LES CLASSIQUES DE LA MÉCANIQUE DES FLUIDES ET DE L'HYDRAULIQUE

SÉRIE PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE ENZO O. MACAGNO

Les textes de cette série seront publiés sans corrections d'aucune sorte, excepté lorsqu'il s'agira d'erreurs typographiques évidentes. Le lecteur sera ainsi confronté avec le texte original tel qu'il se présentait. Les traductions seront aussi littérales que possible, de façon à permettre l'accès le plus direct au texte original.

Les suggestions concernant les textes à inclure dans cette série seront les bienvenues, spécialement si des indications précises sont données, dans le cas d'articles très longs ou de livres, sur les parties considérées comme les plus importantes.

CLASSICAL WORKS IN FLUID MECHANICS AND HYDRAULICS

A SERIES SELECTED BY ENZO O. MACAGNO

No attempt to correct errors, if they would be detected, will be made, unless they appear as obvious misprints. Each reader will be confronted with the original writing as it was. Translations in this series are intended to be quite literal with the purpose of providing an access as direct as possible to the original form of the writing.

Suggestions to include material in this series will be most welcome, especially if indications are given of the excerpts that are considered valuable in the case of long papers or books.

GALILEO GALILEI

(1564-1642)

DISCORSI E DIMOSTRAZIONI MATEMATICHE
INTORNO A DUE NUOVE SCIENZE ATTENENTI ALLA MECANICA
& I MOVIMENTI LOCALI

Leyde, Elzevir (1638). Extraits - Excerpts

English translation by Henry CREW and Alfonso de SALVIO
(New York, The Macmillan Company, 1914)

Because the theory and the practice of similitude are of paramount importance in hydraulics and in fluid mechanics, excerpts from discussions on similitude by Galileo Galilei have been preferred to excerpts from his contributions to hydrostatics and hydromechanics.

En raison de l'importance capitale de la théorie et de la pratique de la similitude pour l'hydraulique et la mécanique des fluides, on a préféré reproduire ici des extraits des discussions de Galilée sur la similitude plutôt que de ses contributions à l'hydrostatique et à la mécanique des liquides.

DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue scienze

Attenenti alla
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI,

del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filosofo e Matematico primario del Serenissimo
Grand Duca di Toscana.

Con vna Appendice del centro di gravità d'alcuni Solidi.

IN LEIDA,
Appresso gli Elsevirii. M. D. C. XXXVIII.

GIORNATA PRIMA.

Interlocutori,

SALVATI, SAGREDO,
E SIMPLICIO.

Salu.

Argo campo di filosofare à g'intelletti specolatiui parmi che porga la frequente pratica del famoso Arsenale di Voi Sig. Veneziani, & in particolare in quella parte, che Mecanica si domanda: atteso che quini ogni sorte di strumento, e di machina vien continuamente posta in opera da numero grande d'artefici, trà i quali e per l'esseruazioni fatte da i loro antecessori, e per quelle, che di propria auuertenza vanno continuamente per se stessi facendo, è forza, che ne ne siano de i peritissimi, e di finissimo discorso.

Sagr. V. S. non s'inganna punto: & io come per natura curioso frequento per mio diporto la visita di questo luogo, e la pratica di questi, che noi per certa preminenza, che tengono sopra 'l resto della maestranza, comandiamo Proti; la conferenza de i quali mi hà più volte aiutato nell' inuestigazione della ragione di effetti non solo marauigliosi, mà reconditi ancora, e quasi inopinabili: è vero che tal volta anco mi hà messo in confusione, & in disperazione di poter penetrare, come possa seguire quello, che lontano da ogni mio concetto mi dimostra il senso esser vero; e pur quello, che poco fa ci diceua quel buon vecchìo, è vn dettato, & vna proposizione ben assai vulgata, mà però io la reputaua in tutto vana, come molte

A altre,

FIRST DAY

INTERLOCUTORS: SALVATI, SAGREDO
AND SIMPLICIO

SALV. The constant activity which you Venetians display in your famous arsenal suggests to the studious mind a large field for investigation, especially that part of the work which involves mechanics; for in this department all types of instruments and machines are constantly being constructed by many artisans, among whom there must be some who, partly by inherited experience and partly by their own observations, have become highly expert and clever in explanation.

SAGR. You are quite right. Indeed, I myself, being curious by nature, frequently visit this place for the mere pleasure of observing the work of those who, on account of their superiority over other artisans, we call "first rank men". Conference with them has often helped me in the investigation of certain effects including not only those which are striking, but also those which are recondite and almost incredible. At times also I have been put to confusion and driven to despair of ever explaining something for which I could not account, but which my senses told me to be true. And notwithstanding the fact that what the old man told us a little while ago is proverbial

altre, che sono in bocca de i poco intelligenti, credo, da loro introdotte per mostrar di saper dir qualche cosa intorno a quello, di che non son capaci.

Salu. V. S. vuol forse dire di quell' ultimo pronunziato, ch'ei profferì, mentre ricercavamo d'intendere, per qual ragione faceuano tanto maggior apparecchio di sostegni, armamenti, & altri ripari, e fortificazioni intorno a quella gran Galeazza, che si doueua varare, che non si fa intorno a vasselli minori, doue egli rispose ciò farsi per evitare il pericolo di direnarsi, oppressa dal grandissimo peso della sua vasta mole, inconueniente, al quale non son soggetti i legni minori?

