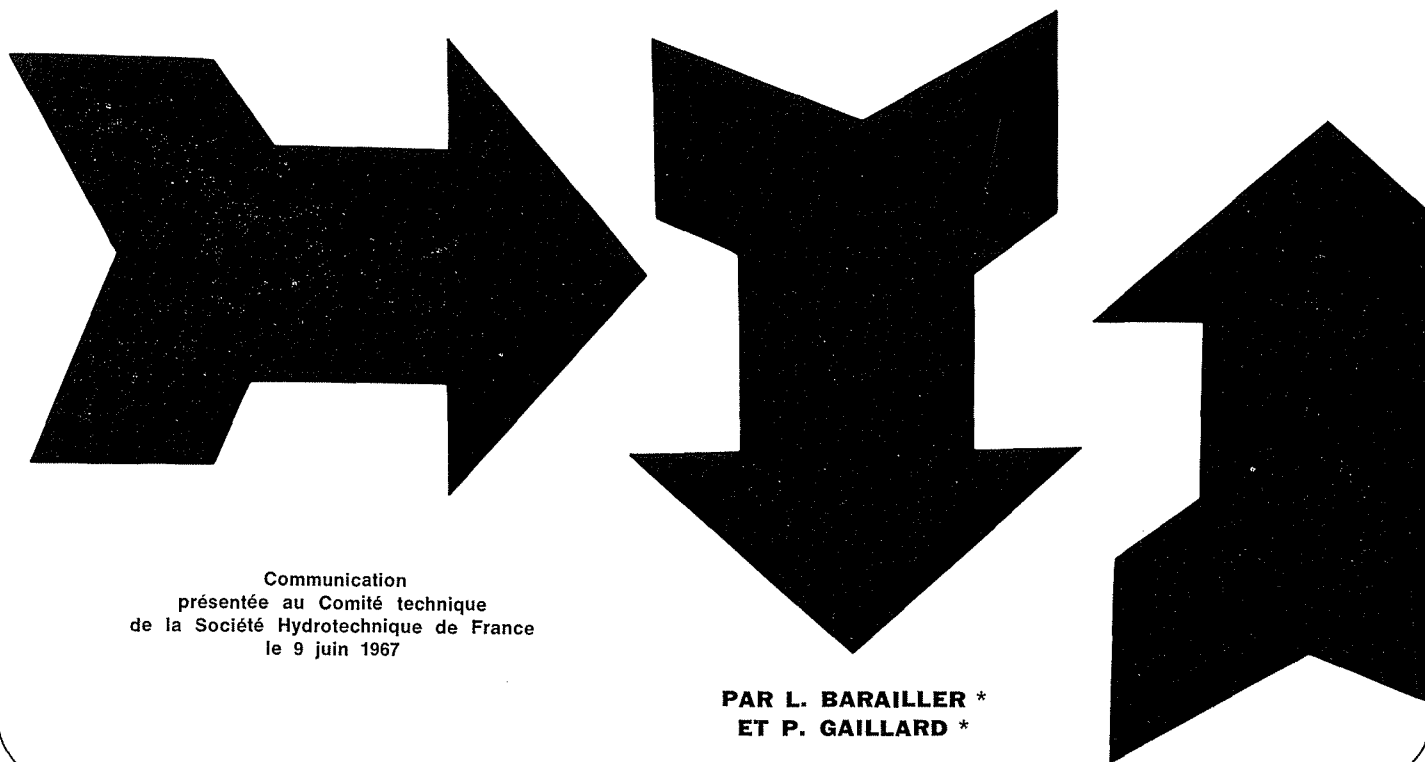


**ÉVOLUTION RÉCENTE
DES MODÈLES MATHÉMATIQUES D'AGITATION
DUE A LA HOULE.
CALCUL DE LA DIFFRACTION EN PROFONDEUR
NON UNIFORME**



Communication
présentée au Comité technique
de la Société Hydrotechnique de France
le 9 juin 1967

**PAR L. BARAILLER *
ET P. GAILLARD ***

Introduction

Depuis quelques années, la réfraction et la diffraction de la houle ont fait séparément l'objet de programmes de calcul sur ordinateur. Dans ce domaine, on peut citer les méthodes décrites par Griswold [1], Lepetit [2], pour la réfraction pure, Biéssel et Ranson [3], Daubert et Lebreton [4] pour la diffraction pure.

Un modèle mathématique prenant simultanément en considération ces deux phénomènes a été récemment mis au point à la SOGREAH pour l'étude des projets d'aménagements portuaires. Son principe ne repose pas sur des bases mathématiques rigoureuses, mais sur des considérations approchées relatives aux rayonnements d'énergie. Il constitue une extension à un domaine de profondeur non uniforme de la méthode préconisée en profondeur constante par MM. Biéssel et Ranson.

Dans ce rapport nous exposerons la méthode de calcul utilisée puis nous comparerons le modèle mathématique au modèle physique à échelle réduite sur deux exemples pratiques.

Cas d'un domaine de profondeur constante

Principe.

La dénivellation de la surface libre $\zeta(x, y, t)$ résultant de la propagation d'une houle monopéri-

dique de période T est, dans le cadre de la théorie linéaire, représentée sous forme complexe par :

$$\bar{\zeta}(x, y, t) = \mathcal{R} \{ \bar{\zeta}(x, y) \cdot e^{-ikt} \} \quad (1)$$

où : $k = \frac{2\pi}{T}$; $i = \sqrt{-1}$;

- t désigne la variable temporelle;
- x, y les coordonnées spatiales dans le plan de la surface libre au repos;
- $\bar{\zeta}$ une variable complexe de module égal à l'amplitude locale de la houle et d'argument égal au déphasage local de celle-ci par rapport à un point de référence arbitraire.

Etant donné un domaine (D) limité par une courbe quelconque Γ , l'agitation de la houle en un point O intérieur à ce domaine est explicitée au moyen de la formule de Kirchoff faisant intervenir la deuxième fonction de Green :

$$\zeta_0 = \frac{1}{4i} \int_{\Gamma} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial n} G_2(OM) ds \quad (2)$$

où : ds désigne la longueur d'un élément du contour Γ centré sur le point M;

$\partial \bar{\zeta} / \partial n$ est la valeur en M de la dérivée normale de $\bar{\zeta}(x, y)$ suivant la normale intérieure à Γ .

* SOGREAH.

La fonction $G_2(OM)$ dépend de la configuration du domaine (D) et prend, dans le cas particulier d'un demi-plan, la forme :

$$G_2(OM) = 2 H_0^{(1)}(mr) \quad (3)$$

où $H_0^{(1)}(x)$ est la fonction de Hankel de première espèce d'ordre zéro;

r la distance OM;

$m = \frac{2\pi}{L}$, L désignant la longueur d'onde de la houle.

