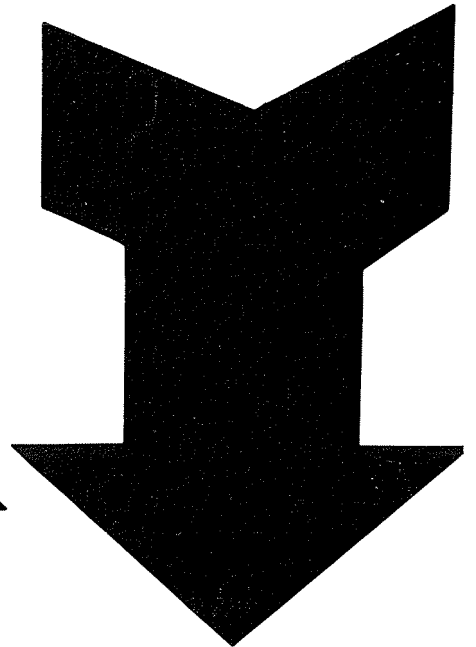
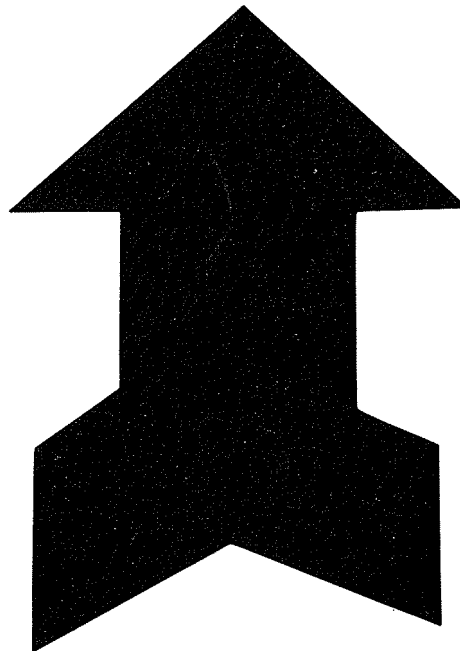
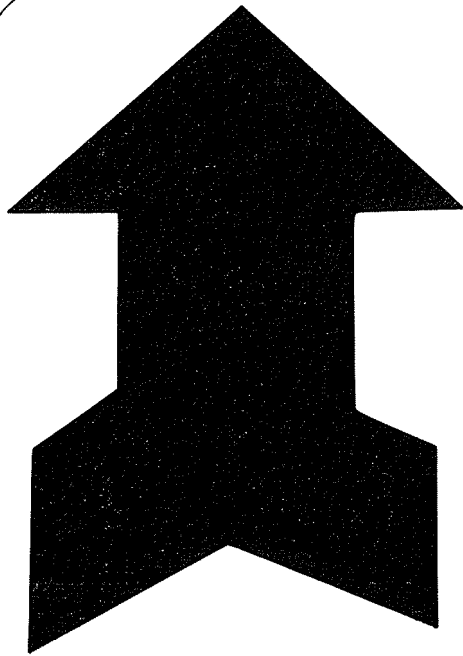


# DÉTERMINATION NUMÉRIQUE DES MOUVEMENTS D'UN COIN SALÉ



Communication  
présentée au Comité technique  
de la Société Hydrotechnique de France  
le 9 juin 1967

PAR F. BOULOT \*  
P. BRACONNOT \* ET  
Ph. MARVAUD \*

## 1. Introduction

Quand un fleuve qui évacue de l'eau douce débouche dans la mer et sous certaines conditions de débit, il se forme un coin d'eau salée qui peut s'étendre sur plusieurs dizaines de kilomètres en amont de l'embouchure.

Si le lit du fleuve est peu tourmenté, si la marée est suffisamment faible pour ne pas produire de renverse totale du courant, et en l'absence de variation brusque de débit, les échanges entre les deux couches sont faibles et on peut admettre la présence d'une interface. En général, il y a un léger mélange et on peut définir l'interface comme le lieu des points où la masse volumique est la moyenne entre les masses volumiques des deux couches.

Le problème est donc celui des écoulements non permanents de deux liquides de densités différentes avec surface libre et interface.

Les études effectuées sur ce sujet sont nombreuses et on peut signaler celles de Bata [1], Keulegan [2], Schilf et Schonfeld [3], Ippen et Harleman [4], Rouse [5].

La mise en équation dans les hypothèses des écoulements graduellement variés conduit à un système de quatre équations aux dérivées partielles en temps et en abscisse comptée le long du fleuve.

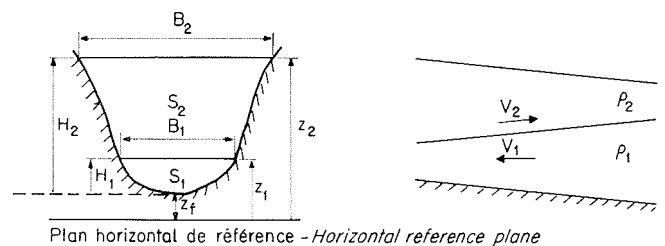
Ce rapport concerne la résolution numérique de

ce système différentiel. Un programme de calcul a été réalisé et mis au point pour l'étude des mouvements du coin salé dans le Grand-Rhône en aval d'Arles.