Sagr. Di cotesto intendo, e sopra tutto dell' ultima conclusione, ch'ei soggiunse, la quale io hò sempre stimata concetto vano del vulgo: cioè che in queste, & altre simili machine non bisogna argumentare dalle piccole alle grandi, perche molte inuentioni di machine riescono in piccolo, che in grandi poi non sussistono. Ma essendo che tutte le ragioni della meccanica hanno i fondamenti loro nella Geometria, nella quale non veggio, che la grandezza, e la piccolezza faccia i cerchi, i triangoli, i Cilindri, i Coni, e qualunque altre figure solide soggette ad altre passioni queste, & ad altre quelle, quando la machina grande sia fabricata in tutti i suoi membri conforme alle proporzioni della minore, che sia valida, e resistente all' esercizio, alquale ella è destinata, non sò vedere, perche essa ancora non sia esente da gl'incontri, che sopraggiugner gli possono sinistri, e destruttori.

Salu. Il detto del vulgo è assolutamente vano, e talmente vano, che il suo contrario si potrà profferire con altrettanta verità, dicendo, che molte machine si potranno far più perfette in grande, che in piccolo, come per esempio vn' Oriuolo, che mostri, e batta le hore, più giusto si farà d'una tal grandezza, che di vn' altra minore. Con miglior fondamento usurpano quel medesimo detto altri più intelligenti, i quali della rinetta di tali machine grandi non conforme a quello, che si raccoglie dalle pure, & astratte dimostrazioni Geome-

Geometriche, ne rimettono la causa nell' imperfezzione della materia, che soggiace a molte alterazioni, & imperfezzioni. Ma qui non sò s'io potrò senza inciampare in qualche nota di arroganza, dire che nè anco il ricorrere all' imperfezzioni della materia potenti a contaminare le purissime dimostrazioni Matematiche, basti a scusare l'inobbedienza delle machine in concreto alle medesime astratte, & ideali: tuttavia io pure il dirò affermando, che astruendo tutte l'imperfezzioni della Materia, e supponendola perfettissima, & inalterabile, e da ogni accidental mutazione esente, tuttavia il solo esser materiale fa, che la machina maggiore fabricata dell' istessa materia, e con l'istesse proporzioni, che la minore, in tutte l'altre condizioni risponderà con giusta simmetria alla minore, fuor che nella robustezza, e resistenza contro alle violente inuasioni: ma quanto più sarà grande tanto a proporzione sarà più debole. E perche io suppongo la materia essere inalterabile, cioè sempre l'istessa, è manifesto, che di lei, come di affezione eterna, e necessaria, si possano produr dimostrazioni non meno dell' altre schiette, e pure Matematiche. Però S. Sagr. reuochi pur l'opinione, che teneua, e forse insieme con tutti gli altri, che nella Meccanica han fatto studio, che le machine, e le fabbriche composte delle medesime materie con puntuale osservanza delle medesime proporzioni tra le loro parti debban' esser egualmente, ò per dir meglio proporzionalmente disposte al resistere, & al cedere alle inuasioni, & impeti esserni: perche si può Geometricamente dimostrare sempre le maggiori essere a proporzione men resistenti, che le minori: sì che ultimamente non solo di tutte le machine, e fabbriche artificiali, ma delle naturali ancora si vn termine necessariamente ascritto, oltre alquale nè l'arte, nè la natura possa trapassare: trapassar dico con offeruar sempre l'istesse proporzioni con l'identità della materia.

Sagr. Io già mi sento riuolgere il cervello, e quasi nugola dal baleno repentinamente aperta ingombrarmi la mente da momentanea, & insolita luce, che da lontano mi accenna, e subito confonde, & asconde imaginazioni straniere, & indigeste. E da quanto

A 2 ella

and commonly accepted, yet it seemed to me altogether false, like many another saying which is current among the ignorant; for I think they introduce these expressions in order to give the appearance of knowing something about matters which they do not understand.

SALV. You refer, perhaps, to that last remark of his when we asked the reason why they employed stocks, scaffolding and bracing of larger dimensions for launching a big vessel than they do for a small one; and he answered that they did this in order to avoid the danger of the ship parting under its own heavy weight [vasta mole], a danger to which small boats are not subject?

SAGR. Yes, that is what I mean; and I refer especially to his last assertion which I have always regarded as a false, though current, opinion; namely, that in speaking of these and other similar machines one cannot argue from the small to the large, because many devices which succeed on a small scale do not work on a large scale. Now, since mechanics has its foundation in geometry, where mere size cuts no figure, I do not see that the properties of circles, triangles, cylinders, cones and other solid figures will change with their size. If, therefore, a large machine be constructed in such a way that its parts bear to one another the same ratio as in a smaller one, and if the smaller is sufficiently strong for the purpose for which it was designed, I do not see why the larger also should not be able

to withstand any severe and destructive tests to which it may be subjected.