Les expressions (2) et (3) sont applicables à un domaine (D) de forme quelconque, à condition de prendre les précautions suivantes :

- d'une part, décomposer, si cela est nécessaire, le domaine réel (D) en plusieurs domaines partiels fictifs de forme convexe, appelés conventionnellement « bassins »;
- d'autre part, ne considérer dans la formule (2) que les dérivées normales $\partial\bar{\zeta}/\partial n$ relatives aux ondes qui pénètrent dans le domaine partiel considéré. Dans la suite de l'exposé, nous désignerons les dérivées normales relatives aux ondes sortant du bassin par $\partial\bar{\zeta}^*/\partial n$.

L'agitation de la houle dans chaque bassin peut alors être considérée comme la superposition des solutions théoriques relatives aux différents demi-plans limités par les tangentes au contour du bassin et contenant ce dernier.

Les ondes qui pénètrent dans chacun des bassins comprennent :

- 1° les ondes qui proviennent de l'extérieur du domaine global (D) à travers une portion du contour Γ appelée « passe principale », sur laquelle la répartition de $\partial\bar{\zeta}/\partial n$ est connue;
- 2° les ondes qui proviennent d'un bassin adjacent à travers une portion commune de frontière appelée « passe secondaire ». Les dérivées normales intérieures aux deux bassins sont liées par la relation :

$$\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial n} = - \frac{\partial\bar{\zeta}^*}{\partial n} \quad (4)$$

- 3° les ondes qui proviennent d'une réflexion sur des ouvrages situés sur le contour du bassin étudié. Les dérivées normales relatives aux ondes réfléchies et aux ondes incidentes respectivement sont liées par la relation :

$$\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial n} = -\bar{\mu} \frac{\partial\bar{\zeta}^*}{\partial n} \quad (5)$$

Le nombre complexe $\bar{\mu}$ a pour module le coefficient de réflexion de l'ouvrage et pour argument le déphasage de la houle réfléchie sur le contour.

La dérivée normale figurant au second membre de (4) et (5) est calculée au moyen de la formule suivante. Celle-ci est déduite de l'expression (2), considérée comme une fonction de la position du point O, par une dérivation suivant la direction de la normale intérieure \vec{n}_J au contour du bassin en M_J :

$$\left(\frac{\partial\bar{\zeta}^*}{\partial n}\right)_J = \frac{1}{4i} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial n}\right)_K \frac{\partial G_2}{\partial n}(M_J M_K) ds \quad (6)$$

De l'expression (3), on déduit :

$$\frac{\partial G_2}{\partial n}(M_J M_K) = 2 m H_1^{(1)}(mr_{JK}) \cos \Psi_{JK} \quad (7)$$

$$\Psi_{JK} = (\vec{n}_J, \vec{M}_J M_K)$$

où r_{JK} est la distance entre les deux points périphériques considérés M_J et M_K ;

$H_1^{(1)}(x)$ la fonction de Hankel de première espèce d'ordre un.

Organisation du calcul numérique.

En pratique, les intégrales (2) et (6) sont remplacées par les sommations finies suivantes, effectuées avec un nombre N de points périphériques et un nombre N_i de points intérieurs dans chaque bassin :

$$\left(\frac{\partial\bar{\zeta}^*}{\partial n}\right)_J = \sum_{K=1}^N R_{JK} \left(\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial n}\right)_K \quad J = 1, 2, \dots, N \quad (8)$$

$$\bar{\zeta}_I = \sum_{K=1}^{N_i} S_{IK} \left(\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial n}\right)_K \quad I = 1, 2, \dots, N_i \quad (9)$$

avec :

$$\begin{cases} R_{JK} = \frac{1}{4i} \frac{\partial G_2}{\partial n}(M_J M_K) \Delta S_K \\ S_{IK} = \frac{1}{4i} G_2(O_I M_K) \Delta S_K \end{cases} \quad (10)$$

C'est-à-dire :

$$R_{JK} = \begin{cases} -\frac{im}{2} H_1^{(1)}(mr_{JK}) \cos \Psi_{JK} \Delta S_K & \text{si } J \neq K \\ 0 & \text{si } J = K \end{cases} \quad (11)$$

$$S_{IK} = \begin{cases} -\frac{i}{2} H_0^{(1)}(mr_{IK}) \Delta S_K & \text{si } r_{IK} \neq 0 \\ -\frac{i}{m} \bar{P} \left(\frac{m\Delta S_K}{2}\right) & \text{si } r_{IK} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Avec :

$$\bar{P}(x) = \int_0^x H_0^{(1)}(u) du \quad (13)$$

Le nombre de points périphériques doit être choisi de manière que la longueur ΔS_K de chaque élément du contour soit suffisamment faible vis-à-vis de la longueur d'onde de la houle.

Le calcul des coefficients d'influence R_{JK} et S_{IK} est rapide, car les fonctions $H_0^{(1)}(x)$, $H_1^{(1)}(x)$, $\bar{P}(x)$ sont aisément calculables au moyen de développements en série entière.

Le calcul des dérivées normales est effectué par approximations successives à l'aide des équations (4), (5) et (8). Dans ce calcul, la sommation (8) relative au point M_J situé dans le bassin de rang N tient compte de la valeur de $\partial\bar{\zeta}/\partial n$ obtenue dans l'itération en cours :

— d'une part, aux points d'indice inférieur à J

situés sur les parois réfléchissantes du même bassin;

— d'autre part, aux points situés sur des parois secondaires communicant avec des bassins de rang inférieur à N.

La valeur de $\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial n}$ utilisée aux autres points périphériques est celle calculée lors de l'itération précédente. Ce processus de calcul converge plus ou moins rapidement suivant l'importance des réflexions dans le domaine étudié. Il est arrêté lorsque les parties réelle et imaginaire des dérivées normales sont, entre deux itérations successives et dans l'ensemble des bassins considérés, modifiées d'une quantité inférieure à un critère de convergence donné $C_{\bar{\zeta}}$.

Remarque :

Lorsque la distance r est grande par rapport à la longueur d'onde de la houle, les coefficients d'influence prennent la forme :

$$\begin{cases} R_{JK} = \left(\frac{m}{2\pi r_{JK}}\right)^{1/2} \cos \Psi_{JK} \Delta S_K e^{i(mr_{JK} - (5\pi/4))} \\ S_{JK} = \frac{\Delta S_K}{(2\pi m r_{JK})^{1/2}} e^{i(mr_{JK} - (3\pi/4))} \end{cases} \quad (14)$$

Conformément au principe de Huygens, cette dernière formule traduit le fait que l'agitation de la houle au point O résulte de l'énergie émise par des sources fluctuantes ponctuelles et isotropes réparties le long du contour Γ . Un élément de contour de longueur unité émet par unité d'angle un flux moyen d'énergie égal à :

$$F = \frac{\rho g C_g}{4\pi m} \left| \frac{\partial \bar{\zeta}_M}{\partial n} \right|^2 \quad (15)$$

où : C_g désigne la célérité de groupe de la houle;
 ρ la masse spécifique de l'eau;
 g l'accélération due à la pesanteur.