## 2. Mise en équation

### 1. Notations.

Nous supposons la section du fleuve quelconque. L'axe  $Ox$  sera placé au fond du fleuve dirigé suivant la pente.



Plan horizontal de référence - Horizontal reference plane

Si  $B(z, x)$  désigne la largeur horizontale de la section d'abscisse  $x$  à la cote  $z$ , les sections mouillées sont respectivement pour les deux couches :

$$S_1 = \int_0^{H_1} B(\zeta, x) d\zeta \quad (1)$$

$$S_2 = \int_{H_1}^{H_2} B(\zeta, x) d\zeta \quad (2)$$

\* Laboratoire National d'Hydraulique (E.R.N.U.T.H.).

$P_1$  et  $P_2$  seront les périmètres mouillés à la paroi.

Pour se ramener à un problème à une dimension spatiale, on définit une vitesse moyenne par section pour chaque fluide :

$$S_1 V_1 = \int_{s_1} u d\sigma \quad (3)$$

$$S_2 V_2 = \int_{s_2} u d\sigma \quad (4)$$

Pour obtenir les équations du mouvement, nous raisonnerons sur le volume de fluide compris entre deux sections parallèles à  $Oyz$  et distantes de  $dx$ .

2. Equations de continuité.

En écrivant que le déficit de la masse sortant de la tranche sert à augmenter la masse de celle-ci, on obtient :

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial S_1}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial x} + \frac{\partial S_2}{\partial t} = 0 \quad (6)$$

En tenant compte de :

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = B_1 \frac{\partial z_1}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial S_2}{\partial t} = B_2 \frac{\partial z_2}{\partial t} - B_1 \frac{\partial z_1}{\partial t}$$

il vient finalement :

$$B_1 \frac{\partial z_1}{\partial t} + \frac{\partial Q_1}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

$$B_2 \frac{\partial z_2}{\partial t} + \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

3. Equations dynamiques.

Le théorème des quantités de mouvement s'écrit en projection sur  $Ox$  pour chaque tranche :

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial V}{\partial t} d\omega + \int_{\Sigma} \rho u \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma = F_{ex} \quad (9)$$

$\Sigma$  est l'enveloppe de la tranche et  $\Omega$  son volume.

En supposant la vitesse uniforme dans chaque couche et en supposant en outre que dans l'expression de la contrainte tangentielle à l'interface :

$$\tau_i = \frac{1}{2} C_{fi} \rho |V_1 - V_2| (V_1 - V_2)$$

on puisse indifféremment poser :

$$\rho = \rho_1 = \rho_2$$

on obtient :

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + V_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} + g\epsilon \frac{\partial z_1}{\partial x} + g(1 - \epsilon) \frac{\partial z_2}{\partial x} = F_1 \quad (10)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial t} + V_2 \frac{\partial V_2}{\partial x} + g' \frac{\partial z_2}{\partial x} = F_2 \quad (11)$$

avec :

$$F_1 = -\frac{1}{2} C_f V_1 |V_1| \frac{P_1}{S_1} - \frac{1}{2} C_{fi} (V_1 - V_2) |V_1 - V_2| \frac{B_1}{S_1} \quad (12)$$

$$F_2 = -\frac{1}{2} C_f V_2 |V_2| \frac{P_2}{S_2} + \frac{1}{2} C_{fi} (V_1 - V_2) |V_1 - V_2| \frac{B_1}{S_2} \quad (13)$$

$$\epsilon = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} = \frac{\Delta\rho}{\rho_1}$$

Aux quatre équations (7) (8) (10) (11), il suffit d'ajouter les deux équations suivantes pour obtenir le système à résoudre :

$$Q_1 = S_1 V_1 \quad (14)$$

$$Q_2 = S_2 V_2 \quad (15)$$

3. Etude du système d'équations et des conditions aux limites  
Enoncé mathématique du problème

1. Courbes caractéristiques [6].

En dérivant les équations (14) et (15) par rapport au temps, il vient :

$$\frac{\partial Q_1}{\partial t} - V_1 B_1 \frac{\partial z_1}{\partial t} - S_1 \frac{\partial V_1}{\partial t} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial t} - V_2 B_2 \frac{\partial z_2}{\partial t} + V_2 B_1 \frac{\partial z_1}{\partial t} - S_2 \frac{\partial V_2}{\partial t} = 0 \quad (17)$$

En adoptant une écriture matricielle, c'est-à-dire en posant :

$$\vec{W} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ Z_1 \\ Z_2 \\ Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} \quad \vec{W}'_t = \begin{pmatrix} V'_{1t} \\ V'_{2t} \\ Z'_{1t} \\ Z'_{2t} \\ Q'_{1t} \\ Q'_{2t} \end{pmatrix} \quad \vec{W}'_x = \begin{pmatrix} V'_{1x} \\ V'_{2x} \\ Z'_{1x} \\ Z'_{2x} \\ Q'_{1x} \\ Q'_{2x} \end{pmatrix}$$

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_2 & 0 & 0 \\ -S_1 & 0 & -V_1 B_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -S_2 & V_2 B_1 & -V_2 B_2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$A_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_1 & 0 & g\epsilon & g(1 - \epsilon) & 0 & 0 \\ 0 & V_2 & 0 & g & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

le système des six équations aux dérivées partielles se met sous la forme vectorielle suivante :

$$\boxed{A_t \vec{W}'_t + A_x \vec{W}'_x = \vec{B}} \quad (20)$$

Etudions le problème de Cauchy qui consiste à trouver  $\vec{W}(x, t)$  quand ce vecteur est donné sur une courbe  $(\Gamma)$  d'équation  $x = \varphi(t)$ .