SALV. The common opinion is here absolutely wrong. Indeed, it is so far wrong that precisely the opposite is true, namely, that many machines can be constructed even more perfectly on a large scale than on a small; thus, for instance, a clock which indicates and strikes the hour can be made more accurate on a large scale than on a small. There are some intelligent people who maintain this same opinion, but on more reasonable grounds, when they cut loose from geometry and argue that the better performance of the large machine is owing to the imperfections and variations of the material. Here I trust you will not charge me with arrogance if I say that imperfections in the material, even those which are great enough to invalidate the clearest mathematical proof, are not sufficient to explain the deviations observed between machines in the concrete and in the abstract. Yet I shall say it and will affirm that, even if the imperfections did not exist and matter were absolutely perfect, unalterable and free from all accidental variations, still the mere fact that it is matter makes the larger machine, built of the same material and in the same proportion as the smaller, correspond with exactness to the smaller in every respect except that it will not be so strong or so resistant against violent treatment; the larger the machine, the greater its weakness. Since I assume matter to be unchangeable and always the same, it is clear that we are no

120 DIALOGO SECONDO

allungando, e non solo nell'uso trasuersale, mà ancora per lo lungo, in quel modo appunto che veggiamo vna corda lunghissima esser molto meno atta à reggere vn gran peso, che se fusse corta: onde io credo che vna verga di legno, ò di ferro più peso assai potrà reggere se sarà corta, che se sarà molto lunga; intendendo sempre usata per lo lungo, e non in trauerso; & anco messo in conto il suo proprio peso, che nella più lunga è maggiore.

Salu. Dubito S. Simp., che in questo punto voi con molti altri v'inganniate, se però hò ben compreso il vostro concetto, sì che voi vogliate dire, che vna corda lunga, v. gr., quaranta braccia non possa sostenere tanto peso, quanto se fusse vn braccio, ò due della medesima corda.

Simp. Coteſto hò voluto dire, e fin qui mi par proposizione assai probabile.

Salu. Mà io l'hò per falsa, non che per improbabile: se credo di poterui assai agevolmente cauare d'errore. Però ponghiamo questa corda AB fermata di sopra dal capo A, e dall'altro sia il Peso C, dalla cui forza debba essa corda essere rotta. Assegnatemi voi S. Simp. il luogo particolare doue debba seguir la rottura.

Simp. Sia nel luogo D.

Salu. Vi domando qual sia la cagione dello strapparsi in D.

Simp. È la causa di ciò, perche la corda in quella parte non era potente a reggere, v. gr., cento libbre di peso, quanto è la parte D B con la pietra C.

Salu. Adunque tutta volta che tal corda nella parte D venisse violentata dalle medesime cento libbre di peso, ella li si strapperebbe.

Simp. Così credo.

Salu. Mà ditemi ora; chi attaccasse il medesimo peso non al fine della corda B, mà vicino al punto D, come sarebbe in E,

(FIG. 21)

less able to treat this constant and invariable property in a rigid manner than if it belonged to simple and pure mathematics. Therefore, Sagredo, you would do well to change the opinion which you, and perhaps also many other students of mechanics, have entertained concerning the ability of machines and structures to resist external disturbances, thinking that when they are built of the same material and maintain the same ratio between parts, they are able equally, or rather proportionally, to resist or yield to such external disturbances and blows. For we can demonstrate by geometry that the large machine is not proportionately stronger than the small. Finally, we may say that, for every machine and structure, whether artificial or natural, there is set a necessary limit beyond which neither art nor nature can pass; it is here understood, of course, that the material is the same and the proportion preserved.

SAGR. My brain already reels. My mind, like a cloud momentarily illuminated by a lightning-flash, is for an instant filled with an unusual light, which now beckons to me and which now suddenly mingles and obscures strange, crude ideas. From what you have said it appears to me impossible to build two similar structures of the same material, but of different sizes and have them proportionately strong; and if this were so, it would not be possible to find two single poles made of the same wood which shall be alike in strength and resistance but unlike in size.

DEL GALILEO.

121

in E, ò vero legasse la corda non nella altezza A, mà pur vicina, e sopra al punto medesimo D come farebbe in F, ditemi, dico, se il punto D sentirebbe il medesimo peso delle cento libbre.

Simp. Sentirebbe, accompagnando però il pezzo di corda E B con la pietra C.

Salu. Se dunque la corda nel punto D vien tirata dalle medesime cento libbre di peso, si romperà per la vostra concessione; e pure la F E è un piccol pezzo della lunga A B, come dunque volete più dire, che la corda lunga sia più debole della corta? Contentatevi dunque d'esser cauato d'un' errore, nel quale hauete hauuto molti compagni, & anco per altro molto intelligenti. E seguitiamo innanzi: & hauendo dimostrato i Prismi, e Cilindri crescere il lor momento sopra le proprie resistenze secondo i Quadrati delle lunghezze loro (mantenendo però sempre la medesima grossezza) e parimente gli egualmente lunghi, mà differenti in grossezza crescer le lor resistenze secondo la proporzione de i Cubi de i lati, ò Diametri delle lor basi, passiamo à inuestigare quello che accaggia à tali solidi differenti in lunghezza, e grossezza, ne i quali io offeruo che

I Prismi, e Cilindri di diuersa lunghezza, e grossezza hanno le lor resistenze all'esser rotti di proporzione composta della proporzione de i Cubi de i Diametri delle lor basi, e della proporzione delle lor lunghezze permutatamente prese.