Cas d'un domaine de profondeur non uniforme

Principe.

Par analogie avec ce qui a été mis en évidence en profondeur constante, on peut admettre les hypothèses suivantes dans les régions côtières où la pente des fonds est généralement faible :

— l'agitation de la houle en O résulte de l'énergie émise par des sources périphériques isotropes réparties sur le contour du domaine (D);

— le flux d'énergie émis par chaque source M est égal à (15), toutes les caractéristiques de la houle étant rapportées à la profondeur locale en M;

— ce flux est conservatif entre deux rayons d'ondes voisins, issus de la source M et tracés conformément aux lois classiques de la réfraction. La contribution apportée par cette source M à l'agitation en O est ainsi en module égale à :

$$\left| \frac{d\bar{\zeta}_O}{dS} \right| = I(\text{OM}) \left| \frac{\partial \bar{\zeta}_M}{\partial n} \right| \quad (16)$$

avec :

$$I(\text{OM}) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{C_{gM} L_M \theta_M}{C_{gO} |\sigma_O|} \right)^{1/2} \quad (17)$$

où : σ_O est l'écartement en O de deux rayons d'onde voisins issus de M;

θ_M l'angle qu'ils forment en M;

C_{gO}, C_{gM} la célérité de groupe de la houle en O et M;

L_M la longueur d'onde de la houle en M.

En tenant compte de l'identité suivante démontrée dans [5] :

$$\frac{\sigma_M \theta_M}{L_M} = \frac{\sigma_O \theta_O}{L_O} \quad (18)$$

I(OM) prend également la forme :

$$I(\text{OM}) = \frac{L_M}{2\pi} \left[\frac{C_{gM} \theta_O}{C_{gO} L_O |\sigma_M|} \right]^{1/2} \quad (19)$$

où :

σ_O est remplacé par σ_M , l'écartement au voisinage de M de deux rayons d'onde voisins issus de O;

θ_O est l'angle formé par ceux-ci en O;

L_O la longueur d'onde de la houle en ce point.

— la phase associée à la contribution précédente est, par analogie avec (14), prise égale à :

$$\varphi(\text{OM}) = \int_{MO} m(r) dr - \frac{3\pi}{4} = 2\pi \int \frac{dr}{L(r)} - \frac{3\pi}{4} \quad (20)$$

où :

r désigne l'abscisse curviligne le long du rayon d'onde issu de M et aboutissant en O;

$L(r)$ la longueur d'onde associée à la profondeur d'eau au point d'abscisse r .

Avec l'ensemble de ces hypothèses, on est conduit à appliquer les formules (2) et (6) avec les fonctions de Green suivantes :

$$G_2(\text{OM}) = 4 i I(\text{OM}) e^{i\varphi(\text{OM})} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_2}{\partial n}(\text{M}_J \text{M}_K) \\ = -4 I(\text{M}_J \text{M}_K) Q(\text{M}_J \text{M}_K) \cos \Psi_{JK}^* e^{i\varphi(\text{M}_J \text{M}_K)} \end{aligned} \quad (22)$$

avec :

$$Q(\text{M}_J \text{M}_K) = \left[m + \frac{i}{2} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{1}{C_g} \frac{\partial C_g}{\partial r} \right) \right]_{M_J} \quad (23)$$

$$\Psi_{JK}^* = (\vec{n}_J, \vec{t}_r) = \beta(\text{M}_J \text{M}_K) - \alpha_K + \frac{\pi}{2} \quad (24)$$

où : n_J est la normale intérieure à Γ en M_J (cf. fig. 1 a);

\vec{t}_r la tangente en M_J au rayon d'onde issu de M_K orientée dans le sens $M_K M_J$;

- $\beta(M_J M_K)$ est l'angle formé par \vec{t}_r avec un axe fixe de référence $\vec{R}x$;
- α_K est l'angle formé par la tangente \vec{t}_K au contour en M_K avec cet axe;
- $\frac{\partial C_d}{\partial r}$ la dérivée suivant \vec{t}_r de la célérité de groupe de la houle;
- $\frac{\partial \sigma}{\partial r}$ la dérivée suivant \vec{t}_r de l'écartement $\sigma(r)$ de deux rayons d'onde voisins issus de M_K , c'est-à-dire l'angle formé au voisinage de M_J par ceux-ci.

Organisation du calcul.

De la similitude des formules utilisées en profondeur constante et en profondeur non uniforme résulte une organisation identique des calculs à des détails près que nous allons préciser. Le calcul comporte les phases suivantes :

- la décomposition du domaine étudié en bassins de forme convexe. Ce terme doit être pris dans un sens spécial, c'est-à-dire que par deux points quelconque du contour d'un bassin on doit en principe pouvoir faire passer un rayon d'onde entièrement situé à l'intérieur du domaine;
- la subdivision du contour de chaque bassin en N éléments de longueur ΔS_K inférieure à une fraction donnée de la longueur d'onde locale en chaque point;
- le calcul des N^2 coefficients d'influence :

$$R_{JK} = I(M_J M_K) Q(M_J M_K) \Delta S_K \cos \Psi_{JK}^* e^{i\varphi(M_J M_K)} \quad (25)$$

- le calcul des dérivées normales sur les passes secondaires et sur les ouvrages réfléchissants à l'aide des formules (4), (5) et (8). Ceci est fait suivant la méthode précédemment exposée. Les dérivées normales sur les passes principales sont déterminées au moyen d'un programme de calcul annexe tenant compte de la réfraction de la houle entre le large et ces passes;
- le calcul des $N_i \cdot N$ coefficients d'influence :

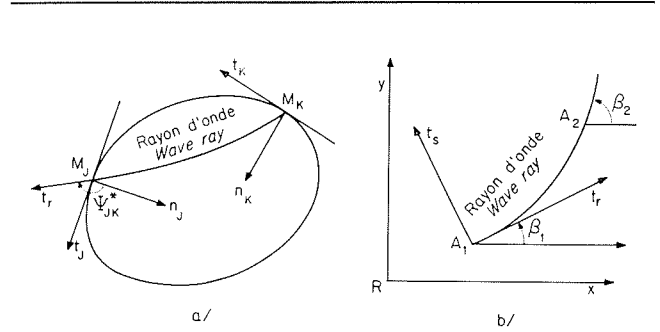
$$S_{IK} = I(M_J M_K) \Delta S_K e^{i\varphi(M_J M_K)} \quad (26)$$

- enfin le calcul de l'agitation résultante ζ aux N_i points intérieurs à l'aide de (9).

