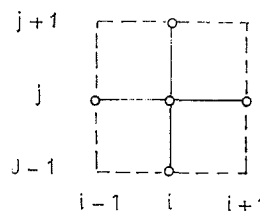
Désignons par $E(\theta)$ la relation caractéristique correspondant à l'angle θ .

On voit que : $E(0)$ et $E(\pi)$ donnent deux relations entre les inconnues Z_{ij}^{n+1} et U_{ij}^{n+1} .

$E(\pi/2)$ et $E[-(\pi/2)]$ donnent deux relations entre Z_{ij}^{n+1} et V_{ij}^{n+1} , d'où deux façons différentes d'évaluer Z_{ij}^{n+1} . On a pris la moyenne des deux résultats.

On peut remarquer que le calcul d'un point (i, j) fait intervenir les quatre points voisins :

$$(i + 1, j) \quad (i - 1, j) \quad (i, j + 1) \quad (i, j - 1)$$



Un point courant est donc tel que ses quatre voisins appartiennent à Ω ; les autres sont des points frontières et nécessitent un calcul spécial faisant intervenir les conditions aux limites.

Stabilité.

Nous avons appliqué à ce schéma la condition de stabilité :

$$\Delta t < \Delta s / (|\vec{w}| + \sqrt{gh})$$

pour les équations non linéaires, et :

$$\Delta t < \Delta s / \sqrt{gD}$$

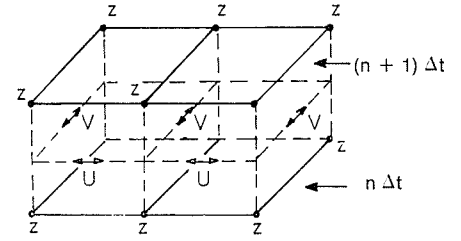
pour les équations linéaires ou « délinéarisées ».

Les équations linéaires ou « délinéarisées » peuvent également être résolues numériquement d'une façon très simple par un schéma en quinconce faisant intervenir des différences centrées :

Z est calculé aux points (i, j, n) ;

U est calculé aux points $(i + \frac{1}{2}, j, n + \frac{1}{2})$;

V est calculé aux points $(i, j + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$.



Calcul du point courant.

Les équations sont discrétisées de la manière suivante :

— équations de continuité :

$$(Z_{ij}^{n+1} - Z_{ij}^n)/\Delta t + (U_{i+(1/2),j}^{n+(1/2)} - U_{i-(1/2),j}^{n+(1/2)})/\Delta s + (V_{i,j+(1/2)}^{n+(1/2)} - V_{i,j-(1/2)}^{n+(1/2)})/\Delta s = 0$$

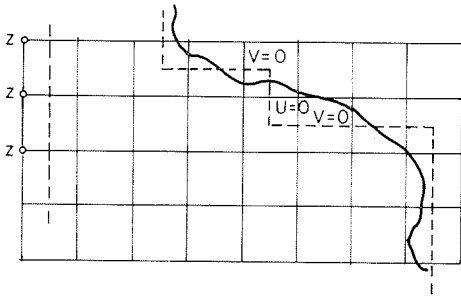
— équations dynamiques :

$$(U_{i+(1/2),j}^{n+(1/2)} - U_{i+(1/2),j}^{n-(1/2)})/\Delta t + g [(D_{i+1,j} + D_{i,j})/2] (Z_{i+1,j}^n - Z_{i,j}^n)/\Delta s = -KU_{i+(1/2),j}^{n-(1/2)}/[(D_{i+1,j} + D_{i,j})/2] + F (V_{i,j+(1/2)}^{n-(1/2)} + V_{i,j-(1/2)}^{n-(1/2)} + V_{i+1,j+(1/2)}^{n-(1/2)} + V_{i+1,j-(1/2)}^{n-(1/2)})/4$$

$$(V_{i,j+(1/2)}^{n+(1/2)} - V_{i,j+(1/2)}^{n-(1/2)})/\Delta t + g [(D_{i,j+1} + D_{i,j})/2] (Z_{i,j+1}^n - Z_{i,j}^n)/\Delta s = -KV_{i,j+(1/2)}^{n-(1/2)}/[(D_{i,j+1} + D_{i,j})/2] - F (U_{i+(1/2),j}^{n-(1/2)} + U_{i-(1/2),j}^{n-(1/2)} + U_{i+(1/2),j+1}^{n-(1/2)} + U_{i-(1/2),j+1}^{n-(1/2)})/4$$

Remarque sur le calcul des points frontières.