Prop.
V.

Siano tali due Cilindri questi A B C, D E F. Dico, la resistenza del Cilindro A C alla resistenza del Cilindro D F, hauer la proporzione composta della proporzione del Cubo del Diametro A B al Cubo del Diametro D E, e della proporzione della lunghezza E F alla lunghezza B C. Pongasi la E G eguale alla B C, e delle linee A B, D E sia terza proporzionale la H, e quarta la I, e come la E F alla B C, e delle linee, così sia la I alla S. E perche la resistenza del Cilindro A C alla resistenza del Cilindro D G, è come il Cubo A B al Cubo D E, cioè come la linea A B alla linea I, e la resistenza del Cilindro D G alla resistenza del Cilindro D F come la lunghezza

$\frac{I}{S} = \frac{I}{S} = \frac{I}{S}$ F E

SECOND DAY

PROPOSITION V

Prisms and cylinders which differ in both length and thickness offer resistances to fracture [i. e., can support at their ends loads] which are directly proportional to the cubes of the diameters of their bases and inversely proportional to their lengths.

Let ABC and DEF be two such cylinders; then the resistance [bending strength] of the cylinder AC bears to the resistance of the cylinder DF a ratio which is the product of the cube of the diameter AB divided by the cube of the diameter DE, and of the length EF divided by the length BC. Make EG equal to BC: let H be a third proportional to the lines AB and DE; let I be a fourth proportional, $[AB/DE = H/I]$: and let I: S = EF: BC.

Now since the resistance of the cylinder AC is to that of the cylinder DG as the cube of AB is to the cube of DE, that is, as the length AB is to the length I; and since the resistance of the cylinder DG is to that of the cylinder DF as the length FE is to EG, that is, as I is to S, it follows that the length AB is to S as the resistance of the cylinder AC is to that of the cylinder DF. But the line AB bears to S a ratio which is the product of AB/I and I/S. Hence the resistance [bending

122 DIALOGO SECONDO

FE alla EG, cioè come la linea I alla S, adunque per l'egual proporzione, come la resistenza del Cilindro AC alla resistenza del Cilindro DF, così la linea AB alla S, ma la linea AB alla S, ha la proporzione composta della AB alla I, e della I alla S, adunque la resistenza del Cilindro AC alla resistenza del Cilindro DF, ha la proporzione composta della AB alla I, cioè del Cubo di AB al Cubo di DE, e della proporzione della linea I alla S, cioè della lunghezza EF alla lunghezza BC, che è quello, che intendono di dimostrare.

Dopo la dimostrata Proposizione voglio che consideriamo quello, che accaggia tra i Cilindri, e Prismi simili, de i quali dimostreremo, come

Prop. VI. De i Cilindri, e Prismi simili i momenti composti cioè risultanti dalle lor gravità, e dalle loro lunghezze, che sono come Leue, hanno tra di loro proporzione sesquialtera di quella, che hanno le resistenze delle medesime lor basi.

Per il che dimostrare segniamo i due Cilindri simili AB, CD. Dico, il momento del Cilindro AB per superare la resistenza della sua base B, al momento di CD per superare la resistenza della sua base D, haue sesquialtera proporzione di quella, che ha la medesima resistenza della base B alla resistenza della base D, e perche i momenti de i solidi AB, CD per superar le resistenze delle lor basi B D son composti delle lor gravità, e delle forze delle lor Leue, e la forza della

Leua

(FIG. 22)

strength] of the cylinder AC bears to the resistance of the cylinder DF a ratio which is the product of AB/I (that is, AB^3/DE^3) and of I/S (that is, EF/BC); which is what I meant to prove.

This proposition having been demonstrated, let us next consider the case of prisms and cylinders which are similar. Concerning these we shall show that,

PROPOSITION VI

In the case of similar cylinders and prisms, the moments [stretching forces] which result from multiplying together their weight and length [i. e., from the moments produced by their own weight and length], which latter acts as a lever-arm, bear to each other a ratio which is the sesquialteral of the ratio between the resistances of their bases.

In order to prove this let us indicate the two similar cylinders by AB and CD: then the magnitude of the force [momento] in the cylinder AB, opposing the resistance of its base B, bears to the magnitude [momento] of the force at CD, opposing the resistance of its base D, a ratio which is the sesquialteral of the ratio between the resistance of the base B and the resistance of the base D. And since the solids AB and CD, are effective in opposing the resistances of their bases B and D, in proportion to their weights and to the mechanical advantages [forze] of

DEL GALILEO.

123

Leua AB è eguale alla forza della Leua CD, e questo perche la lunghezza AB al semidiametro della base B, ha la medesima proporzione (per la similitudine de Cilindri) che la lunghezza CD al se-

midiametro della base D, resta che l'momento totale del Cilindro AB al momento totale di CD, sia come la sola gravità del Cilindro AB alla sola gravità del Cilindro CD, cioè come l'istesso Cilindro AB all'istesso CD; ma questi sono in triplicata proporzione de i Diametri delle basi loro B D, e le resistenze delle medesime basi, essendo tra di loro come l'istesse basi, sono in conseguenza in duplicata proporzione de i medesimi loro Diametri; adunque i momenti de i Cilindri son in sesquialtera proporzione delle resistenze delle basi loro.