Le calcul des coefficients d'influence constitue la phase de calcul la plus longue à exécuter. Il est de ce fait intéressant de conserver ces coefficients sur un fichier (constitué par une bande magnétique) en vue de leur utilisation dans un calcul ultérieur. Ces coefficients ont en effet l'intérêt d'être indépendants du coefficient de réflexion des ouvrages portuaires et, sous certaines conditions, de la direction de la houle incidente.

Calcul des coefficients d'influence.

Le calcul des coefficients R_{JK} S_{IK} exigerait en principe le tracé des rayons d'ondes passant par



1. a/ Tangentes et normales sur le contour Γ .
Reference tangents and normals on contour Γ .
b/ Systèmes d'axes de référence dans le tracé des rayons d'onde.
Reference axis systems for calculating wave rays.

les points M_K et M_J ou par M_K et O_I . Ce tracé étant irréalisable, on procède en fait comme suit :

On trace à partir de M_K un nombre $(N_R - 1)$ de rayons d'ondes avec un intervalle angulaire constant $\theta = \pi/N_R$. A l'intersection de chaque rayon d'onde avec le contour, on détermine les grandeurs auxiliaires $I(TM_K)$, $\varphi(TM_K)$, $Q(TM_K)$, $\beta(TM_K)$ considérées comme fonctions de l'abscisse curviligne $u(T)$. L'abscisse curviligne des points M_J étant connue, on déduit par une interpolation les valeurs des fonctions auxiliaires et de R_{JK} aux points M_J .

Pour déterminer S_{IK} , on utilise un procédé d'interpolation analogue. Celui-ci est basé sur le tracé à partir du point intérieur considéré O_I de N_R rayons d'ondes avec un intervalle angulaire constant $\theta = 2\pi/N_R$.

Avec certaines configurations de fonds, plusieurs rayons d'onde peuvent passer par deux points donnés O_I et M_K ou M_J et M_K . Dans cette éventualité, plusieurs valeurs des fonctions auxiliaires sont obtenues en consultant la table constituée par le procédé qui vient d'être indiqué. Les valeurs R_{JK} ou S_{IK} ainsi déduites sont cumulées vectoriellement.

Tracé des rayons d'ondes.

Le tracé des rayons d'ondes consiste à intégrer numériquement une fonction $y(x)$ dont la courbure locale $C_b(r)$ est connue à l'aide de la formule :

$$C_b(r) = \frac{d\beta}{dr} = -\frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial s} \quad (27)$$

c'est-à-dire :

$$C_b(r) = \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial x} \sin \beta - \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial y} \cos \beta \quad (28)$$

où : x, y sont les coordonnées d'un point courant A du rayon d'onde par rapport à un système d'axes fixes $\vec{R}x, \vec{R}y$ (cf. fig. 1 b);

r est l'abscisse curviligne du point A, comptée positivement dans le sens du tracé;

L la longueur d'onde de la houle en A;

$\frac{\partial L}{\partial s}$ sa dérivée suivant la tangente \vec{t}_s au front d'onde local;

β l'angle de la tangente \vec{t}_r au rayon d'onde en A avec l'axe $\vec{R}x$.

Cette intégration est effectuée suivant une méthode proche de celle préconisée par Griswold [1]. Elle consiste à tracer une succession d'arcs circulaires A_1A_2 de longueur Δr et de courbure égale à la moyenne des courbures réelles C_{b_1} et C_{b_2} en A_1 et A_2 . Alors que Griswold adopte un pas spatial constant, nous utilisons un pas de temps constant, c'est-à-dire un pas Δr égal à une fraction imposée C_r de la longueur d'onde moyenne entre ces deux points. Avec ces hypothèses, les coordonnées x_1, y_1 de A_1 et x_2, y_2 de A_2 sont liées par les relations :

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \Delta r^* \cos\left(\beta_1 + \frac{\Delta\beta}{2}\right) \\ y_2 = y_1 + \Delta r^* \sin\left(\beta_1 + \frac{\Delta\beta}{2}\right) \end{cases} \quad (29)$$

avec :

$$\Delta r^* = \Delta r \frac{\sin(\Delta\beta/2)}{(\Delta\beta/2)} \quad \Delta r = \frac{C_r}{2} (L_1 + L_2) \quad (30)$$

$$\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1 = \frac{\Delta r}{2} (C_{b_1} + C_{b_2}) \quad (31)$$

Plusieurs itérations sont évidemment nécessaires, puisque Δr et $\Delta\beta$ dépendent de L_2 et C_{b_2} . Le résultat est jugé satisfaisant lorsque la variation de $\Delta\beta$ entre les deux dernières itérations est inférieure à 10^{-3} radians.

Calcul des fonctions auxiliaires.

Compte tenu des formules (20) et (29), on a évidemment :

$$\varphi(\text{OM}) = 2\pi \sum C_r - \frac{3\pi}{4} \quad (32)$$

La sommation porte sur le nombre total de pas nécessaire au rayon d'onde pour atteindre le contour. En outre la valeur réelle de C_r sur le dernier pas doit être déterminée en inversant la formule (30).

Comme l'ont montré Munk et Arthur dans [6], l'écartement $\sigma(r)$ de deux rayons d'ondes quelconques, mais voisins, constitue la solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2\sigma}{dr^2} + p(r) \frac{d\sigma}{dr} + q(r) \sigma = 0 \quad (33)$$

dont les coefficients ont pour expression dans le système d'axes mobiles \vec{t}_r, \vec{t}_s précédemment défini :

$$p(r) = -\frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial r} \quad q(r) = \frac{1}{L} \frac{\partial^2 L}{\partial s^2} \quad (34)$$

et dans le système d'axes fixes :

$$\begin{cases} p(r) = -\frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial x} \cos \beta - \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial y} \sin \beta \\ q(r) = \frac{1}{L} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \sin^2 \beta \\ -\frac{2}{L} \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \sin \beta \cos \beta + \frac{1}{L} \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \cos^2 \beta \end{cases} \quad (35)$$

Le calcul des fonctions auxiliaires $I(\text{TM}_K)$ et $Q(\text{TM}_K)$ à l'aide de (17) et (23) conduit à rechercher la valeur en T de la solution de l'équation (33) relative aux conditions initiales suivantes en M_K :

$$\sigma = 0 \quad \frac{d\sigma}{dr} = \theta_M \quad (36)$$

ainsi que la dérivée de cette solution.

