



## CALCUL DES MOUVEMENTS D'UN NAVIRE OU D'UNE PLATEFORME AMARRÉS DANS LA HOULE

PAR J.-C. LEBRETON \* ET  
Mlle A. MARGNAC \*

### Notations

Nous repérons l'espace par rapport à un système d'axes fixes de centre 0. Un point M sera représenté par le vecteur X dans ce système  $X = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $x_3$  axe vertical ascendant.

Le navire sera défini en position par un système mobile de centre O' coïncidant avec le système fixe à  $t = 0$ . Dans ce système, M est repéré par  $X' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ .

La carène sera désignée par (S) ou  $(S_0)$ . Le vecteur normal unitaire *pointant vers l'extérieur* sera noté  $n$  ou  $n_0$ .

Toute la théorie de cet article repose sur l'approximation linéaire des équations de l'hydrodynamique. Dans ces conditions, les mouvements du fluide seront suffisamment petits pour que chaque point de la surface libre reste toujours dans un *voisinage* de sa position moyenne. En théorie linéaire, celle-ci se confond avec le plan horizontal de repos de la surface libre.

Le plan  $0x_1x_2$  sera choisi confondu avec ce plan.

Les dérivées par rapport à  $x_1, x_2, x_3$  de la fonction F seront notées  $\partial F/\partial x_1, \partial F/\partial x_2, \partial F/\partial x_3$ .

La dérivée normale au point M sera notée :

$$\frac{\partial F}{\partial n} \Big|_M$$

La dérivée totale par rapport au temps d'une grandeur  $g$  sera notée  $\dot{g}$ . La dérivée seconde :  $\ddot{g}$ .

### I. — Introduction

L'étude de la diffraction de la houle sur des obstacles flottants, celle des vagues produites par des navires en mouvements font l'objet de recherches importantes aussi bien sur le plan théorique que sur le plan expérimental.

Dans les deux cas, les difficultés sont très grandes et aucune solution satisfaisante n'a été donnée encore aux nombreux problèmes concernant le navire.

Ces problèmes intéressent au premier chef l'architecte naval : l'amélioration des qualités évolutives du navire dépend en effet d'une connaissance très profonde des interactions entre la carène caractérisée par sa forme et les mouvements du fluide qui l'entoure; ils intéressent également les ingénieurs chargés des travaux maritimes. La définition et le calcul des structures d'accueil pour les futurs pétroliers, systèmes d'amarrages, défenses d'accostage, etc., nécessitent une connaissance précise des coefficients de réponse du navire, masses ajoutées et coefficients d'amortissement, en fonction des caractéristiques de la houle et de celles de la carène.

La présence de la surface libre du fluide rend extrêmement complexe la mécanique des mouvements du navire. Si les mouvements sont périodi-

\* Electricité de France, Département Laboratoire National d'Hydraulique, 6, quai Watier, 78 - Chatou.

ques, il faut, en toute rigueur, avoir la connaissance des paramètres précédents pour toute une gamme de fréquences, multiples de la fréquence fondamentale.

Si le phénomène étudié est un phénomène transitoire entre deux états permanents, c'est pratiquement pour toutes les fréquences du spectre qu'il faudra connaître les coefficients précités.

Deux voies ont permis actuellement d'acquérir une connaissance partielle de ces problèmes :

- la voie du calcul, analytique ou numérique;
- la voie des études expérimentales.

Aucune de ces deux méthodes ne semble pouvoir actuellement résoudre complètement le problème.

Les études expérimentales sont plus longues de mise en œuvre et plus délicates. Elles présentent l'avantage de tous les modèles physiques : les phénomènes liés aux écoulements locaux et à la turbulence sont correctement représentés.

Les études théoriques bénéficient actuellement de moyens incomparables à ceux d'il y a quelques dizaines d'années, grâce aux puissants ordinateurs de recherche. L'approximation de la coque mince qui constituait la base des calculs de carène ne permettait que de calculer les paramètres liés aux mouvements longitudinaux du navire.

Le calcul des paramètres d'inertie pour les six degrés de liberté du flotteur a été effectué récemment sur IBM pour des corps de formes simples : ellipsoïdes ou sphères (référence n° 16), et pour des profondeurs très grandes du fluide.

La présente note expose les possibilités des programmes généraux mis au point au Département Laboratoire National d'Hydraulique pour le calcul des réponses des grands navires et des plates-formes au mouillage.

---

## II. — Expressions analytiques des réponses et des coefficients de masse induite d'un flotteur soumis à la houle

---

La théorie du flotteur fait appel à la mécanique rationnelle et à la mécanique des fluides. Elle est fort complexe, puisqu'elle rassemble les difficultés des surfaces libres et des couches limites et il ne serait pas possible d'en venir à bout sans faire quelques hypothèses sur la nature des écoulements et sur les ordres de grandeur des actions en présence.

Rappelons brièvement de quoi il s'agit :

Le flotteur est supposé effectuer des oscillations périodiques sous l'action excitatrice de la houle. La force hydrodynamique (résultante des pressions sur la carène) comporte un terme d'inertie qui est en général prépondérant, car il est proportionnel à une masse (masse du flotteur et d'une partie de l'eau qui l'entoure), et un terme quadratique de traînée proportionnel à une surface. Nous supposons que les vitesses et les déplacements restent globalement de faible valeur, de sorte que nous négligerons les termes quadratiques dans les actions du fluide.

Il sera possible de déterminer *a posteriori* le degré de validité de cette première hypothèse. Il n'en est pas de même pour la seconde, dans laquelle nous supposons que le mouvement du fluide dépend d'un potentiel des vitesses.

Avec cette hypothèse, on devra prendre quelques précautions : il faudra s'assurer que la description de la carène ne donne pas lieu à des décollements trop importants. En toute rigueur, cela sera inévitable pour certains mouvements ou pour certaines formes. On pourra prévoir une telle éventualité en calculant les vitesses sur la carène, mais il sera difficile sinon impossible de chiffrer l'erreur commise par l'approximation potentielle.

Nous allons voir cependant qu'avec ce petit nombre d'hypothèses, le problème reste encore assez lourd.

Le navire étant en translation nulle, on le soumet à l'action d'une houle cylindrique d'orientation quelconque. On peut supposer qu'il est libre ou amarré à une structure *perméable* (c'est-à-dire ne déformant pas la houle) ou enfin amarré sur corps morts.

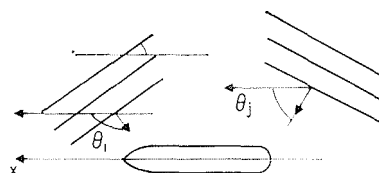
Nous devons faire tout de suite une remarque. Nos hypothèses de linéarisation ne concernent jusqu'à présent que les interactions fluide-flotteur. Nous supposons que ces dernières resteront toujours *linéaires*. Par contre, il n'y a aucune raison de supposer les liaisons d'amarrage linéaires. Les diagrammes efforts-déplacements des amarres usuelles ou des ducs d'albe ne sont pas linéaires.

Le problème global ne sera donc pas linéaire par suite des équations dynamiques du navire. Nous ne chercherons pas à résoudre cette difficulté supplémentaire qui peut être éliminée au moyen d'une intégration numérique. Cependant, pour mener jusqu'au bout la résolution à la plume du problème, nous supposons ici que les amarres sont parfaitement élastiques.

La houle sera supposée cylindrique et de période  $T$ . Son potentiel  $\Phi_\infty$  se décompose, par l'analyse de Fourier, en une somme de potentiels harmoniques  $\Phi_\infty^n$  caractérisés par le vecteur nombre d'onde  $K_n$  perpendiculaire aux crêtes et d'intensité  $2\pi/\lambda_n$ .  $\lambda_n$  est la longueur d'onde pour la période  $T_n$ .

Nous chercherons donc à résoudre le problème harmonique plus simple que le problème général. Le programme de calcul devra ensuite être appliquée à toutes les fréquences multiples de la fréquence fondamentale pour fournir les réponses du navire aux différents modes. La superposition de ces réponses donnera la réponse à la houle complexe.