Simp. Questa Proposizione mi è veramente giunta non solamente nuoua, ma inaspettata e nel primo aspetto assai remota dal giudizio, che io ne hauerei coniettualmente fatto: imperò che essendo tali figure in tutto l'restante simili, harei tenuto per fermo, che anco i momenti loro verso le proprie resistenze haueffero ritenuta la medesima proporzione.

Sagr. Questa è la dimostrazione di quella proposizione, che nel principio de nostri ragionamenti dissi parermi discorger per ombra.

Salu. Quello che ora accade al S. Simp. auuenne per alcun tempo à me credendo che le resistenze di solidi simili fusser simili, sin che certa, ne anco molto fissà, è accurata osservazione mi pareua rappresentarmi, ne i solidi simili non mantenersi un tenore eguale nelle loro robustezze, ma i maggiori esser meno atti à patire gli euenti violenti, come rimaner più offesi dalle cadute gli huomini grandi, che

22

(FIG. 23)

their lever arms respectively, and since the advantage [forza] of the lever arm AB is equal to the advantage [forza] of the lever arm CD (this is true because in virtue of the similarity of the cylinders the length AB is to the radius of the base B as the length CD is to the radius of the base D), it follows that the total force [momento] of the cylinder AB is to the total force [momento] of the cylinder CD as the weight alone of the cylinder AB is to the weight alone of the cylinder CD, that is, as the volume of the cylinder AB [l'istesso cilindro AB] is to the volume CD [all'istesso CD]: but these are as the cubes of the diameters of their bases B and D; and the resistances of the bases, being to each other as their areas, are to each other consequently as the squares of their diameters. Therefore the forces [momenti] of the cylinders are to each other in the sesquialteral ratio of the resistance of their bases.

SIMP. This proposition strikes me as both new and surprising: at first glance it is very different from anything which I myself should have guessed: for since these figures are similar in all other respects, I should have certainly thought that the forces [momenti] and the resistances of these cylinders would have borne to each other the same ratio.

SAGR. This is the proof of the proposition to which I referred, at the very beginning of our discussion, as one imperfectly understood by me.

SALV. For a while, Simplicio, I used to think, as you do,

124 DIALOGO SECONDO

che i piccol fanciulli, e, come da principio diceuamo, cadendo dall' medesima altezza vedesi andare in pezzi una gran traua, ò una colonna, mà non così un piccolo corrente, ò un piccol Cilindro di marmo. Questa tal quale offeruazione mi destò la mente all' inuestigazione di quello, che ora son per dimostrarui, proprietà veramente ammirabile, poiche trà le infinite figure solide simili trà di loro pur due non vene sono i momenti delle quali verso le proprie resistenze ritenghino la medesima proporzione.

Simp. Ora mi fate souenire non sò che posto da Aristotele trà le sue *Questioni Mechaniche*, mentre vuol render la ragione, onde auenga che i legni quanto più son lunghi, tanto più son deboli, e più si piegano ben che i più corti sieno più sottili, e i lunghi più grossi; e se io ben mi ricordo, ne riduce la ragione alla semplice Leua.

Salu. E' verissimo, e perche la soluzione non par che tolga interamente la ragion del dubitare Mons. di Gueuara, il quale veramente con i suoi dottissimi Comentarîi hà altamente nobilitata, e illustrata quell' Opera, si estende con altre più acute specolazioni per sciorre tutte le difficoltà restando però esso ancora perplesso in questo punto, se crescendo con la medesima proporzione le lunghezze, e le grossezze di tali solide figure, si deua mantenere l'istesso tenore nelle loro robustezze, e resistenze nell' esser rotti, & anco nel piegarli. Io dopo un lungo pensarui hò in questa maniera risuonato quello che seguentemente son per apportarui. E prima dimostrarò che

Prop. VII. De i Prismi, ò Cilindri simili graui vn solo, e vnico è quello, che si riduce (grauato dal proprio peso) all' ultimo stato trà lo spezzarsi, e l' sostenersi intero: sì che ogni maggiore, come impotente à resistere al proprio peso, si romperà, e ogni minore resiste à qualche forza che gli venga fatta per romperlo.

Sia il Prisma graue A B ridotto alla somma lunghezza di sua consistenza, sì che allungato un minimo di più si rompesse: Dico questo esser' vnico trà tutti i suoi simili (che pur sono infiniti) atto ad esser ridotto

DEL GALILEO.

125

ridotto in tale stato ancipite, sì che ogni maggiore oppresso dal proprio peso si spezzerà, & ogni minore nò, anzi potrà resistere à qualche aggrauio di noua violenza, oltre à quella del proprio peso. Sia

prima il Prisma C E simile, e maggiore di A B. Dico questo non poter consistere, mà rompersi superato dalla propria grauità. Pongasi la parte C D lunga quanto A B. E perche la resistenza di C D à quella di A B, è come il Cubo della grossezza di C D, al Cubo della grossezza di A B, cioè come il Prisma C E al Prisma A B, (essendo simili) adunque il peso di C E è il sommo, che possa esser sostenuto nella lunghezza del Prisma C D, mà la lunghezza C E è maggiore: adunque il Prisma C E si romperà. Altra sia F G minore, si dimostrerà similmente (posta F H eguale alla B A) la resistenza di F G à quella di A B, esser come il Prisma F G al Prisma A B, quando la distanza A B, cioè F H fusse eguale alla F G, mà è maggiore: adunque il momento del Prisma F G posto in G, non basta per romper' il Prisma F G.

