ÉTUDE DU RÉGIME TRANSITOIRE DE L'ÉCOULEMENT DE L'EAU PENDANT LE DRAINAGE DES NAPPES A SURFACE LIBRE

PAR G. VACHAUD *

I. — Introduction

Le drainage des nappes à surface libre a longtemps été considéré comme un problème d'écoulement simple, répondant à l'hypothèse suivante : lors du rabattement d'une nappe, il y a drainage instantané de la partie de sol située au-dessus du niveau de la nappe (Ferris, 1962; Hantush, 1966). Cette hypothèse conduit à la détermination de la porosité effective, ou porosité de drainage (specific yield) définie par :

$$\varepsilon = \theta_0 - \theta_r \quad (1)$$

où θ_0 est la teneur en eau du sol sous le niveau de la nappe, θ_r est la teneur en eau résiduelle représentant la quantité d'eau restant fixée aux pores par des forces d'absorption.

Lors d'un rabattement ΔZ d'une nappe, le volume d'eau drainé est alors directement obtenu par :

$$\Delta V_w = \varepsilon \cdot A \cdot \Delta Z \quad (1')$$

où A est la surface de la nappe. La position du niveau de la nappe est calculée à partir des équations de l'hydrodynamique des milieux poreux saturés. Pour un écoulement à deux dimensions, entre deux drains parallèles, on a ainsi :

$$K_0 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right] = \varepsilon \frac{\partial h}{\partial t}$$

* Attaché de Recherches au C.N.R.S., Laboratoire de Mécanique des Fluides, Grenoble.

où : h est la cote de la surface libre;
 K_0 la perméabilité du sol saturé.

Après linéarisation, cette équation se ramène (Van Schilfgaarde, 1957) à :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{\varepsilon}{K_0 m} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2)$$

où m est la distance entre les drains et le fond de la nappe, reposant sur une couche imperméable.

Bien qu'il n'existe pas d'essais normalisés pour déterminer θ_r , on emploie ainsi couramment ε comme une constante caractéristique des écoulements à surface libre dépendant uniquement de la nature du sol (Todd, 1957; De Wiest, 1965; Bouwer, 1963). Une des méthodes classiques de détermination de ε revient à prendre un échantillon de sol saturé, à teneur en eau initiale θ_0 , à le laisser se drainer par gravité, et à mesurer sa teneur en eau θ_r lorsque le drainage est « terminé » (Meinzer, 1932), sans que ne soient cependant spécifiées ni la hauteur de l'échantillon, ni la durée du drainage, ni l'importance du rabattement.

Si l'on considère (fig. 1 a), le drainage d'un échantillon de sol de hauteur L , initialement saturé sur toute sa hauteur et si l'on note :

- Z le rabattement imposé à la nappe au temps $t=0$ (Z sera pris comme une grandeur arithmétique);
- z la cote d'une section de la colonne, l'origine des cotes étant située à la base de la colonne, avec l'axe Oz orienté vers le haut,

1/ Schéma des essais de drainage.
Schematic diagram of drainage tests.

$\theta(z, t)$ la valeur de la teneur en eau à la cote z au temps t , avec $\theta(z, 0) = \theta_0$;

les teneurs en eau dans la colonne vont, au cours du drainage, évoluer entre la répartition initiale $\theta = \theta_0$ et la répartition finale donnée par la courbe d'équilibre en drainage A un instant t , le profil hydrique $\theta(z, t)$ permet de calculer le volume d'eau écoulé par la base de la colonne par :

$$V_w(t) = A \int_0^L (\theta_0 - \theta) dz$$

Le volume drainable maximal, pour un rabattement Z donné, sera directement obtenu par l'aire du triangle curviligne délimité par la courbe de succion en drainage $\psi(\theta)$, la surface du sol et la valeur de θ_0 . Soit V_∞ ce volume limite, obtenu au bout d'un temps très grand (fig. 5). Si l'on définit le coefficient d'emmagasinement « storage coefficient » S par :

$$S = \frac{V_w}{V_s} \quad (3)$$

où V_s est le volume de sol drainé, on voit immédiatement que S est essentiellement une fonction de Z et t .

Si l'on considère enfin le cas général du drainage à partir d'une nappe initialement à la distance H de la surface du sol (dans le cas donné ci-dessus (fig. 1 a) on a $H = 0$), on aboutit à une relation du type :

$$S = f(H, Z, t) \quad (4)$$

avec, dans le cas où $H \geq H_c$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S = \varepsilon$$

La courbe $\psi(\theta)$ tend vers une asymptote verticale, dans le domaine des faibles teneurs en eau, qui correspond à θ_r . H_c est une profondeur critique de la nappe égale à la succion à partir de laquelle on a pratiquement $\theta = \theta_r$ (Vachaud, 1967 a).