Notons que la linéarité des équations permet de superposer des ondes de houle d'orientation différentes (fig. ci-dessous).



1. Rappel sur la résolution du problème linéaire par la méthode de l'équation intégrale.

Il s'agit du classique problème d'un oscillateur réagissant sur l'excitation (ici la houle).

Nous ne ferons que rappeler les équations linéarisées du problème. Soit  $\sigma$  la pulsation. Nous poserons :

$$\Phi = \mathcal{R}(\varphi e^{-i\sigma t})$$

$\Phi$  est le potentiel du fluide.

$$X_G = \mathcal{R}(X_G^0 e^{-i\sigma t})$$

$$\Omega = \mathcal{R}(\omega e^{-i\sigma t})$$

Le système des équations du fluide parfait comporte sept inconnues : le potentiel du fluide et les six paramètres du mouvement du centre de gravité G du flotteur. Ce système s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 0 \\ -\sigma^2\varphi + g \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \Big|_{s_0} &= 0 \\ \frac{d\varphi}{dn_0} \Big|_{s_0} &= -i\sigma (X_G^0 + \omega \wedge X) \cdot n_0 \\ \frac{d\varphi}{dn_0} \Big|_{\text{fond}} &= 0 \\ -m\sigma^2 X_G^0 + \rho g A (X_G^0 \cdot \vec{K}) \cdot \vec{K} &= -i\sigma \rho \oint_{s_0} \varphi \cdot n_0 dS \\ &\quad - \rho g [I^A \wedge \omega] \cdot \vec{K} \cdot \vec{K} \\ -\vec{I}\sigma^2\omega &= -i\sigma \rho \oint_{s_0} \varphi (GM_0 \wedge n_0) dS + \rho g (X_G^0 \cdot \vec{K}) \vec{I}_x \vec{J} \\ &\quad - \rho g j\omega_1 (\vec{I}_{yy}^A + \vec{I}_z^v) \\ &\quad - \rho g j\omega_2 (\vec{I}_{xx}^A + \vec{I}_z^v) \end{aligned}$$

A désigne la surface de flottaison.  $I^A$  est le vecteur définissant le centre de flottaison :

$$(\vec{I}_x^A = \oint_A x_P dA).$$

$\vec{I}_{xx}^A, \vec{I}_{yy}^A$  : sont les moments d'inertie d'ordre 2 de A ;

$\vec{I}_x^v, \vec{I}_y^v, \vec{I}_z^v$  : sont les moments d'ordre 1 de la carène :

$$\vec{I}_x^v = \oint_V X \bar{d}v.$$

L'indice « 0 » est affecté à la position moyenne de la carène.

Il manque une condition pour que le système I admette une solution unique. Cette condition fixe le comportement de  $\varphi - \varphi_\infty$  à l'infini. Physiquement, elle exprime que l'énergie des ondes émises par le navire ou des ondes diffractées sur sa coque est rayonnée à l'infini comme celle d'une onde cylindrique divergente.

Mathématiquement, cette condition se traduit par une condition de radiation du type Sommerfeld.

Le problème mathématique posé par I est classique. Les conditions d'existence et d'unicité de la solution restent cependant assez obscures. F. John [2] a montré qu'elles étaient satisfaites si la carène recoupe orthogonalement la surface libre au repos.

Avec cette hypothèse, nous avons recherché la solution en répartissant sur la carène un feuillet de sources-puits de densité inconnue. Une équation intégrale permet le calcul de cette densité.

Toute la méthode repose sur la connaissance de la fonction de Green du problème. On appelle fonction de Green G le potentiel d'une source placée dans le fluide et le débit égal à  $4\pi \cos \sigma t$ .

L'établissement de G n'a pas sa place ici.

La forme de G dépend d'ailleurs des conditions aux limites. Si la profondeur peut être considérée comme infiniment grande, nous devons utiliser la fonction :

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{1}{R} + \frac{1}{R^*} + 2i\pi\mu e^{\mu(x_3+c)} H_0^{(1)}(\mu r) \\ &\quad - \pi\mu e^{\mu(x_3+c)} [S_0(\mu r) - Y_0(\mu r)] + I_0(r, x_3, c, \mu) \end{aligned}$$

$$R^2 = [(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 + (x_3 - c)^2]$$

$$r^2 = [(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2]$$

$$R^{*2} = [(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 + (x_3 + c)^2]$$

$(x_1, x_2, x_3)$  point courant,  $(a, b, c)$  point source,  $S_0(X)$  fonction de Struve,  $Y_0(X)$  et  $H_0^{(1)}(X)$  fonctions de Bessel.

$$I_0 = -2\mu e^{\mu(x_3+c)} \oint_{x_3+c}^0 \frac{e^{-\mu t}}{\sqrt{r^2 + t^2}} dt$$

$$\mu = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Pour une profondeur finie  $d$ , il faut prendre la fonction :

$$G_2 = \frac{1}{R} + \frac{1}{R^*} +$$

$$\oint_0^\infty \frac{2(\mu + t) e^{-at} \operatorname{ch} t(x_3 + d) \operatorname{ch} t(c + d) J_0(tr) dt}{t \operatorname{sh} dt - \mu \operatorname{ch} dt}$$

$$R^* = [(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 + (2d + x_3 + c)^2]^{1/2}$$

Nous renvoyons le lecteur aux ouvrages nombreux cités en référence pour une justification précise de l'établissement de  $G_1$  ou de  $G_2$ .

L'application du théorème de Green permet de décomposer  $\varphi$  en deux termes ; l'onde incidente  $\varphi_\infty$  et l'onde émise par le navire  $\varphi$ . L'onde émise  $\varphi_e$  comporte l'onde diffractée par l'obstacle fixe  $\varphi_d$  et l'onde  $\varphi_v$  produite par les petits mouvements harmoniques.

L'intérêt d'une telle décomposition de  $\varphi$  suivant la formule :

$$\varphi = \varphi_\infty + \varphi_d + \varphi_v$$

est de scinder le problème initial en deux autres beaucoup plus simples.

On peut vérifier facilement que la décomposition de  $\varphi$  en trois ondes  $\varphi_\infty, \varphi_d, \varphi_v$  permet de satisfaire à toutes les conditions aux limites : pour cela nous supposons que  $\varphi_d$  et  $\varphi_v$  sont de la forme générale :

$$\varphi = \oint_{S_0} G \tau dS$$

D'après les propriétés de  $G$ ,  $\varphi$  satisfait automatiquement aux conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\varphi = 0 \\ -\sigma^2\varphi + g \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} = 0 \\ \frac{d\varphi}{dn} \Big|_{\text{fond}} = 0 \end{array} \right.$$

condition à l'infini.

Nous devons donc uniquement chercher à satisfaire à la condition d'imperméabilité de la coque.

Cherchons tout d'abord la forme à donner à  $\varphi_v$ .  $\varphi_v$  est l'onde due aux mouvements de la coque.

Soit  $\varphi_1$  le potentiel lorsque le navire est animé de la vitesse  $\vec{i}$ ,  $\varphi_2$  pour  $\vec{j}$ ,  $\varphi_3$  pour  $\vec{K}$ ,  $\varphi_4$  pour la rotation  $\omega = \vec{i}$ ,  $\varphi_5$  pour  $\omega = \vec{j}$  et  $\varphi_6$  pour  $\omega = \vec{K}$ .

On vérifie que :

$$\varphi_v = -i\sigma (X_G^0 \cdot \varphi_T + \omega \cdot \varphi_\omega) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_T = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \\ \varphi_\omega = (\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6) \end{array} \right.$$

satisfait à la condition :

$$\frac{d\varphi_v}{dn_0} \Big|_{S_0} = -i\sigma (X_G^0 + \omega \wedge X) \cdot n_0$$

On remarquera que cette formulation permet d'obtenir le potentiel  $\varphi_v$  pour tous les mouvements possibles du navire en fonction de deux vecteurs  $\varphi_T$  et  $\varphi_\omega$  qui doivent être calculés une seule fois, puisqu'ils ne dépendent pas du temps, mais uniquement de la géométrie de la coque.