Sagr. Chiarissima, e breue dimostrazione concludente la verità, e necessit' d'una Proposizione, che nel primo aspetto sembra assai remota dal verisimile. Bisognerebbe dunque alterare assai la proporzione trà la lunghezza, e la grossezza del Prisma maggiore con l'ingrossarlo, ò scorciarlo, acciò si riducesse allo stato ancipite trà l' reggersi, e lo spezzarsi, e l' inuestigazione di tale stato penso che potesse esser' altrettanto ingegnosa.

Salu. Anzi più presto d'auantaggio, come anco più laboriosa; & io lo sò, che vi spesi non piccol tempo per ritrouarla; & ora voglio parteciparuela:

Dato dunque un Cilindro, ò Prisma di massima lunghezza da non esser dal suo proprio peso spezzato, e data una lunghezza maggiore, trouar la grossezza d'un altro Cilindro,

23

ò Prisma

(FIG. 24)

Prop. VII.

that the resistances of similar solids were similar; but a certain casual observation showed me that similar solids do not exhibit a strength which is proportional to their size, the larger ones being less fitted to undergo rough usage just as tall men are more apt than small children to be injured by a fall. And, as we remarked at the outset, a large beam or column falling from a given height will go to pieces when under the same circumstances a small scantling or small marble cylinder will not break. It was this observation which led me to the investigation of the fact which I am about to demonstrate to you: it is a very remarkable thing that, among the infinite variety of solids which are similar one to another, there are no two of which the forces [momenti], and the resistances of these solids are related in the same ratio.

SIMP. You remind me now of a passage in Aristotle's *Questions in Mechanics* in which he tries to explain why it is that a wooden beam becomes weaker and can be more easily bent as it grows longer, notwithstanding the fact that the shorter beam is thinner and the longer one thicker: and, if I remember correctly, he explains it in terms of the simple lever.

SALV. Very true: but, since this solution seemed to leave room for doubt, Mons. di Guevara, whose truly learned commentaries have greatly enriched and illuminated this work, indulges in additional clever speculations which the hope of thus

overcoming all difficulties; nevertheless even he is confused as regards this particular point, namely, whether, when the length and thickness of these solid figures increase in the same ratio, their strength and resistance to fracture, as well as to bending, remain constant. After much thought upon this subject, I have reached the following result. First I shall show that,

PROPOSITION VII

Among heavy prisms and cylinders of similar figure, there is one and only one which under the stress of its own weight lies just on the limit between breaking and not breaking: so that every larger one is unable to carry the load of its own weight and breaks; while every smaller one is able to withstand some additional force tending to break it.

Let AB be a heavy prism, the longest possible that will just sustain its own weight, so that if it be lengthened the least bit it will break. Then, I say, this prism is unique among all similar prisms—infinite in number—in occupying that boundary line between breaking and not breaking; so that every larger one will break under its own weight, and every smaller one will not break, but will be able to withstand some force in addition to its own weight.

Let the prism CE be similar to, but larger than, AB: then,

DIALOGO SECONDO

ò Prisma che sotto la data lunghezza sia l'unico, e massimo resistente al proprio peso.

Sia il Cilindro B C massimo resistente al proprio peso, e sia la D E lunghezza maggiore della A C, bisogna trovare la grossezza del Cilindro, che sotto la lunghezza D E sia il massimo resistente al proprio peso. Sia delle lunghezze D E, A C terza proporzionale I, e come D E ad I, così sia il Diametro F D al Diametro B A, e facciasi il Cilindro F E. Dico, questo esser il massimo, & unico tra tutti i suoi simili resistente al proprio peso. Delle linee D E I sia terza proporzionale M, e quarta O. E pongasi F G eguale alla A C. E perche il Diametro F D

al Diametro A B, è come la linea D E alla I, e delle D E I la O è quarta proporzionale, il Cubo di F D al Cubo di B A sarà, come la D E alla O, ma come il Cubo di F D al Cubo di B A, così è la resistenza del Cilindro D G alla resistenza del Cilindro B C, adunque la resistenza del Cilindro D G à quella del Cilindro B C, è come la linea D E alla O. E perche il momento del Cilindro B C è eguale alla sua resistenza, se si mostrerà il momento del Cilindro F E al momento del Cilindro B C, esser come la resistenza D F alla resistenza B A, cioè come il Cubo di F D al Cubo di B A, cioè come la linea D E alla O, habremo l'intento: cioè il momento del Cilindro F E esser eguale alla resistenza posta in F D. Il momento del Cilindro F E al momento del Cilindro D G, è come il Quadrato della D E al Quadrato della A C, cioè come la linea D E alla I, ma il momento del Cilindro D G al momento del Cilindro B C, è come il Quadrato D F al Quadrato B A, cioè come il Quadrato di D E al Quadrato della I, cioè come il Quadrato della I al Quadrato della M, cioè come la I alla O, adunque per l'egual proporzione, come il momento del Cilindro F E al momento del Cilindro B C, così è la linea D E alla O, cioè il Cubo