Le calcul de $I(O_I T)$ à l'aide de (19) conduit à rechercher la valeur en T de la solution de l'équation (33) relative aux conditions initiales suivantes en O_I :

$$\sigma = 0 \quad \frac{d\sigma}{dr} = \theta_0 \quad (37)$$

Dans les deux cas, l'intégration numérique de cette équation différentielle peut être effectuée en même temps que le tracé du rayon d'onde et à partir de la même origine (M_K ou O_I). On utilise pour cela la méthode de Runge Kutta à deux approximations qui exploite les valeurs de $p(r), q(r)$ en A_1, A_2 , et explicite les valeurs de σ et de sa dérivée en A_2 à partir de leurs valeurs en A_1 :

$$\begin{cases} \sigma_2 = \sigma_1 \left(1 - q_1 \frac{\Delta r^2}{2}\right) \\ + \frac{d\sigma_1}{dr} \Delta r \left(1 - p_1 \frac{\Delta r}{2}\right) \\ \frac{d\sigma_2}{dr} = -\sigma_1 \frac{\Delta r}{2} [q_2 + q_1 (1 - p_2 \Delta r)] \\ + \frac{d\sigma_1}{dr} \left[1 - \frac{\Delta r}{2} [p_1 + p_2 + (q_2 - p_1 p_2) \Delta r]\right] \end{cases} \quad (38)$$

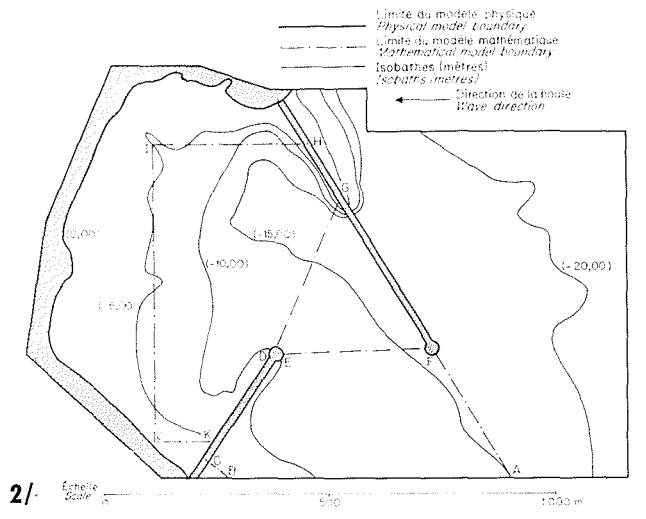
Au cours de l'intégration, σ est considérée comme une grandeur algébrique et peut prendre des valeurs négatives bien qu'elle soit positive à l'origine du tracé. Un changement de signe traduit le croisement des deux rayons d'onde voisins sur une caustique ou un foyer. Dans une telle éventualité, on admet qu'il n'y a aucune déperdition d'énergie au cours de la focalisation et on introduit dans les expressions (17) et (19) la valeur absolue de σ . On introduit également dans (32) le déphasage classique de $\pi/2$ pour tenir compte de l'allongement local de la longueur d'onde.

La longueur d'onde et ses dérivées spatiales, qui interviennent dans les formules (27) et (34), sont calculées à partir des valeurs connues aux sommets d'un ou de plusieurs réseaux maillés couvrant la région côtière étudiée. A l'intérieur de la maille (I, J) la longueur d'onde est supposée conforme à l'expression :

$$L(x, y) = (1 - b) [(1 - a) L_{I,J} + a L_{I+1,J}] + b [(1 - a) L_{I,J+1} + a L_{I+1,J+1}] \quad (39)$$

avec :

$$a = \frac{x - x_I}{x_{I+1} - x_I} \quad b = \frac{y - y_J}{y_{J+1} - y_J}$$



2/ Exemple 1. Plan d'ensemble du port.

Example 1. General plan of harbour.

3/ Exemple 1. Agitation dans le port. Courbes d'égale amplitude relative.

Example 1. Constant relative wave height curves for the harbour.

4/ Exemple 2. Disposition du modèle mathématique.

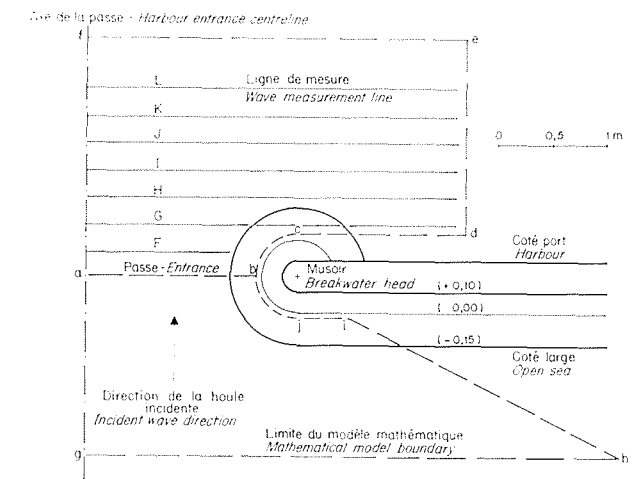
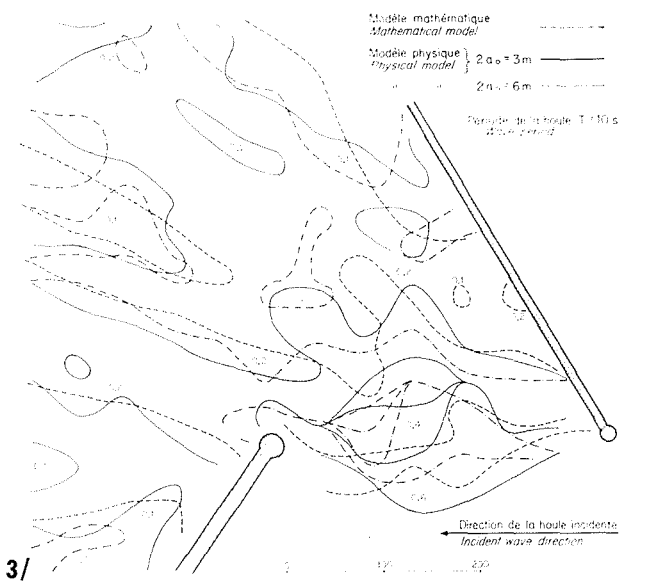
Example 2. Mathematical model layout.

5/ Exemple 2. Agitation près de la passe. Amplitude relative sur les lignes de sondage.