$\varphi_T$  et  $\varphi_\omega$  seront définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\text{grad}} \varphi_T \cdot n_0 = n_0 \\ \overline{\text{grad}} \varphi_\omega \cdot n_0 = X \wedge n_0 \end{array} \right.$$

Soit, en explicitant :

$$\frac{d\varphi_i}{dn_0} = \rho_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, 6$$

$\rho_i$  prenant dans l'ordre les valeurs :

$$n_{x1}, n_{x2}, n_{x3}, (x_2 - x_2^G) n_{x3} - (x_3 - x_3^G) n_{x2},$$

$$\text{et } (x_3 - x_3^G) n_{x1} - (x_1 - x_1^G) n_{x3}$$

$$(x_1 - x_1^G) n_{x2} - (x_2 - x_2^G) n_{x1}$$

L'hypothèse précédente qui nous a permis de décomposer  $\varphi_v$  conduit au potentiel dû au navire si l'on se donne son mouvement.

Pour satisfaire à la condition à la limite :

$$\frac{d\varphi}{dn_0} \Big|_{S_0} = -i\sigma (X_G^0 + \omega \wedge X) \cdot n_0 \quad (L)$$

il est nécessaire de prendre en compte un terme  $\varphi_d$  qui compense  $\varphi_\infty$  sur la carène. En effet, si nous posons :

$$\varphi = \varphi_v + \varphi_\infty$$

la condition (L) ne sera pas vérifiée, puisqu'il n'y a aucune raison pour que :

$$\frac{d\varphi_\infty}{dn_0} \Big|_{S_0} = 0$$

La solution ne peut s'obtenir qu'avec au minimum trois composantes :  $\varphi_\infty, \varphi_d, \varphi_v$ ;  $\varphi_d$  étant choisi de façon que :

$$\frac{d\varphi_d}{dn_0} \Big|_{S_0} = -\frac{d\varphi_\infty}{dn_0} \Big|_{S_0}$$

En résumé, il apparaît nécessaire de chercher sept fonctions scalaires,  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ , et  $\varphi_d$  pour obtenir le potentiel  $\varphi$ . Il est fondamental de constater que ces sept fonctions seront calculées suivant le même processus, puisque toutes sont définies par le fait que leur dérivée normale sur la carène est égale à une fonction connue.

Chacune de ces fonctions sera recherchée sous la forme :

$$\varphi_i = \oint_{S_0} G \tau_i dS$$

la condition :

$$\frac{d\varphi_i}{dn_0} \Big|_{S_0} = f_i \quad f_i : \text{fonction connue}$$

se traduisant par l'équation :

$$-2\pi\tau_i + \oint_{S_0} \frac{\partial G}{\partial n_0} \tau_i dS = f_i$$

Le problème central comporte donc la résolution d'une équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce.

La résolution d'une telle équation est possible, sauf si  $2\pi$  est valeur propre de l'opérateur intégral. Il existe donc un certain nombre de fréquences pour lesquelles la méthode est en défaut.

Cette restriction ne présente aucun inconvénient pour la gamme des fréquences qui nous intéressent.

— Force hydrodynamique :

Nous appelons force hydrodynamique, l'expression :

$$\mathcal{F}_H = \rho \oint_{S_0} \frac{\partial\varphi}{\partial t} n_0 dS$$

Soit, pour un mouvement harmonique :

$$\mathcal{F}_H = -i\sigma\rho \oint_{S_0} \varphi n_0 dS$$

Introduisons les différentes composantes de  $\varphi$  :

$$\varphi = \varphi_\infty + \varphi_d - i\sigma(x_G^0 \varphi_T + \omega \cdot \varphi_\omega)$$

On peut écrire :

$$\mathcal{F}_{II} = \mathcal{F}_i + \mathcal{F}_m$$

$\mathcal{F}_i$  est la force hydrodynamique lorsque le navire est fixe. C'est la force :

$$\mathcal{F}_i = -i\sigma\rho \oint_{S_0} (\varphi_\infty + \varphi_d) n_0 dS$$

$\mathcal{F}_m$  est la force due au mouvement du navire.

Elle peut s'écrire :

$$\mathcal{F}_m = (\rho \oint_{S_0} \varphi_T \otimes n_0 dS) \cdot (-\sigma^2 x_G^0) + (\rho \oint_{S_0} \varphi_\omega \otimes n_0 dS) \cdot (-\sigma^2 \omega)$$

⊗ indique le produit tensoriel.

Pour un mouvement harmonique,  $-\sigma^2 X_G^0$  et  $-\sigma^2 \omega$  représentent les dérivées secondes de  $X_G$  et  $\Omega$ , donc les accélérations linéaires et angulaires.

$\varphi_T$  et  $\varphi_\omega$  étant complexes, on a coutume de poser :

$$-\rho \oint_{S_0} \varphi_T \otimes n_0 dS = \bar{\mu} + i \frac{\bar{\lambda}}{\sigma}$$

$$-\rho \oint_{S_0} \varphi_\omega \otimes n_0 dS = \bar{\nu} + i \frac{\bar{\sigma}}{\eta}$$

$\bar{\mu}$  et  $\bar{\nu}$  sont les matrices des masses ajoutées, ou matrices d'inertie;

$\bar{\lambda}$  et  $\bar{\eta}$  sont les matrices des coefficients d'amortissement ou encore matrices d'amortissement.

La force hydrodynamique dans un mouvement harmonique s'exprime donc en fonction des matrices d'inertie et d'amortissement :

$$\mathcal{F}_m = \left( \bar{\mu} + i \frac{\bar{\lambda}}{\sigma} \right) \cdot (-\sigma^2 X_G^0) + \left( \bar{\nu} + i \frac{\bar{\eta}}{\sigma} \right) \cdot (-\sigma^2 \omega)$$

La condition de surface libre a pour effet de faire dépendre les quatre matrices de la période des oscillations.

## 2. Expression analytique des réponses et des coefficients de masse induite.

Une fois déterminés  $\varphi_d$ ,  $\varphi_T$  et  $\varphi_\omega$ , le calcul de  $X_G$  et de  $\omega$  est simple : il suffit de revenir aux équations dynamiques du navire :

$$-m\sigma^2 X_G^0 = \mathcal{F}_m + \mathcal{F}_i + \mathcal{F}_{st}$$

$$-\bar{I}\sigma^2 \omega = \mathcal{C}_m + \mathcal{C}_i + \mathcal{C}_{st}$$

$\mathcal{C}_m$  et  $\mathcal{C}_i$  sont les couples hydrodynamiques;  $\mathcal{F}_{st}$  et  $\mathcal{C}_{st}$  sont les forces et couples de rappel, supposés fonction linéaire des déplacements.

Ils comprennent en particulier les forces et couples de rappel hydrostatiques. Nous les mettrons sous la forme :

$$\mathcal{F}_{st} = \bar{a} \cdot X_G + \bar{b} \cdot \omega$$

$$\mathcal{C}_{st} = \bar{c} \cdot X_G + \bar{d} \cdot \omega$$

Posons  $m = m\bar{1}$  et  $I = I\bar{1}$ ,  $\bar{1}$  étant la matrice unité.  $X_G$  et  $\omega$  sont solutions du système matriciel :

$$-\sigma^2 \left( m\bar{1} + \bar{\mu} + i \frac{\bar{\lambda}}{\sigma} \right) \cdot X_G^0 + \bar{a} X_G^0 - \sigma^2 \left( \bar{\nu} + i \frac{\bar{\eta}}{\sigma} \right) \cdot \omega + \bar{b} \cdot \omega = \mathcal{F}_i$$

$$-\sigma^2 \left( \bar{\lambda} + i \frac{\bar{\delta}}{\sigma} \right) \cdot X_G^0 + \bar{c} X_G^0 - \sigma^2 \left( \bar{I} + \bar{\alpha} + i \frac{\bar{\beta}}{\sigma} \right) \cdot \omega + \bar{d} \cdot \omega = \mathcal{C}_i$$

$$\bar{\alpha} + i \frac{\bar{\beta}}{\sigma} = -\rho \oint_{S_0} \varphi_\omega \otimes (GM_0 \wedge n_0) dS$$

$$\bar{\gamma} + i \frac{\bar{\delta}}{\sigma} = -\rho \oint_{S_0} \varphi_T \otimes (GM_0 \wedge n_0) dS$$

$\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$ ,  $\bar{\gamma}$ ,  $\bar{\delta}$ , sont les matrices d'inertie de rotation et les matrices d'amortissement de rotation.