D F al

(FIG. 25)

I say, it will not remain intact but will break under its own weight. Lay off the portion CD, equal in length to AB. And, since, the resistance [bending strength] of CD is to that of AB as the cube of the thickness of CD is to the cube of the thickness of AB, that is, as the prism CE is to the similar prism AB, it follows that the weight of CE is the utmost load which a prism of the length CD can sustain; but the length of CE is greater; therefore the prism CE will break. Now take another prism FG which is smaller than AB. Let FH equal AB, then it can be shown in a similar manner that the resistance [bending strength] of FG is to that of AB as the prism FG is to the prism AB provided the distance AB that is FH, is equal to the distance FG; but AB is greater than FG, and therefore the moment of the prism FG applied at G is not sufficient to break the prism FG.

SAGR. The demonstration is short and clear; while the proposition which, at first glance, appeared improbable is now seen to be both true and inevitable. In order therefore to bring this prism into that limiting condition which separates breaking from not breaking, it would be necessary to change the ratio between thickness and length either by increasing the thickness or by diminishing the length. An investigation of this limiting state will, I believe, demand equal ingenuity.

SALV. Nay, even more; for the question is more difficult; this I know because I spent no small amount of time in its discovery which I now wish to share with you.

D F al Cubo B A, cioè la resistenza della base D F alla resistenza della base B A, che è quello che si cercava.

Sagr. Questa S. Salu. è una lunga dimostrazione, e molto difficile à risenersi à memoria per sentirla una sola volta; onde io vorrei, che V. S. si contentasse di replicarla di nuovo.

Salu. Farò quanto V. S. comanda; ma forse sarebbe meglio arrecarne una più speditiva, e breve: ma conuerà fare una figura alquanto diuersa.

Sagr. Maggiore sarà il fauore: e la già dichiarata mi farà grazia darne la scritta, acciò à mio bell' agio possa ristudiarla.

Salu. Non mancherò di seruirla. Ora intendiamo un Cilindro A, il Diametro della cui base sia la linea D C, e sia questo A il massimo, che possa sostenersi, del quale vogliamo trovare un maggiore,

che pur sia il massimo esso ancora, & unico che si sostenga. Intendiamone un simile ad esso A, e lungo quanto la linea assegnata, e questo sia, v. gr. E, il Diametro della cui base sia la K L, e delle due linee D C, K L sia terza proporzionale la M N, che sia Diametro della base del Cilindro X di lunghezza eguale all' E. Dico, questo X esser quello che cerchiamo. E perche la resistenza D C alla resistenza K L, è come il Quadrato D C al Quadrato K L, cioè come il Quadrato K L al Quadrato M N, cioè come il Cilindro E al Cilindro X, cioè come il momento E al momento X; ma la resistenza K L alla M N, è come il Cubo di K L al Cubo di M N, cioè come il Cubo D C al Cubo K L, cioè come il Cilindro A al Cilindro E, cioè come il momento A al momento E; adunque per l' Analogia perturbata come la resistenza D C alla M N, così il momento A al momento X, adunque il Prisma X è nella medesima costituzione di momento, e resistenza, che il Prisma A.

Ma voglio che facciamo il Problema più generale, e la Proposizione sia questa: Dato

(FIG. 26)

PROPOSITION VIII

Given a cylinder or prism of the greatest length consistent with its not breaking under its own weight; and having given a greater length, to find the diameter of another cylinder or prism of this greater length which shall be the only and largest one capable of withstanding its own weight.

Let us now generalize the problem; then it will read as follows:

Given a cylinder AC in which moment and resistance [bending strength] are related in any manner whatsoever; let DE be the length of another cylinder; then determine what its thickness must be in order that the relation between its moment and resistance shall be identical with that of the cylinder AC.

Using Fig. 25 in the same manner as above, we may say that, since the moment of the cylinder FE is to the moment of the portion DG as the square of ED is to the square of FG, that is, as the length DE is to I; and since the moment of the cylinder FG is to the moment of the cylinder AC as the square of FD is to the square of AB, or, as the square of ED is to

128 DIALOGO SECONDO

Dato il Cilindro A C, qualunque si sia il suo momento verso la sua resistenza, e data qualsi sia lunghezza D E, trouar la grossezza del Cilindro, la cui lunghezza sia D E, e l' suo momento verso la sua resistenza ritenga la medesima proporzione, che il momento del Cilindro A C alla sua.

Ripresa l'istessa figura di sopra e quasi l'istesso progresso diremo. Perche il momento del Cilindro F E al momento della parte D G, hà la medesima proporzione, che il Quadrato E D al Quadrato F G, cioè che la linea D E alla I, & il momento del Cilindro F G al momento del Cilindro A C, è come il Quadrato F D al Quadrato A B, cioè come il Quadrato D E al Quadrato I, cioè come il Quadrato I al Quadrato M, cioè come la linea I alla O, adunque ex aequali il momento del Cilindro F E al momento del Cilindro A C, hà la medesima proporzione della linea D E alla O, cioè del Cubo D E al Cubo I, cioè del Cubo di F D al Cubo di A B, cioè della resistenza della base F D alla resistenza della base A B, ch'è quello che si doueua fare.