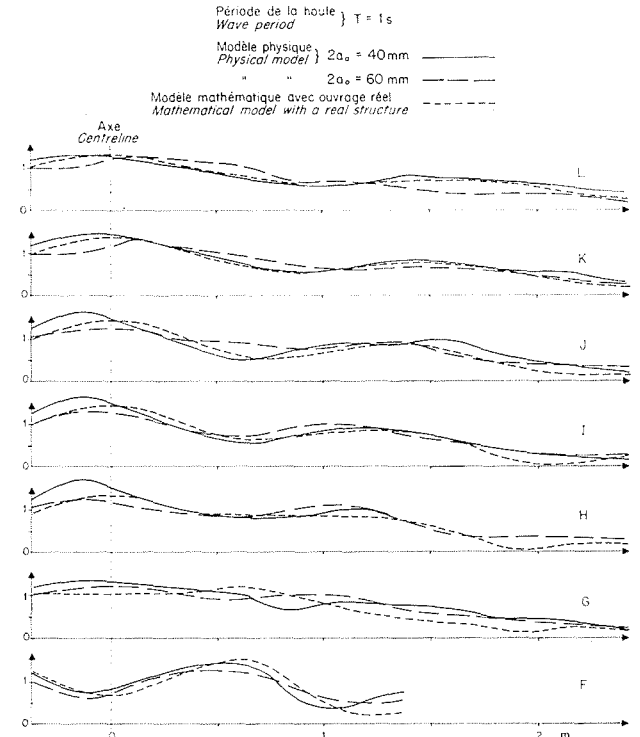
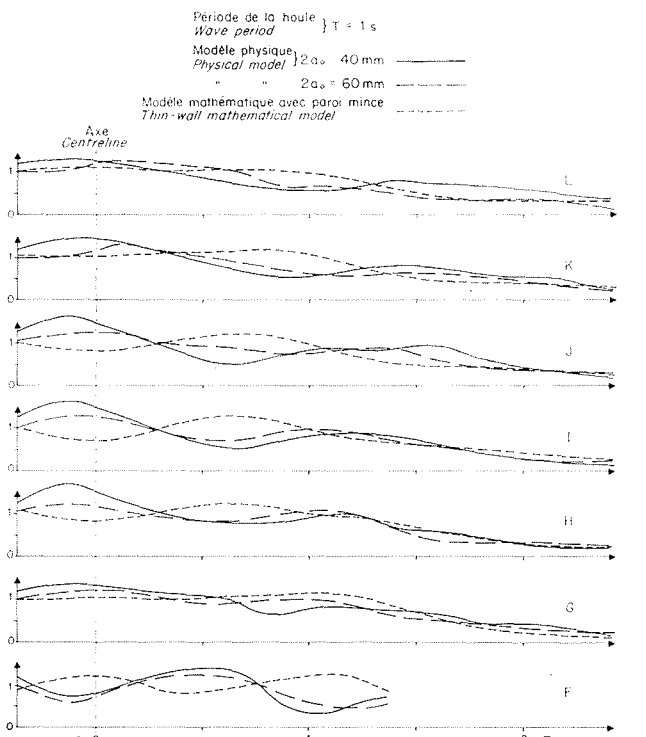
Example 2. Waves near the harbour entrance. Relative heights along measurement lines.

6/ Exemple 2. Agitation près de la passe. Amplitude relative sur les lignes de sondage.

Example 2. Waves near the harbour entrance. Relative heights along measurement lines.



4/



6/

Exemples d'application

La méthode qui vient d'être exposée a été programmée sur un ordinateur I.B.M. 360-50 et a été comparée à la méthode classique d'étude sur modèle physique avec plusieurs aménagements portuaires. Nous en donnerons deux exemples.

Exemple 1.

Le premier exemple concerne la diffraction d'une houle de période $T = 10$ s dans le port représenté sur la figure 2. La profondeur d'eau varie entre 15 m devant l'entrée du port et 2 m à l'enracinement des ouvrages de protection. Ceux-ci sont constitués de deux jetées convergentes en enrochements équipées de musoirs tronconiques.

Le modèle physique, réalisé à l'échelle du 1/100^e, comporte un batteur à houle dont la position correspond à celle d'un front d'onde calculé en tenant compte de la réfraction de la houle à partir du large. Des plages absorbantes, non représentées sur la figure, ont été placées le long des limites latérales du modèle pour amortir les réflexions de la houle sur les ouvrages extérieurs. Les amplitudes de houle étudiées sont de 3 et 6 m.

Le modèle mathématique de diffraction, représenté par le contour AHJKEB, comporte 3 bassins, une passe principale AF et deux passes secondaires EF et DG. Pour avoir des bassins de forme convexe, on aurait dû en toute rigueur choisir comme passes secondaires les rayons d'onde passant par E et F, ou par D et G, et la passe principale devrait être le rayon d'onde tangent en F à l'axe de la jetée FH. Ces limites idéales sont suffisamment proches des contours rectilignes choisis dans le calcul pour justifier cette simplification. La largeur des ouvrages, de l'ordre de 25 à 30 m à la cote de la surface libre au repos (cote 0,00), est relativement faible par rapport à la longueur d'onde de la houle, qui est elle-même de l'ordre de 110 m pour une profondeur de 15 m. Ceci a permis de schématiser les ouvrages sous forme de parois minces placées suivant leur axe longitudinal. Compte tenu de la cambrure de la houle et de la rugosité des enrochements, le coefficient de réflexion de ces ouvrages a été estimé à 40 % pour une amplitude de 3 m.

La répartition des dérivées normales sur la passe AF a été calculée au moyen d'un programme annexe tenant compte de la réfraction de la houle entre le batteur et cette passe. Les fonds sont représentés au moyen d'un réseau maillé de 20 m de côté.

Les résultats obtenus avec ces deux modèles sont présentés sous forme de courbes d'égale amplitude sur la figure 3. L'ensemble de ces résultats est relativement homogène et montre que l'amplitude relative est :

- inférieure à 0,4 dans l'ensemble du port et inférieure à 0,2 dans une grande partie de celui-ci;
- supérieure à 0,2 dans une zone de 200 m environ de large à proximité de la passe. Près de la côte, cette zone est plus étroite et orientée dans une direction légèrement inclinée par rapport à la direction de la houle incidente à l'extérieur du port;

— inférieure à 0,1 dans des zones étroites situées près de l'enracinement des deux digues, ainsi que dans la partie centrale. La cote du couronnement de la digue KD étant assez basse, on observe des franchissements avec une amplitude de houle de 6 m. De ce fait, l'agitation du plan d'eau en arrière de cet ouvrage passe de 0,1 pour 3 m à 0,2 pour 6 m.

Exemple 2.

Le deuxième exemple concerne la diffraction d'une houle de période $T = 1$ s derrière une passe de 3,27 m de large. Les jetées, représentées sur la figure 4, comportent des musoirs tronconiques de pente 2/1 et de 0,67 m de diamètre à la cote (0,0). La profondeur d'eau est uniforme et égale à 0,15 m, la longueur d'onde de la houle est de 1,09 m.