En résumé les réponses et les tenseurs de masse induite sont données par les formules : pour les réponses  $X_G$  et  $\omega$  :

$$-\sigma^2 (m\bar{1} + \bar{T}_x) \cdot X_G^0 + \bar{a} \cdot X_G^0 - \sigma^2 \bar{T}_\omega \cdot \omega + \bar{b} \cdot \omega = \mathcal{F}_i$$

$$-\sigma^2 \bar{\theta}_x \cdot X_G^0 + \bar{c} \cdot X_G^0 - \sigma^2 (\bar{I} + \bar{\theta}_\omega) \cdot \omega + \bar{d} \cdot \omega = \mathcal{C}_i$$

et pour les masses induites :

$$\bar{T}_x = -\rho \oint_{S_0} \varphi_T \otimes n_0 dS$$

$$\bar{T}_\omega = -\rho \oint_{S_0} \varphi_\omega \otimes n_0 dS$$

$$\bar{\theta}_x = -\rho \oint_{S_0} \varphi_T \otimes (GM_0 \wedge n_0) dS$$

$$\bar{\theta}_\omega = -\rho \oint_{S_0} \varphi_\omega \otimes (GM_0 \wedge n_0) dS$$

## III. — Description du programme de calcul

La résolution du problème harmonique comporte un certain nombre d'opérations mathématiques, dérivations, intégrations sur des surfaces, qui ne peuvent s'exécuter à la plume que dans un nombre très limité de cas.

L'emploi de procédés numériques pour ces opérations permet de conserver toute sa généralité à la méthode. Il suppose par contre une phase préparatoire dans laquelle on définit un nouveau problème « voisin » du problème initial et dont la solution tend sous certaines conditions vers la solution exacte.

On commence par définir une carène « approchée », composée d'éléments plans, jointifs ou non, de contour simple (triangle ou rectangle). Les fonctions densité de sources et potentiel affectées à la carène sont supposées constantes sur chaque élément plan de la carène.

Les intégrales de surface sont remplacées par des sommes finies reliant les valeurs des fonctions  $\tau$  ou  $\varphi$  sur les différentes facettes.

L'opérateur intégral de l'équation de Fredholm est approché par une matrice à éléments complexes dont les éléments sont calculés une fois pour toutes.

Le découpage de la carène est donc fondamental pour la précision des calculs. Quoiqu'il n'existe pas de règle précise pour le déterminer, l'expérience montre que la discrétisation doit être d'autant plus fine que la zone intéressée est à courbure forte et variable.

Le tableau 3 indique les différentes étapes nécessaires au traitement d'une fréquence.

La carène est introduite en mémoire sous forme discrète. Supposons qu'il y ait  $N$  facettes planes. Les données occupent  $6N$  mémoires :  $3N$  pour les coordonnées des centres des facettes,  $3N$  pour les projections des éléments de surface sur les trois plans de coordonnées.

La matrice du noyau de l'équation intégrale comportant  $N^2$  termes est ensuite calculée et stockée. Les calculs s'effectuant sur des nombres réels, c'est en fait un système de rang  $2N$  qu'il faut inverser sept fois (six fois pour  $\varphi_T$  et  $\varphi_\omega$ , une fois pour  $\varphi_d$ ).

La matrice  $G$  composée des coefficients d'influence (potentiel en  $I$  dû à une source placée en  $J$ ) est ensuite stockée à la place du noyau qu'il n'y a pas lieu de conserver.

Le reste du programme est à « option ».

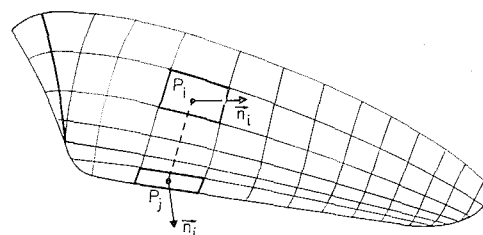
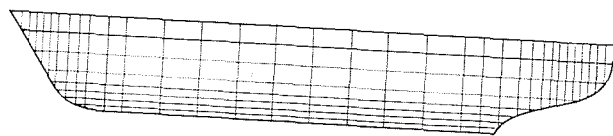
Le coût en mémoires et en temps dépend de la fréquence traitée.

Pour un nombre de facettes fixé *a priori*, il y a lieu d'augmenter en général la densité de facettes sur les parois normales au déplacement considéré. Par exemple, pour le calcul des masses induites de pilonnement, il sera préférable de concentrer le maximum de facettes sur le fond.

Le nombre total de facettes dépend de la capacité de l'ordinateur utilisé. Pour des calculs rapides, l'intérêt de placer le programme en mémoire centrale limite le nombre des facettes à 100 ou 200 (sur Control DATA 6600).

Mais il n'y a pas d'impossibilité à augmenter considérablement ce nombre à condition d'utiliser les mémoires auxiliaires. On peut atteindre sans difficulté 500 ou 1000 facettes, ce qui est largement suffisant pour les formes les plus complexes.

Le programme a été utilisé récemment pour l'étude d'une barge de la S.N.P.A. à l'aide d'un découpage en 200 facettes. Les calculs ont montré qu'une discrétisation plus fine n'augmentait pratiquement pas la précision.



Approximation géométrique de la carène.  
Geometrical hull approximation.

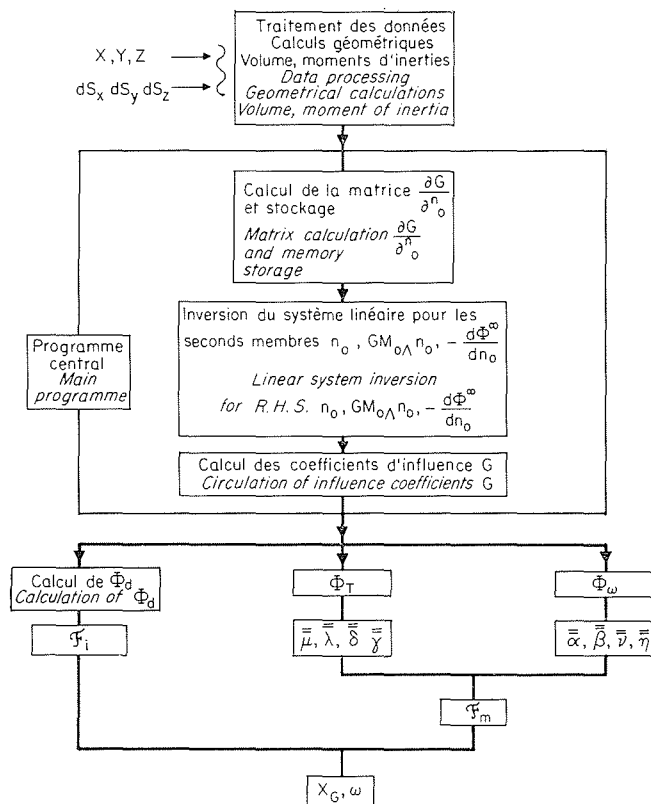


Tableau 3 - Table 3/

Organigramme d'un code de calcul type.  
Representative calculation code.