Le problème du drainage d'une nappe à surface libre doit donc être considéré comme un problème d'écoulement en milieu poreux non saturé, répondant à une équation du mouvement adaptée à ce type de problèmes.

Si l'on définit :

q le débit unitaire correspondant à une teneur en eau θ ;

k la conductivité hydraulique, fonction de la teneur en eau θ ;

Φ le potentiel total formé de deux composantes :

— le potentiel capillaire ψ correspondant à une teneur en eau θ et donné par la courbe de succion du matériau (c'est une grandeur négative);

— le potentiel gravitaire z , correspondant à la cote d'une section de la colonne :

$$\Phi = \psi + z \quad (5)$$

(à l'équilibre, $\psi = -z$),

l'équation de l'écoulement sera obtenue en considérant :

a) l'équation de continuité :

$$\text{div } q = - \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (6 a)$$

b) la loi de Darcy généralisée :

$$q = -k \text{ grad } \Phi \quad (6 b)$$

Pour un écoulement unidimensionnel orienté dans la direction des z décroissants, on obtient, en combinant (6 a) et (6 b), l'équation générale de l'écoulement :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial k}{\partial z} \quad (7)$$

permettant d'évaluer $\theta(z, t)$ à partir de $k(\theta)$ et $\psi(\theta)$ si ces fonctions sont connues.

Les conditions initiales et aux limites permettant de résoudre cette équation seront différentes pour deux classes de problèmes :

a) drainage d'une nappe initialement de surface ($H = 0$) (fig. 1 a) : la nappe passe de la cote $z = L$, $t < 0$ à la cote $z = L - Z$, $t \geq 0$;

b) drainage d'une nappe profonde ($H \neq 0$) (fig. 1 b) : la nappe passe de la cote $z = L - H$, $t < 0$ à la cote $z = L - (H + Z)$, $t \geq 0$. Pour $t < 0$ il existe au-dessus de la nappe une zone de teneur en eau variable. Dans le cas illustré figure 1 b nous avons supposé que le profil hydrique 1 dans cette zone correspond à un profil d'équilibre. Les profils hydriques évolueront donc dans ce cas pendant le drainage entre les courbes 1 et 2 déduites par translation Z .

Précisons enfin que le « niveau » de la nappe est défini par la cote du plan d'eau obtenu dans un récipient de 25 cm de diamètre relié à la base de la colonne. Cette cote ne correspond donc pas à la limite de la zone de teneur en eau θ_0 dans la colonne. En effet, en dessous du niveau de la nappe, le sol est à une teneur en eau uniforme θ_0 et l'eau du sol est soumise à une pression supérieure à la pression atmosphérique; au-dessus de la nappe, l'eau du sol est en dépression mais, à l'équilibre, on rencontre d'abord une zone d'épaisseur z_e où la teneur en eau vaut θ_0 (frange capillaire), puis une zone où la teneur en eau varie progressivement de θ_0 à θ_r .

On peut apprécier la complexité du problème en examinant le cas simplifié où l'on néglige l'existence de la zone non saturée ($\theta < \theta_0$) et où l'on ne considère que le bilan global du drainage — c'est-à-dire le volume d'eau total écoulé entre le début du drainage et l'équilibre.

Pour le drainage d'une nappe de surface, on peut considérer deux cas, selon que le rabattement Z est supérieur ou inférieur à la hauteur de la frange capillaire. Si $Z \leq z_c$, le volume d'eau drainé est nul. Si $Z > z_c$, V_∞ est proportionnel à $Z - z_c$.

Dans le cas d'une nappe située à une profondeur initiale H , on distinguera également deux cas :

— si $0 < H \leq z_c$, V_∞ est proportionnel à :

$$Z - (z_c - H);$$

— si $H > z_c$, ce volume est proportionnel à Z .

L'équation générale de l'écoulement (7) s'écrit plus communément sous la forme :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial k}{\partial z} \quad (8)$$

où $D = k(\partial \psi / \partial \theta)$ est le coefficient de diffusivité (Philip, 1958). L'artifice de calcul provoqué par l'introduction de D — qui n'a aucune signification physique, et qui ne doit surtout pas donner l'impression que les écoulements d'eau en milieu poreux non saturé se ramènent à des problèmes de diffusion moléculaire — revient en fait à faire passer les équations de l'écoulement dans une classe plus générale : celle des équations de transport avec un coefficient de diffusion quelconque.