Sur la courbe  $(\Gamma)$ ,  $W$  ne dépend que de  $t$  et :

$$\vec{W}(x, t) = \vec{W}[\varphi(t), t] = \vec{W}_0(t)$$

en dérivant par rapport au temps, il vient :

$$\frac{d\vec{W}_0}{dt} = \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{W}}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = \frac{d\vec{W}_0}{dt} - \frac{\partial \vec{W}}{\partial x} \frac{dx}{dt}$$

Finalement, en posant :

$$c = \frac{dx}{dt} \quad (21)$$

et en reportant dans l'équation (20), il vient :

$$\boxed{(A_x - cA_t) \vec{W}'_x = \vec{B} - A_t \frac{d\vec{W}_0}{dt}} \quad (22)$$

Si la matrice  $A = A_x - cA_t$  n'est pas singulière, il est donc possible de calculer  $\vec{W}'_x$  et de même  $\vec{W}'_t$  et on détermine ainsi de proche en proche le vecteur  $\vec{W}(x, t)$ .

Etudions plus particulièrement le cas où la matrice  $A$  est singulière. En développant, on trouve l'équation caractéristique :

$$\det(A) = [gS_2 - B_2(V_2 - c)^2][gS_1 - B_1(V_1 - c)^2] - gS_1(1 - \epsilon)[gS_2 + (V_2 - c)^2(B_1 - B_2)]$$

L'équation donnant en chaque point les pentes  $c$  des quatre caractéristiques est donc :

$$\boxed{[gS_2 - B_2(V_2 - c)^2][gS_1 - B_1(V_1 - c)^2] - gS_1(1 - \epsilon)[gS_2 + (V_2 - c)^2(B_1 - B_2)] = 0} \quad (23)$$

Pour simplifier cette équation et pouvoir comparer entre elles ses racines, nous allons supposer la section du fleuve rectangulaire (ce qui est assez bien vérifié pour le Rhône dans le bief étudié).

On a alors  $B_1 = B_2$  et l'équation (23) devient :

$$[(V_2 - c)^2 - g(H_2 - H_1)][(V_1 - c)^2 - gH_1] - g^2H_1(H_2 - H_1)(1 - \epsilon) = 0 \quad (24)$$

En posant (pour  $H_1 \neq 0$  et  $H_1 \neq H_2$ ) :

$$X = \frac{V_1 - c}{\sqrt{gH_1}} \quad \text{et} \quad Y = \frac{V_2 - c}{\sqrt{g(H_2 - H_1)}}$$

l'équation (24) s'écrit :

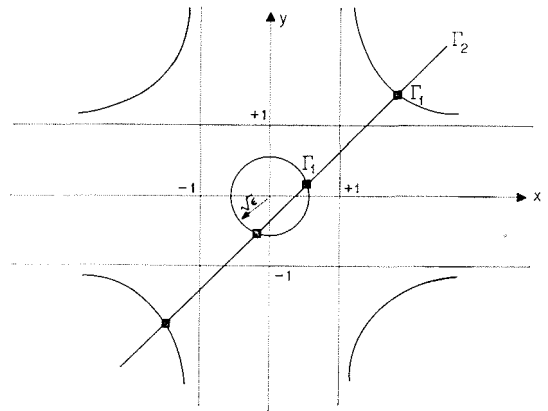
$$(Y^2 - 1)(X^2 - 1) = 1 - \epsilon \quad (25)$$

et, d'autre part, de la définition de  $X$  et  $Y$ , on tire :

$$V_1 - V_2 = X\sqrt{gH_1} - Y\sqrt{g(H_2 - H_1)} \quad (26)$$

Les points d'intersection de la courbe fixe  $\Gamma_1$  d'équation (25) et de la droite  $\Gamma_2$  d'équation (26) dépendant des conditions locales permettront de déterminer les pentes des caractéristiques.

La courbe  $\Gamma_1$  comporte une portion fermée très proche du cercle centré à l'origine et de rayon  $\sqrt{\epsilon}$  ( $\epsilon$  étant faible,  $X$  et  $Y$  le sont aussi et  $X^2Y^2$  est négligeable devant  $X^2$  et  $Y^2$ ).



On peut remarquer qu'il y a toujours au moins deux solutions correspondant aux branches asymptotiques de  $\Gamma_1$ .