L'imperméabilité du littoral est représentée de façon très simple :



il suffit de remplacer la ligne cotière par une ligne brisée formée de segments parallèles aux axes du maillage et passant aux points où sont calculés U ou V; la condition imposée en ces points est alors $U = 0$ ou $V = 0$.

L'équation permettant de calculer z aux points voisins de la côte s'applique sans changement.

Sur les frontières perméables, on peut imposer soit Z, soit U, si la limite est parallèle à \vec{y} , soit V, si elle est parallèle à \vec{x} .

Par contre, l'utilisation de ce schéma complique passablement l'introduction d'une onde incidente dans le domaine Ω .

Stabilité.

Pour étudier la stabilité de ce schéma au sens de Von Neumann (1), nous cherchons une solution de la forme :

$$\exp i(kx + k'y)$$

posons :

$$\alpha = k\Delta x \quad \beta = k'\Delta y \quad \mu = \Delta t/\Delta s$$

Soit G la matrice d'amplification définie par :

$$\vec{R}^{n+1} = G\vec{R}^n$$

les valeurs propres de G doivent être, en module, inférieures à 1.

Prenons :

$$\vec{R}_{i,j}^n = \begin{pmatrix} Z_{i,j}^n \\ U_{i+(1/2),j}^{n-(1/2)} \\ V_{i,j+(1/2)}^{n-(1/2)} \end{pmatrix}$$

Le système des équations discrétisées s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 1 & \mu(1 - e^{-i\alpha}) & \mu(1 - e^{i\beta}) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{R}_{i,j}^{n+1} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \mu g D(e^{i\alpha} - 1) & -1 & 0 \\ \mu g D(e^{i\beta} - 1) & 0 & -1 \end{bmatrix} \vec{R}_{i,j}^n = \vec{B}_{i,j} \Delta t$$

soit :

$$(M) \vec{R}_{i,j}^{n+1} + (P) \vec{R}_{i,j}^n = \vec{B}_{i,j} \Delta t$$

M est inversible :

$$\vec{R}_{i,j}^{n-1} = -(M^{-1}P) \vec{R}_{i,j}^n + 0(\Delta t)$$

done :

$$G = -(M^{-1}P)$$

les valeurs propres de G sont les racines de l'équation :

$$\det(\lambda I - G) = 0$$

ou :

$$\det(\lambda M + P) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & \lambda\mu(1 - e^{-i\alpha}) & \lambda\mu(1 - e^{-i\beta}) \\ \mu g D (e^{i\beta} - 1) & \lambda - 1 & 0 \\ \mu g D (e^{i\beta} - 1) & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 1) [(\lambda - 1)^2 + 4 \lambda \mu^2 g D (\sin^2(\alpha/2) + \sin^2(\beta/2))] = 0$$

Posons :

$$\sin^2(\alpha/2) + \sin^2(\beta/2) = A \quad 0 \leq A \leq 2$$

$$\begin{aligned} \lambda - 1 = 0 & \quad \rightarrow \text{une racine réelle } \lambda = 1 \\ \lambda^2 - 2\lambda(1 - 2\mu^2 g D A) + 1 = 0 \end{aligned}$$

le produit des racines vaut 1, les racines réelles sont à éliminer; on aura :

$$|\lambda| = 1$$

si elles sont imaginaires conjuguées, c'est-à-dire si :

$$\begin{aligned} (1 - 2\mu^2 g D A)^2 - 1 &\leq 0 \\ -1 < 1 - 2\mu^2 g D A &\leq 1 \\ 0 \leq \mu^2 g D A &\leq 1 \\ \rightarrow \mu &\leq \frac{1}{\sqrt{g D A}} \leq \frac{1}{\sqrt{2} g D} \end{aligned}$$

Remarquons que ce critère de stabilité :

$$\Delta t < \Delta S / \sqrt{2} g D$$

est plus restrictif que celui du calcul par les caractéristiques.

Discussion

Président : M. HALBRONN

M. le Président félicite M. DAUBERT pour son exposé très clair et parfois teinté d'humour; il a particulièrement apprécié les questions que M. DAUBERT n'a pas hésité à poser à la fin de sa brillante conférence.