#### IV. — Quelques résultats obtenus par le code de calcul dans le cas de navires de forme simple

Nous avons utilisé le programme précédent pour déterminer l'influence des paramètres de forme de la carène sur les coefficients de masse induite.

Nous donnerons pour finir un exemple de traitement complet du mouvement d'un navire supposé non amarré.

##### 1. Influence de la largeur de la coque.

Les figures 1 à 4 donnent les coefficients  $C_x$ ,  $C_z$ ,  $H_x$ ,  $H_z$  en fonction de  $2L/\lambda$  pour différentes largeurs ( $b/L$ ). Le navire est schématisé par un caisson rectangulaire prolongé par deux avant-becs en forme de dièdre.

Sa longueur totale est égale à  $2L$ .

Les coefficients  $C_x$ ,  $C_z$ ,  $H_x$ ,  $H_z$  sont rapportés à la masse totale du navire :

$$M = \rho V \quad V \text{ volume de la carène}$$

$$C_x = \mathcal{R} \cdot \left( -\frac{1}{V} \oint_{S_0} \varphi_1 n_x dS \right)$$

$$H_x = J_m \left( -\frac{1}{V} \oint_{S_0} \varphi_1 n_x dS \right)$$

$$C_z = \mathcal{R} \left( -\frac{1}{V} \oint_{S_0} \varphi_3 n_z dS \right)$$

$$H_z = J_m \left( -\frac{1}{V} \oint_{S_0} \varphi_3 n_z dS \right)$$

Le  $C_x$  passe par un maximum pour  $(2L/\lambda) = 0,35$ . Par contre, le maximum de  $C_z$  est dans la zone des très grandes longueurs d'onde.

On retiendra que pour les valeurs de  $2L/\lambda$  considérées,  $C_x$  et  $C_z$  peuvent varier de 1 à 4.

Les maximums de  $C_x$  et de  $C_z$  ont été tracés en fonction du rapport  $b/L$ . Ce sont les figures 9 et 10.

##### 2. Influence du tirant d'eau.

Les figures 5, 6, 7 et 8 donnent l'influence de  $C_x$ ,  $C_z$ ,  $H_x$ ,  $H_z$  avec  $\Delta/L$ . On remarquera que  $C_x$  et  $C_z$  varient en sens contraire. Le coefficient  $C_z$  croît très vite lorsque le tirant d'eau diminue. Ceci s'explique intuitivement puisque, la surface du fond restant la même, le volume total de la carène tend vers zéro. A la limite on obtient le  $C_z$  d'une plaque mince posée sur la surface (en fait, c'est le produit  $MC_z$  qui donnerait une limite finie). Ces résultats apparaissent clairement sur les figures 11 et 12.

##### 3. Calcul complet.

Les figures 13, 14 et 15 représentent l'ensemble des résultats fournis par le programme de calcul.

Le cas traité est simple puisque nous n'avons pas mis d'amarre. Le houle attaque le navire obliquement ( $45^\circ$ ).

Les six composantes du mouvement sont portées sur la figure 15. Il s'agit seulement des modules. X représente en fait :  $x/\lambda : h/\lambda$  c'est-à-dire le rapport de  $x/\lambda$  à la cambrure :

- Y est égal à  $y/\lambda : h/\lambda$  ( $h$  amplitude de la houle);
- Z est égal à  $z/h$ .

Les amplitudes angulaires sont rapportées à la cambrure.

#### V. — Extension au calcul des mouvements d'une plate-forme flottante et des efforts auxquels sont soumis ses différents éléments constitutifs

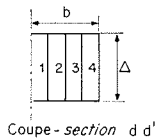
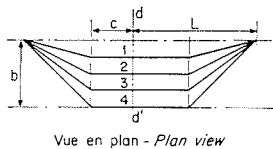
L'application du programme de calcul précédent aux plates-formes flottantes de forme absolument quelconque ne soulève pas *a priori* de difficultés particulières.

En pratique, cependant, on se trouve très vite conduit à discrétiser l'obstacle en « facettes » en nombre prohibitif pour un traitement rapide sur les plus gros ordinateurs. Compte tenu des hypothèses fondamentales qu'impose le calcul et de la précision avec laquelle on désire évaluer certains paramètres, il y a lieu de se poser les questions suivantes :

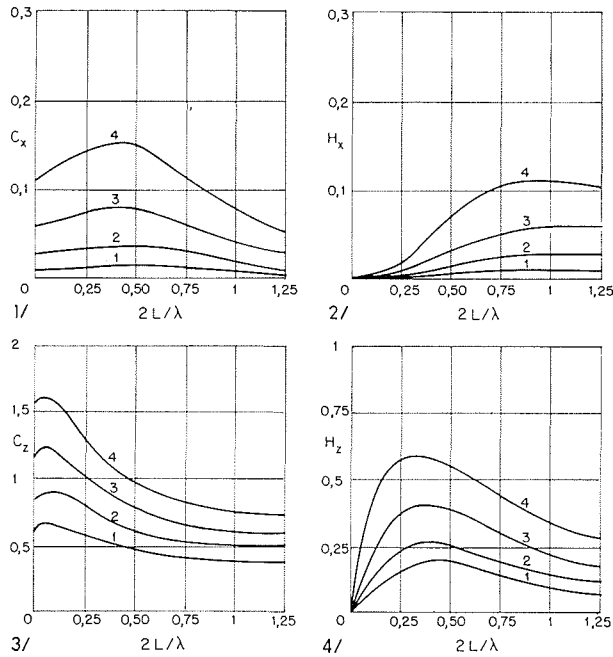
- les hypothèses de départ restent-elles valables pour les formes complexes : treillis, éléments plans...;
- ces hypothèses étant valables, peut-on utiliser la méthode des facettes dans tous les cas de formes et pour toutes les périodes de houles;
- si d'autres méthodes sont également utilisables, à partir de quand doit-on les employer?

Rappelons tout d'abord les hypothèses de base. La mise en équations que nous avons exposée ici ne concerne que les petits mouvements d'un ou de plusieurs flotteurs. La houle est limitée à son approximation dite du 1<sup>er</sup> ordre. Elle est donc potentielle. La méthode de calcul proposée suppose que l'obstacle déforme la houle incidente ou émet des ondes de surface potentielles.

Il est évident que ces hypothèses peuvent être infirmées par l'expérience. Elles sont cependant approximativement valables tant que la longueur des ondes émises ou incidentes reste de l'ordre de la plus grande longueur du flotteur (dans le plan de la houle ou du mouvement) et que la période du mouvement n'est pas trop voisine d'une des périodes propres du flotteur. Si la longueur d'onde devenait très grande vis-à-vis de l'obstacle, le potentiel de déformation serait négligeable et le mouvement du fluide s'apparenterait à celui d'un courant. Dans ce cas, à côté de la force d'inertie pure, une force de traînée devra être introduite. Les coefficients de traînée et d'inertie  $C_D$  et  $C_M$  peuvent alors être obtenus, sans prise en compte de la surface libre, par voie expérimentale (en soufflerie par exemple).



- 1 •  $b/L = 1/32$
- 2 •  $b/L = 1/16$
- 3 •  $b/L = 1/8$
- 4 •  $b/L = 1/4$



**1, 2, 3, 4/**

Variation des coefficients d'inertie avec le rapport  $2L/\lambda$ . ( $\Delta/L = 1/4, c/L = 1/2$ ).  
 Variation of inertia coefficients with  $2L/\lambda$ . ( $\Delta/L = 1/4, c/L = 1/2$ ).

Si nous considérons maintenant les éléments de dimensions plus importantes : ceux qui sont par exemple compris entre le  $1/5^\circ$  et une ou plusieurs fois la longueur de la houle, il ne sera plus possible de négliger l'effet de surface libre même si ces éléments sont légèrement immergés.

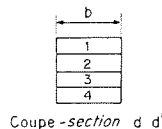
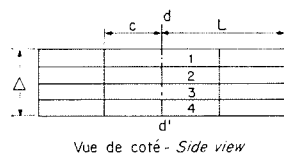
Il sera nécessaire alors de recourir à la méthode des facettes. La discrétisation des éléments de carène sera réalisable sans précautions spéciales.