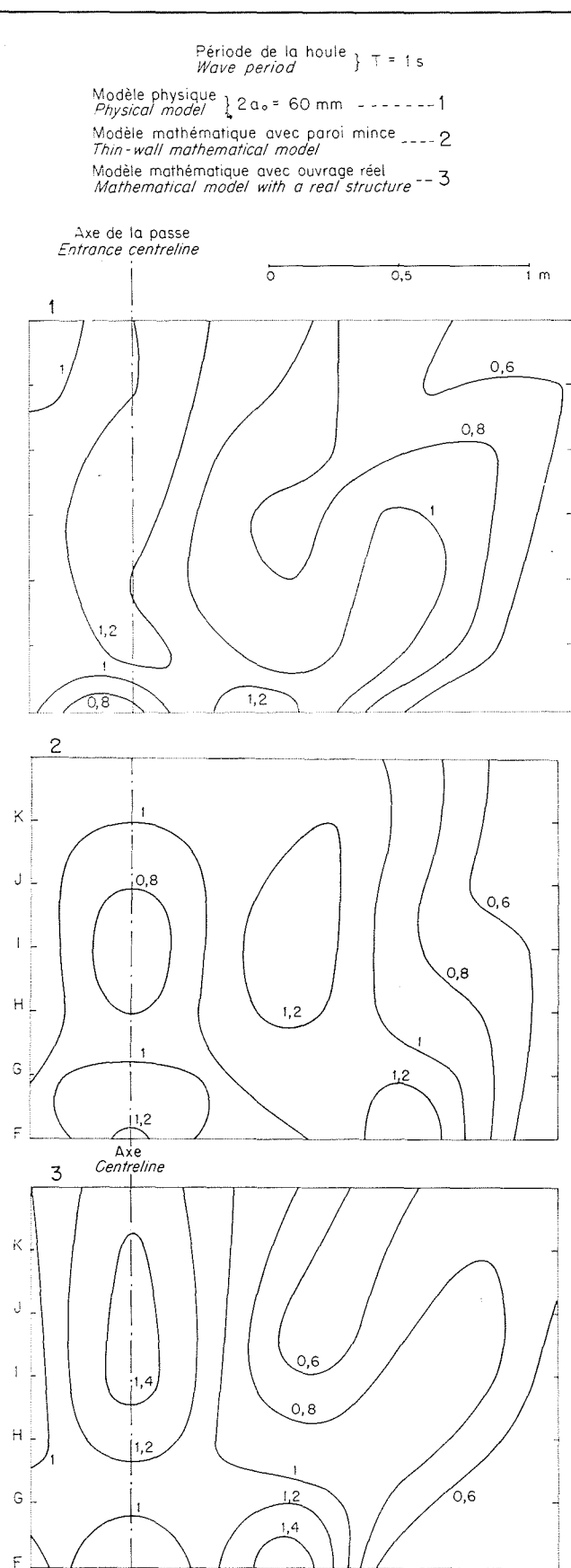
Dans [7] M. Montaz a cherché à déterminer si une telle configuration des ouvrages pouvait être schématisée par des parois minces et une passe rectangulaire de 3,27 m de large. Dans ce but, il a effectué des essais sur modèle physique avec une amplitude de houle au batteur respectivement égale à $2\alpha_0 = 4$ et 6 cm.

Les résultats de ses calculs avec le modèle mathématique de diffraction pure et ceux de ses essais sur modèle physique sont portés sur les figures 5 et 7. Ils sont donnés sous forme de courbes d'amplitude relative le long des lignes de mesure sur la figure 5 et sous forme de courbes d'égale amplitude relative sur les figures 7.1 et 7.2. On constate un désaccord sur la position des zones de forte et de faible agitation. Ceci montre que des musoirs tronconiques de diamètre supérieur à une demi-longueur d'onde doivent être représentés de manière plus précise sur un modèle mathématique.

Dans cette intention, nous avons utilisé le modèle mathématique de diffraction en profondeur non uniforme en introduisant la configuration du musoir dans le réseau représentatif des fonds avec une maille carrée de 0,127 m de côté. L'incidence de la houle étant normale à la passe, nous n'avons considéré que le demi-plan situé à droite de l'axe de symétrie, et remplacé ce dernier par une paroi réfléchissante. Le modèle mathématique délimité par le contour *ghijkldef* comporte deux bassins, une passe secondaire *ab* et une passe principale *gh*, où la répartition des dérivées normales est uniforme en module et en phase. Le contour *jbc* entourant le musoir est un contour polygonal de huit côtés situé approximativement sur l'isobathe $-0,025$ m et considéré comme totalement réfléchissant. Les autres limites du modèle sont totalement absorbantes.

Pour obtenir une reproduction convenable de l'agitation de la houle dans la zone abritée par les ouvrages, il s'est avéré en outre nécessaire de considérer comme nul le coefficient d'influence R_{JK} ou S_{IK} lorsque le point de calcul O_I ou M_J se trouve à droite de la tangente au contour du bassin considéré en M_K .

L'amplitude relative calculée par cette méthode sur les lignes de sondage est indiquée sur la figure 6 et les courbes d'égale amplitude relative sont portées sur la planche 7.3. La concordance du modèle mathématique et du modèle physique est satisfaisante en ce qui concerne la répartition des zones de



7/ Exemple 2. Agitation près de la passe. Courbes d'égale amplitude relative.
 Example 2. Waves near the harbour entrance. Constant relative height curves.

forte et de faible agitation. Une comparaison précise des amplitudes est cependant difficile en raison de la dissymétrie des résultats du modèle physique par rapport à l'axe de la passe. Ce modèle a été implanté dans un bassin conçu pour des études de type classique et, malgré le soin apporté à sa réalisation, les légères inégalités des fonds ainsi que la dissymétrie dans la disposition relative de la passe et des plages absorbantes ont eu une influence plus sensible que prévu sur les résultats.

Cet « incident » montre qu'un modèle physique, même très étudié, peut présenter des erreurs locales du même ordre de grandeur que les écarts constatés entre modèle mathématique et modèle physique; les exemples précédents ne permettent donc pas de départager les deux méthodes quant à la précision des résultats.

Conclusions

Malgré le caractère approché du principe de calcul utilisé en profondeur non uniforme, les résultats obtenus sur modèle mathématique s'avèrent conformes à ceux du modèle physique correspondant. Il faut toutefois veiller à représenter correctement les ouvrages et connaître leur coefficient de réflexion en fonction des caractéristiques particulières de la houle étudiée.

Un problème parfois associé à celui de l'agitation dans un port est celui des risques de franchissement des brise-lames. Ils pourraient être évalués en déterminant par le calcul l'amplitude de la houle incidente devant l'ouvrage et en établissant une corrélation avec des résultats d'essais sur modèle réduit effectués avec le profil de digue considéré.

La méthode que nous venons de décrire permet en principe de calculer l'agitation de la houle avec une configuration quelconque des fonds et des ouvrages portuaires. Le calcul des coefficients d'influence R_{JK} et S_{IK} est cependant beaucoup plus long que lors d'un calcul de diffraction en profondeur constante; c'est pourquoi il convient de n'utiliser un modèle aussi complexe que dans les zones côtières où les phénomènes de réfraction et de diffraction interviennent simultanément.