M. PREISSMANN signale avoir rencontré, dans ce genre de calcul, à peu près les mêmes difficultés que M. DAUBERT, en particulier sur la manière d'introduire les conditions aux limites propres au problème traité.

A titre d'exemple, il indique que, dans le cas où la force de Coriolis n'intervient pas et où le frottement est linéaire, les équations à mettre en jeu sont les suivantes :

$$\frac{du}{dt} = -g \frac{dz}{dt}$$

z étant le niveau de la surface libre.

Si l'on s'intéresse à une zone à l'intérieur d'un certain domaine, on aura à considérer le déplacement de points ayant, à l'entrée, un certain rotationnel qui tend ensuite à s'annuler. En définitive, le problème est de trouver un terme dont on puisse suivre le développement et qui tende vers zéro.

M. le Président, peu familier de ces problèmes, croit comprendre que M. DAUBERT pose la question de savoir si, effectivement, il y a certaines limites où il faut deux conditions, tandis que M. PREISSMANN affirme : « Il y a des limites où il faut deux conditions. »

M. DAUBERT confirme cette interprétation de la question, si l'on raisonne à partir des plans caractéristiques, par analogie avec les problèmes à une dimension, mais il est incapable de montrer que le problème est ainsi bien posé.

M. DAUBERT explique que l'équation d'évolution du rotationnel s'écrit :

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\Omega + \lambda}{h} \right) = \frac{1}{h} (\text{rot } F_t)_z \vec{e}_z$$

avec les notations suivantes :

$\vec{\Omega}$: rot V; F_t : forces de frottement; λ : projection sur la verticale de la rotation de la Terre.

Dans ce cas-là, on trouve que les particules finissent par avoir le rotationnel de la Terre. Au bout d'un temps assez long, on finit par avoir, dans le domaine, un rotationnel qui est celui de la Terre. Mais, quand certaines particules traversent le domaine sans que leur rotationnel ait le temps de s'aligner sur celui de la Terre, que se passe-t-il?

M. PREISSMANN pense qu'elles font partie du domaine, et précise que si le rotationnel obtenu finit par devenir celui de la Terre, on peut considérer ceci comme partie d'un domaine plus grand avec des limites fixes pour lesquelles le problème se pose moins.

Ceci est très intéressant. Eventuellement, on peut se demander dans quel sens changent les équations si on introduit ce rotationnel, et si cela n'entraînera pas certaines difficultés? La question est de savoir si le schéma de calcul est suffisamment bon pour que cette conservation se fasse.

M. DAUBERT tient à rassurer ceux qui font du modèle maritime; ce n'est pas parce qu'on s'est mis à faire des modèles mathématiques que l'on a créé des choses nouvelles. Dans le cas de modèles maritimes, où les tirants d'eau sont plus grands, la linéarisation est valable et la deuxième famille de caractéristiques est verticale. Il n'y a donc qu'un seul plan qui sort à l'extérieur et une seule condition suffit.

Abstract

Some aspects of near-horizontal two-dimensional unsteady flow and their application to estuaries

by A. Daubert * and Miss O. Graffe *

This paper deals with an investigation of near-horizontal free surface flows with a view to finding digital computer solutions for hydraulics problems in coastal waters.

PART I. — This sets up the equations for the problem, with the following basic assumptions:

Uniform velocity distribution along a vertical. Hydrostatic pressure distribution. Little bed and surface slope.

The unknowns to be determined in terms of space variables x, y and the time variable t are as follows:

h = depth of water u, v , = velocity components [Eq. (1), (2), (3)]

or: z : free surface level; U : uh ; V : vh [Eq. (I), (II), (III)].

PART II. — In this part, the above equations are made linear, which holds good if, taking the mean free surface level as the datum level, Z remains small compared to depth $D = -Zf$ (where Zf is the bed level) and if water column displacements are small compared to the considered area [Eq. (I a), (II a), (III a)].

Where these assumptions no longer apply in full, equations can be considered which are no longer purely linear, in which only the convection terms are ignored.