On a alors :

$$c = V_2 - Y\sqrt{g(H_2 - H_1)} \quad (27)$$

Lorsque  $Y$  tend vers  $\pm 1$ , on retrouve les pentes caractéristiques des écoulements homogènes graduellement variés. C'est pourquoi on appelle celles-ci caractéristiques du système d'ondes externes.

Les deux autres racines correspondront aux ondes internes et existeront si la distance de l'origine à la droite  $\Gamma_2$  est inférieure au rayon du cercle, ce qui conduit à :

$$\boxed{(V_1 - V_2)^2 < \epsilon g H_2} \quad (28)$$

On a toujours la relation (27), mais  $Y$  étant beaucoup plus faible ( $|y| < \sqrt{\epsilon}$ ), les valeurs de  $c$  de ce cas seront très inférieures aux valeurs du cas précédent.

En assimilant la portion fermée de  $\Gamma_2$  au cercle centré à l'origine et de rayon  $\sqrt{\epsilon}$ , on trouve :

$$c = V_1 \frac{(H_2 - H_1)}{H_2} + \frac{H_1}{H_2} V_2 \pm \sqrt{H_1 \frac{(H_2 - H_1)}{H_2^2} [g\epsilon H_2 - (V_1 - V_2)^2]} \quad (29)$$

Pour résumer, lorsque la condition (28) est réalisée, l'équation (23) a quatre racines réelles et le système est alors totalement hyperbolique.

Pour écrire que l'équation (22) est indéterminée, il reste à annuler le déterminant de la matrice  $A_x - cA_t$  dans laquelle on a remplacé un vecteur colonne par le vecteur colonne second membre :

$$\vec{B} - A_t \frac{d\vec{W}_0}{dt}$$

On obtient finalement, dans le cas où  $S_1$  n'est pas nul :

$$\begin{aligned} -Kg\varepsilon \frac{dz_1}{dt} + B_2(V_2 - c) \frac{dz_2}{dt} - KV_1 \frac{dV_1}{dt} \\ + \frac{Q_2}{V_2 - c} \frac{dV_2}{dt} + \frac{K}{S_1}(V_1 - c) \frac{dQ_1}{dt} - \frac{dQ_2}{dt} \\ = -KcF_1 + \frac{cS_2}{V_2 - c} F_2 \end{aligned} \quad (30)$$

où :

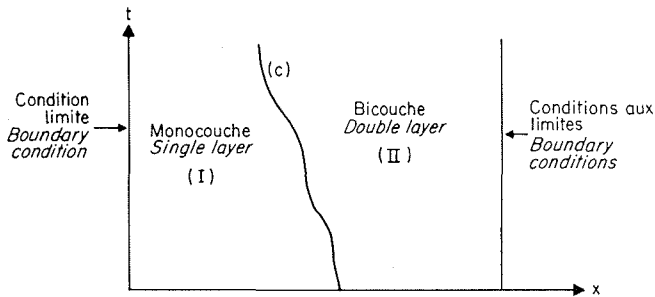
$$K = \frac{S_1 B_1 (V_2 - c)}{g\varepsilon S_1 - B_1 (V_1 - c)^2} \quad (31)$$

Sous réserve que les racines de l'équation (23) soient toutes réelles, par chaque point du plan  $(x, t)$ , il passe quatre courbes caractéristiques et sur chacune d'elles la relation (30) est vérifiée. Cette remarque servira aux limites de l'intervalle d'intégration en  $x$  où la méthode du point courant ne peut pas s'appliquer, mais les seules caractéristiques utilisables sont celles qui proviennent de l'intervalle d'intégration.

2. **Enoncé mathématique du problème.**

Voulant étudier la forme du coin salé sur toute son étendue lors de ses déplacements, nous sommes conduits à prendre une limite amont telle qu'il n'y existe plus qu'une couche d'eau douce. Nous introduisons donc une nouvelle difficulté, puisqu'à chaque instant il va falloir maintenant déterminer la section où la hauteur du coin salé devient nulle.

Finalement, nous pouvons donc séparer le domaine d'intégration en deux parties, la partie amont (I) où il n'y aura qu'une seule couche, la partie aval (II) où seront superposées les deux couches, ces deux domaines étant séparés par la courbe  $(c)$  représentant le déplacement au cours du temps du front du coin salé, et sur laquelle les solutions de la couche externe devront se raccorder et le débit et la hauteur de la couche interne être nuls.



Dans la partie (I) le système à résoudre sera celui des équations des écoulements en rivières de Saint-Venant qu'on peut retrouver en faisant dans le système obtenu plus haut :

$$Q_1 = S_1 = V_1 = 0$$

3. **Domaine amont à une couche. Condition limite amont.**

Le domaine amont ayant été choisi tel qu'il n'y existe plus de couche salée, les équations se réduisent à :

$$\frac{\partial Q_2}{\partial x} + B_2 \frac{\partial z_2}{\partial t} = 0 \quad (32)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial t} + V_2 \frac{\partial V_2}{\partial x} + g \frac{\partial z_2}{\partial x} = F_2 = -c_f \frac{V_2 |V_2|}{S_2} P_2 \quad (33)$$

$$Q_2 = S_2 V_2$$

L'équation donnant les pentes caractéristiques devient dans ce cas :

$$gS_2 - B_2 (V_2 - c)^2 = 0$$

ce qui donne :

$$c = V_2 \pm \sqrt{\frac{gS_2}{B_2}} \quad (34)$$

et la relation sur la caractéristique s'écrit :

$$dQ_2 + B_2 (c - V_2) dz_2 + \frac{Q_2}{c - V_2} dV_2 = \frac{cS_2 F_2}{c - V_2} dt \quad (35)$$

Près de l'embouchure d'un fleuve, l'écoulement étant fluvial :

$$V_2 < \sqrt{\frac{gS_2}{B_2}}$$

les deux caractéristiques au point amont ont des pentes de signe opposé.