On pourrait, pour des éléments de géométrie simple : cylindre, sphère, ellipsoïde, procéder à une addition des masses induites de chaque élément supposé seul. Il conviendrait de s'assurer, avant de le faire, que la distance entre éléments est supérieure ou égale à la longueur des ondes de surface.

En général, cela ne sera pas le cas et il y aura interférence entre les divers éléments. Des recherches sont en cours actuellement pour définir les limites à partir desquelles les interférences entre éléments imposent de calculer le potentiel de la houle par la méthode des facettes.

*Calculs des efforts appliqués aux structures.*

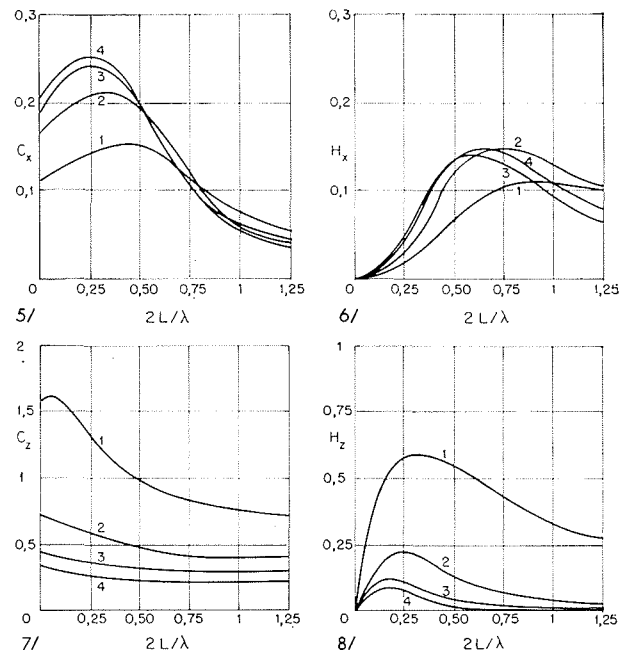
La recherche des réponses ou des masses induites conduit à calculer la force hydrodynamique  $\mathcal{F}_H$  comme l'intégrale des pressions sur la carène. Il n'est donc pas inutile de préciser que la méthode des facettes permet de calculer les valeurs de la pression appliquée au centre géométrique de chaque



- 1 •  $\Delta/L = 1/4$
- 2 •  $\Delta/L = 1/2$
- 3 •  $\Delta/L = 3/4$
- 4 •  $\Delta/L = 1$

**5, 6, 7, 8/**

Variation des coefficients d'inertie avec le rapport  $2L/\lambda$ . ( $b/L = 1/4, c/L = 1/2$ ).  
 Variation of inertia coefficients with  $2L/\lambda$ . ( $b/L = 1/4, c/L = 1/2$ ).





facette. Il s'agit naturellement de la pression « linéaire » :

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Il est donc très facile ensuite de faire « sortir » du calcul les efforts sur des éléments ou des parties de la structure. Il existe, d'ailleurs, des programmes dérivés du programme général pour le calcul des efforts sur des piles verticales fixes (références 17 et 18). Dans ces programmes, la pression est la résultante des actions exercées par la houle incidente et par la houle diffractée :

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\rho \left( \frac{\partial \Phi_{\infty}}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_d}{\partial t} \right)$$

**VI. — Introduction de liaisons non linéaires dans le programme de calcul**

Nous nous sommes limités jusqu'ici aux cas, peu fréquents en nature, où le navire était soumis à des liaisons purement linéaires avec les structures de mouillage ou d'amarrage.

Il serait peu intéressant de ne pouvoir utiliser les résultats précédents que dans ces circonstances.

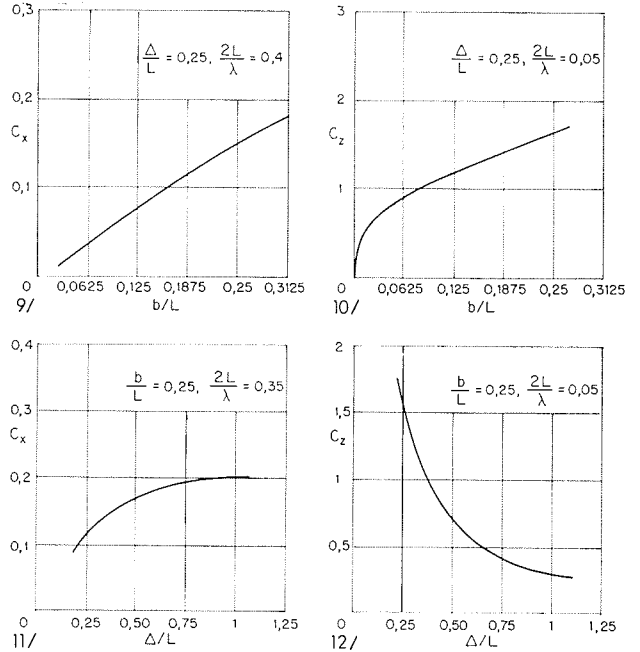
Le caractère non linéaire de la plupart des liaisons entre le navire et les structures fixes n'échappe à personne. De nombreuses études seront vraisemblablement encore nécessaires pour décrire avec précision les réponses des liaisons classiques telles qu'amarres, duc-d'albe, défense de quai, etc. Nous avons mis en bibliographie les ouvrages de base concernant quelques-uns de ces problèmes. Citons les études de B.W. Wilson sur les amarres, celle d'O'Brien et de Russell sur les défenses de quai.

Nous ne développerons pas plus ici cet aspect « physique » du problème de l'amarrage. Notons que des études sont en cours au Département Laboratoire National d'Hydraulique en ce qui concerne les réactions des câbles immergés. Des systèmes d'amarres complexes, comportant un flotteur intermédiaire, une partie élastique et une partie inélastique de l'amarre (figure ci-après) peuvent être déjà traités à partir des programmes de calcul existants.

Sans entrer dans le détail de ces programmes, car cela nous entraînerait trop loin, nous allons essayer de décrire qualitativement les divers comportements des amarres classiques. Nous montrerons rapidement ensuite comment le modèle mathématique précédent s'intègre aux équations du problème et permet de les résoudre.

On a supposé que la réponse  $f(x)$  était symétrique pour plus de simplicité.

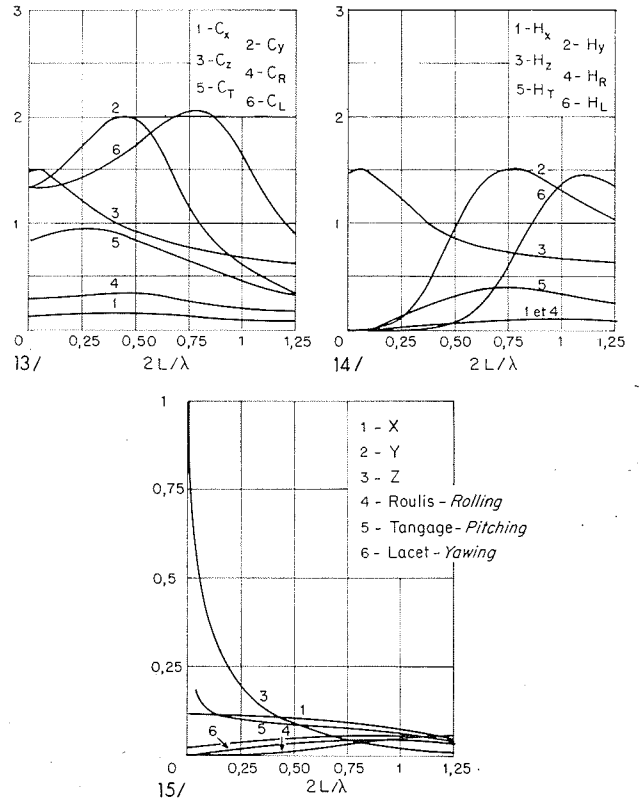
Notons que la réponse sera supposée ne dépendre que de  $x$ . C'est le cas le plus fréquent pour les très gros navires tenus par des amarres non immergées. Si l'amarre est immergée ou liée à un flotteur intermédiaire, il n'en sera plus de même; la fonction  $f$  dépendra de  $X, \dot{X}$  et  $X$ . L'amarre aura une « mémoire » du mouvement du navire. Ce cas est beaucoup plus complexe. Il ne peut être traité que par voie numérique pure. Nous le laisserons de côté.