Le modèle mathématique présente sur le modèle physique l'avantage d'un coût de construction beaucoup moins élevé. Le coût de son exploitation dépend en majeure partie du volume de calcul nécessaire et du coût d'utilisation d'un ordinateur. Il varie de ce fait notablement suivant les possibilités de schématisation des ouvrages et de réutilisation de coefficients d'influence déjà calculés. Le prix de revient d'une étude d'aménagement portuaire sur un modèle mathématique peut, suivant les cas, être inférieur ou supérieur à celui d'une étude sur modèle physique. Le choix entre ces deux procédés d'étude ne peut donc actuellement résulter que d'une comparaison des devis sur chaque cas d'espèce. Cependant le rapport de la puissance de travail au prix d'utilisation des ordinateurs s'accroît constamment et le modèle mathématique prend de plus en plus l'avantage sur le modèle physique.

Références

- [1] GRISWOLD (G.M.). — Numerical calculation of wave refraction. *Journ. of Geophysical. Research*, vol. 68, n° 6 (March 1963), 1715-1723.
- [2] LEPETIT (J.-P.). — Etude de la réfraction de la houle monochromatique par le calcul numérique. *Bulletin du Centre de Recherches et d'Essais de Chatou*, n° 9 (octobre 1964), 3-25.
- [3] BIESEL (F.) et RANSON (B.). — Calcul de la diffraction de la houle. A.I.R.H., Dubrovnik (1961).
- [4] DAUBERT (A.) et LEBRETON (J.-C.). — Diffraction de la houle sur des obstacles à parois verticales. *La Houille Blanche*, n° 4 (juillet 1965), 337-344.
- [5] GAILLARD (P.). — Sur l'amplitude de la houle émise par une source ponctuelle isotrope dans un domaine de profondeur variable. *La Houille Blanche*, n° 5 (1964), 571-574.
- [6] MUNK (W.H.) et ARTHUR (R.S.). — Wave intensity along a refracted ray. Gravity waves. National Bureau of Standards. Circular 521 (1952), 95-108.

- [7] MONTAZ (J.-P.). — Etude expérimentale systématique en vue de l'utilisation de modèles mathématiques pour l'étude de la diffraction pure de la houle. *La Houille Blanche*, n° 7 (novembre 1964), 785-791.

Discussion

Président : M. HALBRONN

M. le Président remercie M. GAILLARD et souligne les précautions dont il s'est entouré pour présenter le résultat assez frappant de la comparaison du modèle mathématique à « parois minces » à celui comportant des profondeurs variables. Malgré les imperfections du modèle physique, l'amélioration apportée par la seconde méthode sur la première est suffisamment convaincante.

Abstract

**New developments in mathematical models of sea waves:
calculation of wave diffraction over an uneven bottom**

by **L. Barailler *** and **P. Gaillard ***

The present paper describes a method used on a digital computer for calculating the effects of wave refraction and diffraction simultaneously at harbour sites. It is derived from the method used by Biesel and Ranson [3] in the case of uniform depth by consideration of the radiation of wave energy in water of gradually varying depth.

The wave height and wave phase are given in complex form $\bar{\zeta}$ by formulae (1) and (2) where the Green function $G_0(OM)$ is defined by (19) (20) and (21). For practical purposes the area is divided into theoretical basins of convex shape and the integral (2) is applied to the boundaries of these basins. The derivative normal to the boundary Γ is given by formulae (4) (5) and (6) and the derivative of the Green function is given by (22) (23) and (24).

For calculation, the integrals (2) and (6) are given the form (8) (9) with an increment ΔS_R chosen small enough with respect to the local wave length. The coefficients R_{JK} , S_{JK} defined by (25) (26) are determined in the following manner:

- (i) The paths of a given number of wave rays, starting from the points O_i and M_K , where ζ and $\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial n}$ are to be found, are computed by means of formulae (28) to (31) inclusive;
- (ii) The auxiliary functions I , Q , ϕ , β , σ are computed at the points where the wave rays reach the boundary Γ . Their values at the given points M_j , M_K , are then derived by interpolation along Γ . At this step, the differential equation (33) is integrated with the initial conditions (36) for M_K and (37) for O_i .

This mathematical model was compared to laboratory scale models and proved to be satisfactory. Two examples are given here.

- (i) The wave pattern in the harbour illustrated in Figure 2 for a wave period of 10 sec. Owing to the narrowness of the breakwaters compared to the wave length, it was possible to consider them as thin walls in the mathematical model. The results given by both models as shown in Figure 3.
- (ii) The wave pattern just inside the harbour entrance illustrated in Figure 4.

In a previous study by Montaz [7] the breakwaters were considered as thin walls and the mathematical model gave the results of Figures 5 and 7.2, which depart considerably from the results of Figures 5, 6 and 7.1 obtained with a physical model. An accurate reproduction of the sloping breakwater head on the mathematical model leads to the consistent results of Figures 6 and 7.3.

* SOGREA.H.

LA HOUILLE BLANCHE

rappelle
ses volumes
hors-série
et ses
numéros
spéciaux

HYDRAULIQUE ET ÉLECTRICITÉ FRANÇAISES

Édition anglaise : Un volume (1950), 413 pages..... Broché 22 F

B O R T

Un volume (1953), 367 pages..... Broché 20 F

DONZÈRE-MONDRAGON

Un volume (1955), 486 pages..... Relié 48 F

T I G N E S

Un volume (1958), 440 pages..... Relié 80 F

LE DANUBE

N° 2/1964 de « La Houille Blanche », 218 pages..... Broché 40 F

LES ÉNERGIES DE LA MER

IV^{es} Journées de l'Hydraulique de la Société Hydrotechnique de France (1956).
Deux volumes, 751 pages..... Brochés 80 F

TURBINES ET POMPES HYDRAULIQUES

V^{es} Journées de l'Hydraulique de la Société Hydrotechnique de France (1958).
Deux volumes, 730 pages..... Brochés 100 F

L'HYDRAULIQUE SOUTERRAINE

VI^{es} Journées de l'Hydraulique de la Société Hydrotechnique de France (1960).
Deux volumes, 663 pages..... Brochés 160 F

BULLES ET GOUTTES

La tension superficielle en hydraulique

VII^{es} Journées de l'Hydraulique de la Société Hydrotechnique de France (1962).
Deux volumes, 624 pages..... Brochés 200 F

LES INSTABILITÉS EN HYDRAULIQUE ET EN MÉCANIQUE DES FLUIDES

VIII^{es} Journées de l'Hydraulique de la Société Hydrotechnique de France (1964).
Deux volumes, 674 pages..... Brochés 250 F

L'HYDRAULIQUE DU POINT DE VUE MÉDICAL

N° 2/1966 de « La Houille Blanche », 150 pages Broché { France : 25 F
Etranger : 30 F

EAUX POTABLES ET EAUX USÉES

N° 4/1967 de « La Houille Blanche », 146 pages Broché { France : 35 F
Etranger : 40 F