En ce point, seule la caractéristique à pente négative est donc utilisable et nous devons donner une autre condition : lois de débit ou de cote en fonction du temps.

4. **Conditions limites aval. Domaine aval à deux couches.**

Pour le domaine aval, les pentes des caractéristiques sont données par l'équation (23), mais seules les caractéristiques ayant une pente positive sont utilisables. L'écoulement étant fluvial, les deux caractéristiques externes ont des pentes de signe opposé et on remplace la caractéristique négative inutilisable par la loi de variation de la cote de la surface libre. Nous ferons, d'autre part, l'hypothèse qu'en raison de l'élargissement brusque, les ondes internes venant de la mer ne peuvent franchir l'embouchure; deux cas sont donc possibles : le premier avec deux caractéristiques internes positives, le second avec une caractéristique interne positive et une caractéristique interne à pente nulle, la seconde condition à imposer étant dans ce cas  $c = 0$ .

L'équation du quatrième degré (23) est résolue numériquement à chaque pas en temps. La planche I donne un exemple de variation de  $Q_1, Q_2, z_1, z_2$  sous l'influence de la marée.

5. **Conditions au front du coin salé.**

Le front est défini comme la section où le tirant d'eau salée devient nul. Si dans l'équation (23) nous faisons  $S_1 = 0$ , nous obtenons pour les ondes inter-

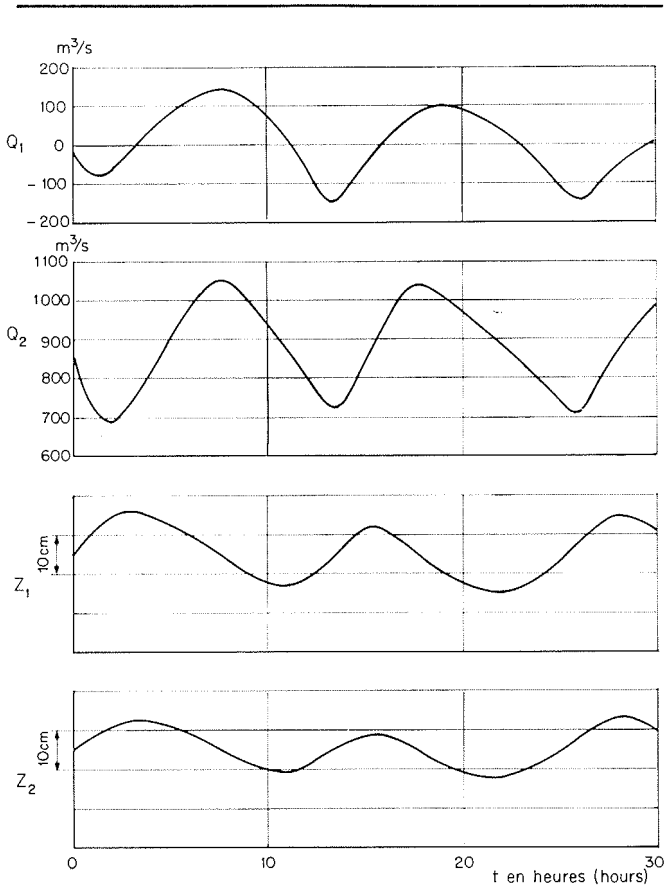


Planche I/

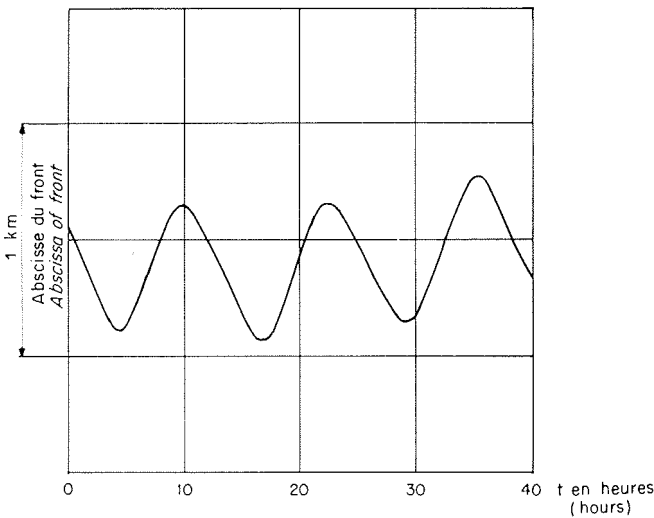


Planche II/

nes la solution double  $c = V_1$ , ce qui montre que le front avance avec la vitesse  $V_1$ .