Or veggiamo come dalle cose sin qui dimostrate apertamente si raccoglie l'impossibilità del poter non solamente l'arte, mà la natura stessa crescer le sue machine à vastità immensa, sì che impossibile sarebbe fabbricar Nauilii, Palazzi, ò Templi vastissimi, li cui remi, antenne, trauamenti, catene di ferro, & in somma le altre lor parti consistessero: come anco non potrebbe la natura far alberi di smisurata grandezza, poiche i rami loro grauari dal proprio peso finalmente si fiaccherebbero; e parimente sarebbe impossibile far strutture di ossa per huomini, caualli, ò altri animali, che potessero suffistere, e far proporzionatamente gli uffizii loro, mentre tali animali si douesser' agumentare ad altezze immense, se già non si togliesse materia molto più dura, e resistente della consueta, ò non si deformassero tali ossi proporzionatamente ingrossandogli, onde poi la figura, & aspetto dell' animale ne riuscisse mostruosamente grosso: il che forse fu auuertito dal mio accortissimo Poeta, mentre descrivendo un grandissimo Gigante disse:

Non si può compartir quanto sia lungo,
Si smisuratamente è tutto grosso.

E per

DEL GALILEO.

129

E per vn breue esempio di questo che dico disegnai già la figura di vn' osso allungato solamente tre volte, & ingrossato con tal proporzione, che potesse nel suo animale grande far l'uffizio proporzio-

nato à quel dell' osso minore nell' animal più piccolo, e le figure son queste: doue vedete sproporzionata figura, che diuene quella dell' osso ingrandito. Dal che è manifesto, che chi volesse mantener in vn vastissimo Gigante le proporzioni, che hanno le membra in vn huomo ordinario, bisognerebbe ò trouar materia molto più dura, e resistente per formarne l'ossa, ò vero ammettere, che la robustezza sua fusse à proporzione assai più fiacca, che ne gli huomini di statura mediocre; altrimenti crescendogli à smisurata altezza si vedrebbono dal proprio peso opprimere, e cadere. Doue che all' incontro si vede nel diminuire i corpi non si diminuir con la medesima proporzione le forze, anzi ne i minori crescer la gagliardia con proporzione maggiore. Onde io credo che vn piccolo cane porterebbe addosso due, ò tre cani eguali à se, mà non penso già che vn cauallo portasse ne anco vn solo cauallo à se stesso eguale.

Simp. Mà se così è, grand' occasione mi danno da dubitare le moli immense, che vediamo ne i pesci, che tal Balena, per quanto intendendo, sarà grande per dieci Elefanti, e pur si sostengono.

Salu. Il vostro dubbio S. Sim. mi fa accorgere d'una condizione da me non auuertita prima, potente essa ancora à far che Giganti, & altri

R

& altri

(FIG. 27)

the square of I, or, as the square of I is to the square of M, that is, as the length I is to O; it follows, *ex aequali*, that the moment of the cylinder FE is to the moment of the cylinder AC as the length DE is to O, that is, as the cube of DE is to the cube of I, or, as the cube of FD is to the cube of AB, that is, as the resistance of the base FD is to the resistance of the base AB; which was to be proven.

From what has already been demonstrated, you can plainly see the impossibility of increasing the size of structures to vast dimensions either in art or in nature; likewise the impossibility of building ships, palaces, or temples of enormous size in such a way that their oars, yards, beams, iron-bolts, and, in short, all their other parts will hold together; nor can nature produce trees of extraordinary size because the branches would break down under their own weight; so also it would be impossible to build up the bony structures of men, horses, or other animals so as to hold together and perform their normal functions if these animals were to be increased enormously in height; for this increase in height can be accomplished only by employing a material which is harder and stronger than usual, or by enlarging the size of the bones, thus changing their shape until the form and appearance of the animals suggest a monstrosity. This is perhaps what our wise Poet had in mind, when he says, in describing a huge giant:

Non si può compartir quanto sia lungo,
Si smisuratamente è tutto grosso.*

To illustrate briefly, I have sketched a bone whose natural length has been increased three times and whose thickness has been multiplied until, for a correspondingly large animal, it would perform the same function which the small bone performs for its small animal. From the figures here shown you can see how out of proportion the enlarged bone appears. Clearly then if one wishes to maintain in a great giant the same proportion of limb as that found in an ordinary man he must either find a harder and stronger material for making the bones, or he must admit a diminution of strength in comparison with men of medium stature; for if his height be increased inordinately he will fall and be crushed under his own weight. Whereas, if the size of a body be diminished, the strength of that body is not diminished in the same proportion; indeed the smaller the body the greater its relative strength. Thus a small dog could probably carry on his back two or three dogs of his own size; but I believe that a horse could not carry even one of his own size.

* Impossible it is to reckon his height
So beyond measure is his size.
ARIOSTO'S, *Orlando furioso*, XVII, 30.