9, 10, 11, 12/

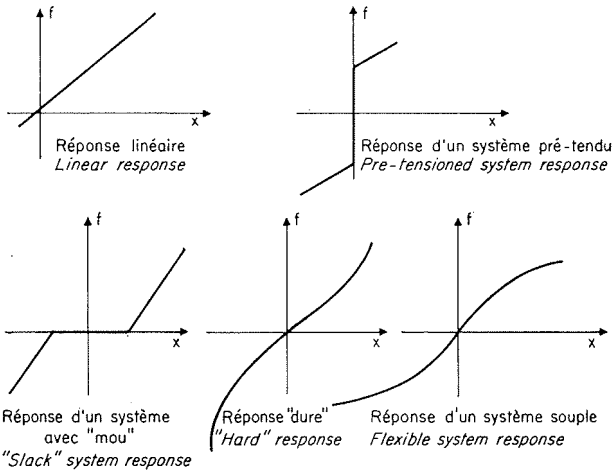
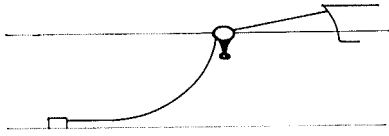
Variation des coefficients d'inertie avec les rapports  $b/L$  et  $\Delta/L$ .

Variation of inertia coefficients with  $b/L$  and  $\Delta/L$ .



13, 14, 15/

Variations des coefficients d'inertie et des réponses d'un bateau non amarré en fonction de  $2L/\lambda$  pour une houle d'incidence oblique (cas :  $b/L = 1/4, c/L = 1/2, \Delta/L = 1/4$ ).  
Variation of inertia coefficients and response of an unmoored ship with  $2L/\lambda$ , for oblique wave incidence ( $b/L = 1/4, c/L = 1/2, \Delta/L = 1/4$ ).



L'équation du mouvement du navire peut s'écrire :

$$\ddot{X} + f(X) = -\frac{1}{m} \oint_S p n_x dS$$

$f(X)$  étant une fonction en général non linéaire de  $X$ .

Le deuxième membre peut s'expliciter si nous supposons la liaison fluide-navire linéaire, ce qui constitue notre hypothèse fondamentale. Posons en linéarisant :

$$p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \varphi = \varphi_\infty + \varphi_d + \varphi_r$$

$\varphi_\infty$  et  $\varphi_d$  sont des potentiels harmoniques par hypothèse. Groupons-les au second membre, ils constitueront l'excitation  $Ae^{-i\omega t}$ . Énonçons notre problème :

Nous cherchons les solutions périodiques de l'équation :

$$\ddot{X} + \frac{\rho}{m} \oint_S \frac{\partial \varphi_r}{\partial t} n_x dS + f(X) = Ae^{-i\omega t}$$

Nous supposons démontrée l'existence de telles solutions. Il est sans doute possible d'établir qu'il n'y a pas d'autres types de solution si l'on introduit un terme d'amortissement. Nous verrons que ce terme existe toujours. Il est linéaire si la houle agit seule. Par contre, il est de la forme  $C\dot{X}^2$  si un courant agit sur le navire.

Il n'existe pas de solution explicite de l'équation différentielle précédente. Nous serons toujours obligés d'employer une méthode numérique permettant d'approcher la solution. Nous citerons celle que nous avons employée pour un mouvement à un degré de liberté :

Elle utilise le fait que l'équation fondamentale du mouvement peut s'écrire :

$$\ddot{X} + \int_0^t K(t-u) \ddot{X}(u) du + f(X) = Ae^{-i\omega t}$$

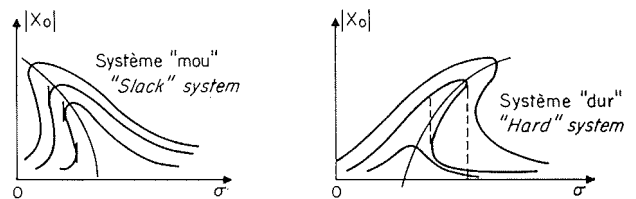
avec :

$$K(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (c_{j\sigma} + iH_{j\sigma}) e^{-i\omega t}$$

$C_{j\sigma}$  et  $H_{j\sigma}$  coefficients de masse induits et d'amortissement.

La méthode numérique repose sur l'existence d'une fonction  $X(t)$  minimisant une fonctionnelle de  $X$ . La recherche de cette fonction  $X(t)$  solution du problème s'apparente à la méthode de Ritz Galerkin.

Donnons pour terminer les caractéristiques essentielles des solutions périodiques. Suivant le type de fonction  $f$ , les courbes de réponse, c'est-à-dire les courbes du plan  $X_0, \sigma$  ont l'allure suivante :



Elles sont paramétrées en  $A$  valeur de l'excitation. Suivant la valeur du coefficient d'amortissement, on peut avoir deux tangentes verticales sur une même courbe ( $A$  donné).

C'est dans ce cas qu'apparaît le phénomène du « saut » de l'amplitude  $X_0$  (parcours en pointillé sur les figures) \*. La stabilité du système, de même que l'existence de ces « sauts » brusques de  $X_0$  dépendent directement de l'amortissement. Nous noterons qu'un amortissement important peut faire entièrement disparaître ces phénomènes d'instabilité.

## VII. — Conclusion

Nous avons voulu montrer par cet article que le problème du navire amarré et soumis à la houle était fort complexe. Il ne peut être question de le mettre totalement en équation, même avec les puissants moyens actuels. Il est possible cependant de progresser dans la compréhension des mouvements complexes du navire en schématisant le système fluide-navire-liaisons par un modèle théorique simplifié. Ce modèle, sorte de simulateur, était il y a peu de temps encore, inabordable aux calculateurs courants. Il peut être utilisé maintenant sans restriction.

Rappelons les points qui méritent encore de longues recherches :

\* Pour certaines fréquences critiques, une variation très faible de  $\omega$  peut entraîner une brusque variation de  $X_0$ .

## Bibliographie

Nous avons vu que, dans le modèle actuel, les liaisons fluide-flotteur sont linéarisées quelle que soit l'utilisation du programme. Le développement en série du potentiel est limité à son premier terme. Cette hypothèse reste très contestable lorsque les liaisons navires-structures fixes sont elles-mêmes à réponse non linéaire. Il serait intéressant cependant de comparer les résultats obtenus par le calcul à ceux d'expériences sur modèle.

L'introduction de termes du deuxième ordre dans le potentiel du fluide est actuellement à l'origine de nombreuses études.

La description du système fluide-carène par un schéma potentiel est globalement correcte, car l'inertie joue le rôle prépondérant. Cependant, lorsque la profondeur est faible, une partie de l'énergie cinétique est dissipée dans les mouvements turbulents (tourbillons près des étraves et des angles). Le modèle actuel n'en tient pas compte. Il diffuse toute l'énergie cinétique dans le fluide supposé parfait, en restitue une partie sous forme d'ondes de gravité. Ces ondes sont linéarisées. Il est probable que les phénomènes naturels sont plus amortis.