Nous pouvons aussi raisonner sur l'équation (24) et en faisant tendre  $H_1$  vers zéro, la droite ( $\Gamma_2$ ) du paragraphe 3.1, tend vers la position limite, d'équation :

$$Y = \frac{V_2 - V_1}{gH_2}$$

ce qui donne comme solution du système (25) (26)  $Y = \pm 1$ , donc :

$$c = V_2 \pm \sqrt{gH_2}$$

pour les ondes externes et  $c = V_1$  solution double pour les ondes internes.

D'autre part, au front, l'équation de continuité s'écrit :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V_1 \frac{\partial}{\partial x}\right) H_1 = -H_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} - V_1 \frac{H_1}{B_1} \frac{\partial B_1}{\partial x} = 0$$

ce qui exprime bien que dans le plan  $(t, x)$  la courbe  $(c)$ , lieu des points où  $H_1 = 0$ , a pour pente  $V_1$ , c'est-à-dire que le front avance avec la vitesse  $V_1$ .

La planche II donne un exemple de mouvement du front du coin salé du Grand-Rhône sous l'influence de la marée.

#### 4. Résolution numérique

##### 1. Point courant.

La méthode dite des caractéristiques étant inapplicable ici en raison du nombre des caractéristiques, pour résoudre le système des quatre équations aux dérivées partielles, nous utiliserons le schéma explicite aux différences finies de Lax-Wendroff [7]. Ce schéma s'appliquant à des équations écrites sous forme conservative, écrivons notre système différentiel sous une telle forme. On obtient :

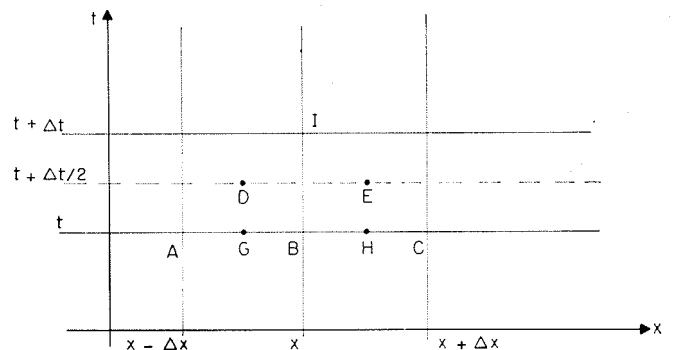
$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial S_1}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial x} + \frac{\partial S_2}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} V_1^2 + g\epsilon z_1 + g(1 - \epsilon) z_2 \right) = F_1$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} V_2^2 + g z_2 \right) = F_2$$

Raisonnons dans le plan  $x, t$  :



A l'instant  $t$ , nous supposons connue la fonction  $F(x, t)$  et nous cherchons à calculer sa valeur à l'instant  $t + \Delta t$ .

Pour la simplicité de l'exposé, raisonnons sur une seule équation à une seule inconnue et supposons que  $F(x, t)$  soit solution de l'équation :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = c$$

Nous procédons en deux temps; nous déterminons d'abord la fonction inconnue aux deux points D et E, puis ensuite en I.

L'équation différentielle après discrétisation (la dérivée en  $x$  étant centrée, mais la dérivée en  $t$  étant prise « en avant ») donne :

$$\frac{F_D - F_G}{\Delta t/2} + \frac{F_B - F_A}{\Delta x} = c$$

et avec :

$$F_G = \frac{1}{2}(F_A + F_B)$$

nous pouvons déterminer  $F_D$  et nous obtenons de la même façon  $F_E$ . Pour calculer  $F_I$ , nous discrétisons à nouveau l'équation différentielle, mais les deux dérivées sont prises cette fois centrées :

$$\frac{F_I - F_B}{\Delta t} + \frac{F_E - F_D}{\Delta x} = c$$

**Stabilité numérique :**

Pour le schéma de Lax-Wendroff, la condition de stabilité numérique s'écrit :

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} > |c| \text{ ce qui impose } \Delta t < \frac{\Delta x}{|c|}$$

La plus grande en valeur absolue des quatre valeurs de  $c$  est celle qui correspond à la caractéristique positive de l'écoulement supérieur.

Cette valeur est voisine de :

$$V_2 + \sqrt{\frac{gS_2}{B_2}}$$

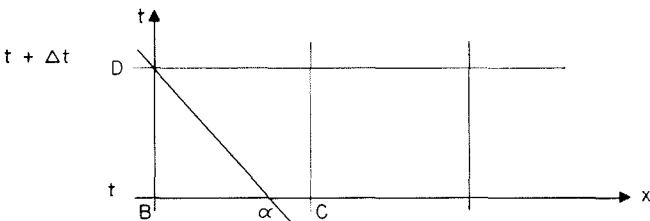
Dans le programme écrit pour le Bas-Rhône, nous avons choisi  $\Delta x = 1 \text{ km}$  et  $\Delta t = 80 \text{ s}$ .