PART III. — In this part, the characteristics theory is applied to the quasi-linear system (I), (II), (III) in order to show up the boundary conditions required for the calculation, and to establish a numerical solution scheme. After stating the equations in form (I b), (II b), (III b) and then in matrix form (4), the condition is sought for which the unknown vector $\vec{R} = (Z, U, V)$ is determined near a surface (S) whose equation is $t = \Phi(x, y)$ and on which $\vec{R}(x, y, t) = \vec{R}[x, y, \Phi(x, y)] = \vec{R}_0(x, y)$ are given. This condition requires that the determinant of system (4), (6), (7) whose unknowns are $\partial\vec{R}/\partial x$, $\partial\vec{R}/\partial y$, $\partial\vec{R}/\partial t$ be different from zero.

$\partial\vec{R}/\partial x$ and $\partial\vec{R}/\partial y$ are eliminated for simplification and equation (8) is obtained, in which the determinant to be considered—called the ‘characteristic determinant’—is $\det A = \det (I - A_x p - A_y q)$, where $p = \partial\Phi/\partial x$ and $q = \partial\Phi/\partial y$. If this determinant is zero, relations (9) and (10) are obtained between the director cosines of the normal to surface (S). Surfaces (S) satisfying these relationships form two families of surfaces referred to as ‘characteristic surfaces’. It can be established by local inspection that tangent planes $t = px + qy$ to these surfaces at an assumed origin have the following envelope:

First family: the cone whose equation is (11) or (11’);

Second family: the straight line which is the locus of circular sections of the above cone through planes $t = \text{constant}$.

As the determinant of system (8) is zero the latter is impossible or indeterminate. It is indeterminate if the equations of (8) are not linearly independent: if (8) is written down in the form $\vec{A}\vec{X} = \vec{Y}$ there is a vector \vec{l} such that $\vec{l}\vec{A} = 0$ and $\vec{l}\vec{Y} = 0$. The result of this is (12), i.e. a linear combination of equations (4). Hence, this relationship is a compatibility condition which is satisfied by the unknowns on the characteristic surfaces.

Vector \vec{l} and the corresponding characteristic relationship are made explicit for each family of surfaces by the subsequent calculations; equations (13) and (14) emerge, which can be written as (13’) and (14’) in which only internal differentiation operators for the considered surface appear.

These relationships connect a space point (x, y, t) to neighbouring points belonging to characteristic surface passing through that point; the latter, therefore, is related to the envelope of these surfaces. The notions of a ‘domain of influence’ and ‘domain of dependence of a point’ emerge, i.e. the inside of the future (or past) characteristic cone having that point at its apex; the state of the point is determined by that of the points within its ‘domain of dependence’ and it enters into the determination of points belonging to its ‘domain of influence’.

The final paragraph of Part III gives the results of the application of the characteristics theory to the linear equations; for the first family, the envelope of the characteristic surfaces is a cone whose equation is (15), and it is the axis of this cone for the second family. The characteristic relationships are (16) and (17), or (16’) and (17’).

PART IV. — Discusses boundary conditions. System (I), (II), (III), is to be solved in a cylindrical domain $D = \Omega \times [0, T]$. As the unknown vector $\vec{R} = (Z, U, V)$, is given in Ω for $t = 0$ (initial conditions), it is necessary to introduce boundary conditions at each instant t_0 on the contour Γ of Ω . There are at least as many of these conditions as there are characteristic half-planes ($t < t_0$) originating from outside D and based on $\Gamma \times [0, T]$. Except for shooting flow, therefore, one or two conditions must be set, depending on whether the flow is from or into Ω .

If the equations to be solved are in linear form only one boundary condition is required, as follows:

Along the coast: an impermeability condition: $\vec{W}\vec{n} = 0$, where \vec{W} is a velocity vector and \vec{n} is normal to the shore.

Along maritime or permeable boundaries: normal discharge or water level vs. time, or a relationship between the three unknowns. In particular, this relationship can represent an incident wave.

PART V. — Two explicit numerical integration schemes are suggested. One is derived from the characteristics theory and relies on the relationships holding good on the characteristic surfaces of the first family (tangent planes to the cone) for $\theta = 0, +\pi, \pm(\pi/2)$. These relationships are approximated by finite difference equations concerning values of vector \vec{R} at the mesh points in a predetermined mesh network. This scheme is stable if the Courant-Friedrichs-Levy condition is satisfied. The second—more conventional—scheme relies on centred differences to calculate unknowns at staggered points but is governed by stricter stability conditions.

* E.D.F., Direction des Etudes et Recherches, 6, quai Watier - (78) Chatou.