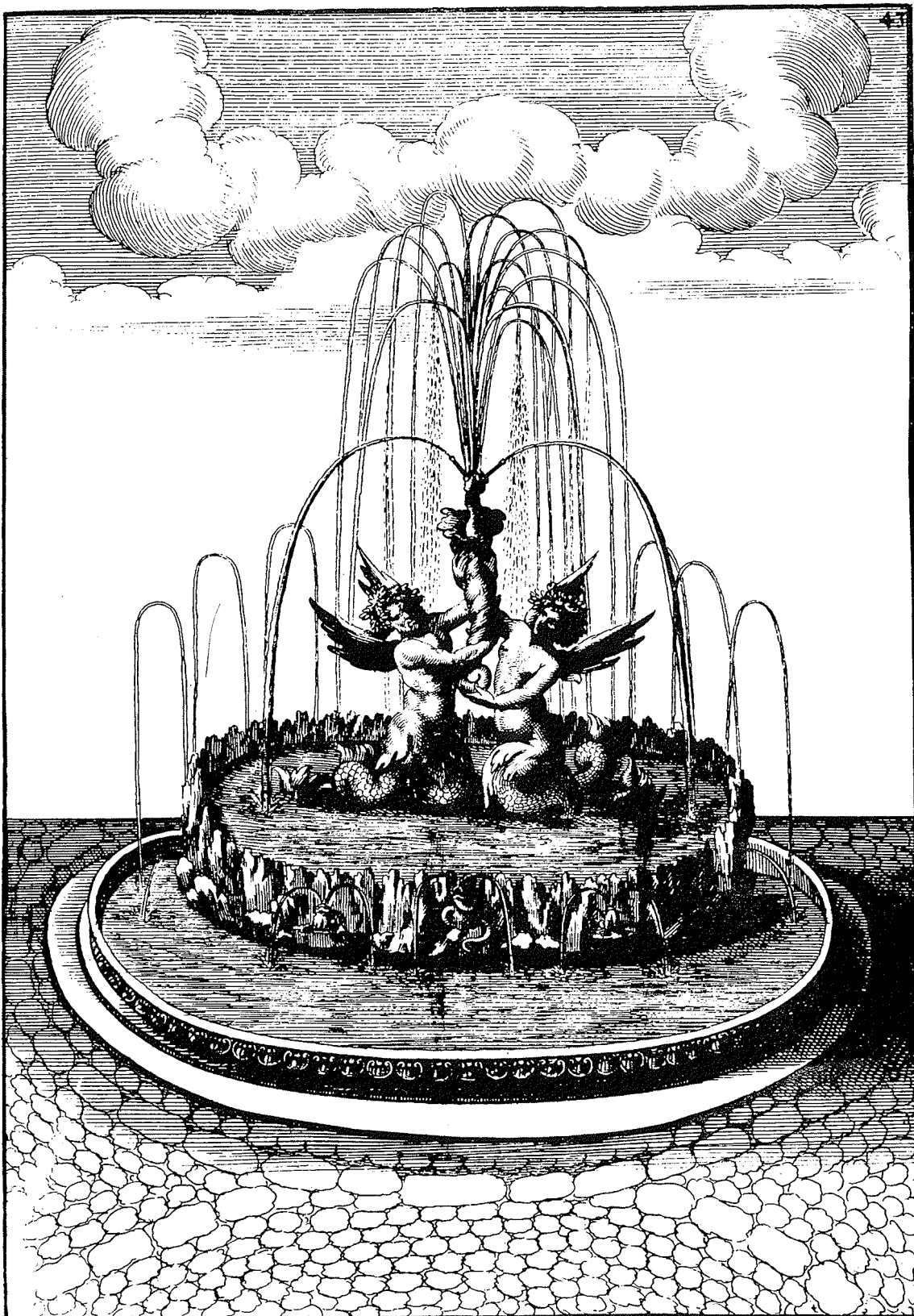
Le programme décrit dans cette note est basé sur la méthode des facettes. Mathématiquement, il se ramène à la recherche de la fonction de Green et à la résolution d'une équation intégrale. Numériquement, le problème fait appel au calcul matriciel, ce qui ne soulève donc pas de difficulté sur les ordinateurs modernes puisqu'ils sont toujours dotés des sous-programmes d'opération matriciels tels qu'inversion, multiplication, etc.

L'application de la méthode des facettes aux carènes de surface ou légèrement immergées conduit aux masses induites et plus généralement aux pressions du fluide sur la carène. On peut constater par les exemples exposés que les nombreux coefficients d'inertie varient dans de larges proportions avec la longueur d'onde des vagues par suite de l'effet de surface libre.

L'énergie cinétique transmise au fluide par le navire se transforme en partie en énergie potentielle dans les ondes de surface qui rayonnent à l'infini. Ceci explique les « résonances » apparentes des coefficients de masse ajoutées et des coefficients d'amortissement.

Pour ne pas alourdir ce rapport, nous nous sommes limités au cas du navire en eau profonde. Des résultats analogues sont cependant établis pour les profondeurs faibles, c'est-à-dire pour les profondeurs inférieures ou égales à la longueur d'onde de la houle incidente ou des ondes émises par le flotteur.

- [1] LAITONE and WEHAUSEN. — Surface waves. *Handbuch der Physik*, III, vol. 9 (1960).
- [2] LAMB. — *Hydrodynamics* (1935).
- [3] HAVELOCK (T. H.). — The pressure of water waves upon a fixed obstacle. *Proc. of the Royal Society of London*, A, 175 (1940), 409-421.
- [4] JOHN (F.). — On the motion of floating bodies I and II. *Communications of pure and applied Mathematics* (1949-950).
- [5] SCHWESINGER (G.). — On One-Term Approximations of Forced Non-Harmonic Vibrations. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 17, n° 2 (June 1950), 202.
- [6] FRIEDRICHS and STOCKER. — Forced Vibrations of Systems With Non-Linear Restoring Force. *Quarterly of applied Mathematics*, Erown University, Providence, R.I., vol. 1, (1943), 97-115.
- [7] SILVERMAN (I. K.). — On forced pseudo-harmonic Vibrations, *Journ. Franklin Inst.*, 217 (1934), 743.
- [8] TIMOSHENKO (S.). — *Vibration Problems in Engineering*. D. Van Nostrand Co, New York (1928), chap. II.
- [9] DEN HARTOG (J. P.). — *Mechanical Vibrations*, McGraw-Hill, New York and London, 2nd Edition (1940).
- [10] APPLETON (E. V.). — On the anomalous Behavior of a Galvanometer. *Phil. Mag.*, Ser. 6, 47 (1924), 609.
- [11] WILSON (B. W.). — Le problème de l'énergie dans l'amarrage des navires exposés à l'action des lames. *Bulletin de l'Association Internationale Permanente des Congrès de Navigation* (1959), vol. II.
- [12] WILSON and ABRAMSON. — A Further Analysis of the longitudinal response of moored vessels to sea oscillations. Mechanical College of Texas Pro Department of Oceanography College Station, Texas, projet 24, ref. 55, 16 T.
- [13] WILSON. — Caractéristiques des câbles d'ancres en mer profonde et soumis à de forts courants marins. *Bull. A.I.P.C.N.*, IV, n° 18 (1965).
- [14] GIRAUDET (P.). — Recherches expérimentales sur l'énergie d'accostage des navires. *Annales des Ponts et Chaussées*, II, (1966).
- [15] VASCO-COSTA (F.). — The Berthing Ship; The effect of Impact on the Design of Fenders and Berthing Structures (1964).
- [16] KIM. — On the harmonic oscillations of a rigid body on a free Surface. *Fluids Mechanics*, vol. 21, (1965) 3.
- [17] LEBRETON (J.-C.). et MARGNAC (A.). — Traitement sur ordinateur de quelques problèmes concernant l'action de la houle sur les corps flottants en théorie bidimensionnelle. *Bulletin du C.R.E.C.*, n° 18 (1966), 413.
- [18] DAUBERT (A.) et LEBRETON (J.-C.) — Diffraction de la houle sur des obstacles à parois verticales. *La Houille Blanche*, n° 4 (juillet 1965).



Gravure extraite de *Architectura curiosa nova* par G. A. BÖCKLERN  
Nuremberg (1664)