D'après l'exposé même de la méthode, nous voyons qu'elle n'est pas applicable aux limites de l'intervalle d'intégration de la variable  $x$ .

**2. Sections limites amont et aval.**

La méthode du point courant étant inapplicable en ces points, nous allons utiliser les caractéristiques.

**Méthode :**



Les seules caractéristiques dont nous disposons sont celles qui proviennent de l'intérieur du domaine d'intégration.

La relation vérifiée sur la caractéristique est discrétisée, les coefficients étant évalués au point B et les inconnues en  $\alpha$  interpolées entre B et C. Elle

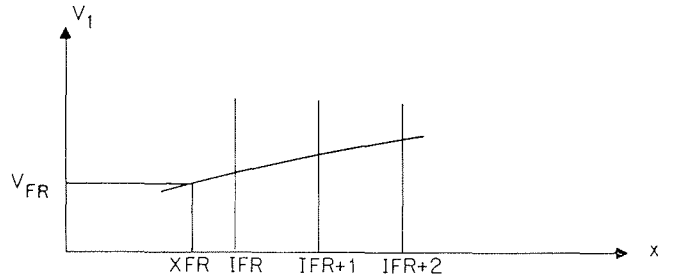
donne une équation portant sur les fonctions inconnues en D.

**3. Traitement du front.**

Au front du coin salé, la méthode du point courant n'est pas applicable pour la couche inférieure.

La position du front se trouve en général entre deux sections de notre maillage de discrétisation et la première question qui se pose est l'avance de ce front, c'est-à-dire de trouver sa position à l'instant  $t + \Delta t$ , connaissant sa position à l'instant  $t$ .

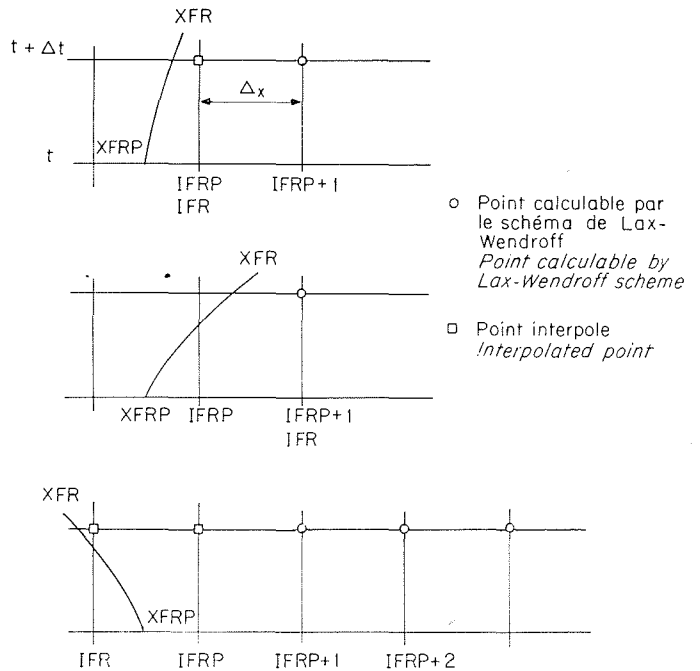
La vitesse d'avance du front est la vitesse  $V_1$  de l'eau salée dans cette section. Nous allons évaluer cette vitesse par une extrapolation parabolique entre les valeurs de la vitesse aux trois points du maillage immédiatement en aval.



Pour trouver la nouvelle position du front, il nous reste à écrire :

$$X_{FR}(t + \Delta t) = X_{FR}(t) + V_{FR}\Delta t$$

Le pas en temps étant faible, le front ne peut pas se déplacer de plus d'un  $\Delta x$  à la fois et trois cas sont possibles :



Les points dont l'indice est compris entre IFR et IFRP, bornes comprises, ne sont pas calculables par le schéma du point courant, mais connaissant les valeurs de  $S_1$  et  $Q_1$  aux points d'indice IFRP + 1 et IFRP + 2 et sachant que  $S_1$  et  $Q_1$  sont nulles au point d'abscisse XFR, nous pouvons les calculer par interpolation parabolique.

## 5. Conditions initiales. Coin salé permanent

Le système aux dérivées partielles à résoudre étant du premier ordre en  $t$ , nous avons besoin à l'instant initial des grandeurs inconnues.

Nous avons choisi comme état initial un régime permanent que nous pouvons obtenir par une intégration d'un système différentiel relativement simple.

Celui-ci s'écrit, en faisant dans le système obtenu précédemment, nulles toutes les dérivées en temps et :

$$\frac{\partial Q_2}{\partial x} = 0 \quad Q_1 = 0$$

Il vient alors :

$$\begin{cases} g\varepsilon \frac{dz_1}{dx} + g(1-\varepsilon) \frac{dz_2}{dx} = F_1 \\ V_2 \frac{dV_2}{dx} + g \frac{dz_2}{dx} = F_2 \end{cases} \quad (36)$$

avec  $V_2 S_2 = Q_2$ , constante donnée :

$$\begin{aligned} F_1 &= + \frac{1}{2} c_f V_2 |V_2| \frac{B_1}{S_2} \\ F_2 &= - \frac{1}{2} c_f V_2 |V_2| \frac{P_2}{S_2} - \frac{1}{2} c_f V_2 |V_2| \frac{B_1}{S_2} \end{aligned}$$

L'intégration du système (36) nécessite la connaissance dans la section aval de  $z_1$  et  $z_2$ .

$z_1$  est fixée par le niveau de la mer et, pour déterminer  $z_2$ , on admettra que la section où le fleuve débouche dans la mer est critique pour les ondes d'interface en raison du brusque élargissement. Des études faites par H. Stommel et G.H. Farmer [8] justifient cette hypothèse.

La condition  $c = 0$ , définissant une section critique, introduite dans l'équation (23) conduit à :

$$V_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon g S_2}{B_1 + \varepsilon (B_2 - B_1)}} \quad \text{et} \quad Q_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon g S_2^3}{B_1 + \varepsilon (B_2 - B_1)}}$$

ce qui permet de calculer  $S_2$  puis  $H_1$  et  $H_2$ .

L'intégration du système est réalisée numériquement par un schéma aux différences finies.

## Références

- [1] BATA. — « Bases théoriques des courants de densité » — Compte rendu de la première réunion du Comité National Yougoslave des Grands Barrages, 18-23 septembre 1952. Recirculation of cooling water in rivers and canals. *Journal of the Hydraulics Division A.S.C.E.*, juin 1957.
- [2] KEULEGAN. — Reports on model laws for density currents. *National Bureau of Standards*, n°s 5482, 5168, 5831.
- [3] SCHILF et SCHONFELD. — Theoretical considerations on the motion of salt and fresh water. *AIRH* (1953).
- [4] IPPEN et HARLEMAN. — One dimensional analysis of salinity intrusion in estuaries. *Tech. Bull.*, n° 5, juin 1961. Committee on tidal hydraulics. Corps of Engineers, U.S. Army.
- [5] ROUSE. — *Engineering Hydraulics*.
- [6] ABBOTT. — An Introduction to the Method of Characteristics. Thames and Hudson (1966).
- [7] RICHTMEYER. — Cours d'été 1965.
- [8] STOMMEL (H.) et FARMER (G.H.). — Abrupt change in width in two layer open channel flow. *Journal of Marine Research*, vol. XI, n° 2.

## Discussion

Président : M. HALBRONN

M. le Président remercie les auteurs de cette communication et en souligne l'intérêt, à un moment où de nombreuses recherches sont en cours sur le « coin salé ».

M. QUETIN demande si les auteurs ont bien adopté une « expression du frottement » à l'interface de la forme :

$$k |V_1 - V_2| (V_1 - V_2)$$

$k$  étant une constante. Cela semble être *a priori* une solution raisonnable, compte-tenu de l'insuffisance actuelle de nos connaissances en la matière.

M. BOULOT répond affirmativement à cette question.

M. VREUGDENHIL pense que l'on aurait pu utiliser avec plus de facilité le schéma de Lax-Wendroff pour calculer le front du coin salé en considérant que celui-ci est comparable au mascaret.

M. BOULOT considère qu'il est préférable d'utiliser la propriété de la caractéristique double et de la valeur  $V_1$ , afin de connaître la vitesse avec laquelle se déplace le front, information qui a son importance.

**Abstract**

**A numerical determination of salt wedge movements**

**by F. Boulot \*, P. Braconnot \* and Ph. Marvaud \***

---

Salt wedges are apt to form in river estuaries under certain flow conditions and eventually to extend several kilometres upstream. Where the river bed is fairly even and the tide not strong enough for sudden flow reversals to take place, there is little exchange between the two layers and an interface can be assumed to exist. Slight exchange does in fact frequently take place, however, and the interface can be defined as the locus of points at which the fluid density is the mean of those of the two layers. The problem is thus one of unsteady flow of two fluids of different densities with a free surface and an interface.

The equations assuming gradually varying flows lead to a differential system comprising equations (7), (8), (10), (11), (14) and (15). Equation (23) gives the slopes of the four characteristics in each section and relationship (30) is satisfied on each characteristic. If condition (28) is satisfied the four characteristics are real and the problem is hyperbolic.

Equation (23) enables the characteristics of the internal wave system to be distinguished from those of the external wave system; relationship (29) gives an approximate value for the internal wave system slopes  $c$ .

The considered region comprises an upstream part without a salt layer and a downstream part with the two layers one above the other; the salt wedge front progressing at the same speed as the lower layer  $V_1$  comes between the two layers.

The problem is solved numerically for the normal point with the aid of a Lax-Wendroff explicit finite difference scheme. The characteristics are used at the ends of the integration domain, but as only those originating inside the domain are used, boundary conditions are required. A discharge/time or stage/time relationship is assumed upstream, and downstream (at the river mouth) a free surface variation relationship. If a second downstream condition is required, a critical section is assumed to become established at the mouth of the river.

The steady flow conditions obtained by numerical integration of system (36) are taken as the initial conditions.

A computation programme has been developed for a study of salt wedge movements in the Grand Rhône below Arles.

---

\* Laboratoire National d'Hydraulique (E.R.N.U.T.H.).