L'utilisation de (1) et (1') masque donc en fait trois réalités :

- l'existence d'une frange capillaire à teneur en eau constante;
- l'existence au-dessus de cette frange d'une zone à teneur en eau variable, où le potentiel spécifique à une teneur en eau donné θ est lié à cette valeur par la courbe de succion;
- le fait que l'eau située dans cette zone non saturée ne s'écoule pas instantanément, mais que les variations de teneurs en eau $\theta(z, t)$, fonctions des caractéristiques k et ψ du matériau et des conditions initiales et aux limites du problème considéré, sont obtenues en résolvant l'équation (7) ou (8).

Cependant, la solution de cette équation n'est possible qu'en utilisant des méthodes numériques relativement complexes, sur des calculateurs à grande capacité. De plus, cette équation repose sur l'hypothèse de validité de la loi de Darcy généralisée, hypothèse qui n'a été que très rarement vérifiée. Quand bien même cette hypothèse serait valable, il faut en outre avoir les lois $\psi(\theta)$ et $k(\theta)$ pour résoudre (7), mais la seconde est généralement inconnue. Enfin, le contrôle des solutions $\theta(z, t)$ nécessite la mesure rapide et précise des teneurs en eau durant l'écoulement, mesure qui ne peut s'effectuer valablement qu'avec des techniques d'absorption — ou de thermalisation — de rayonnements nucléaires, donc avec un matériel relativement élaboré.

Les difficultés rencontrées à ces différents niveaux peuvent expliquer l'utilisation abusive des formules (1) et (1') et le nombre restreint d'études effectuées sur ce problème de drainage en tenant compte de l'écoulement dans la zone non saturée.

Les premiers résultats analysant l'erreur introduite dans les calculs de drainage de nappe en adoptant l'hypothèse d'une porosité effective constante, sont dus à Luthin-Worstell (1957). A partir d'une cuve à sable, et en mesurant l'évolution des pressions capillaires dans le sol et le profil de la nappe durant le drainage, ces auteurs montrent que, pour un sol à granulométrie étroite (sable bien calibré), l'hypothèse $S = \epsilon$, revient en fait à substituer le niveau de la frange capillaire au niveau de la nappe.

D'autres analyses qualitatives ont ensuite été effectuées par Childs (1960), Childs-Poulovassilis (1962), Youngs (1963) et Degallier (1965).

Les premiers essais de résolution de l'équation (8) — appliquée au problème du drainage des sols — sont dus à Day et Luthin (1956). Mais les résultats, obtenus sous la forme : variation de pression totale en fonction du temps, sont peu facilement exploitables. Il semble que le pas d'itération soit trop grand, et la méthode de calcul choisie est longue et laborieuse. Des essais expérimentaux effectués simultanément avec des tensiomètres dans une colonne de sol ne sont guère exploitables non plus, car tout le début du drainage n'est pas exploré, du fait de l'inertie des tensiomètres. Ce n'est qu'à partir de 1965 qu'une méthode approchée satisfaisante de résolution numérique de l'équation (8) a pu être obtenue (Remson, 1965; Liakopoulos, 1965; Watson, 1967; Remson, 1967), bien qu'il faille noter que seul Watson apporte des résultats expérimentaux intéressants à l'appui des résultats théoriques.

Entre temps, un certain nombre d'essais d'analyse approximative de la physique du drainage ont été présentés en s'appuyant, soit sur une analogie avec l'écoulement de Poiseuille dans un milieu capillaire (Youngs, 1960), soit sur une hypothèse de linéarité de la loi $D(\theta)$ (Gardner, 1962; Fujioka, 1964).

Les premiers essais expérimentaux réellement exploitables remontent à 1960 (Taylor, 1960), mais ces résultats ne permettent d'apprécier que la valeur du coefficient d'emménagement S à l'équilibre, et on ne peut en déduire ni l'évolution des profils hydriques durant le drainage, ni la valeur de S en régime transitoire. Les seules données utilisables sont en fait celles de Prill-Johnson (1965) et de Watson (1966). Les premiers mesurent l'évolution des pressions capillaires durant le drainage d'une nappe de surface dans des colonnes de sables et billes de verre en utilisant des tensiomètres; le dernier obtient directement les profils hydriques par absorption de rayons γ . Mais Watson n'étudie que le début du drainage, alors que les méthodes expérimentales utilisées par Prill-Johnson permettent seulement d'analyser l'écoulement au bout d'un temps relativement long (au moins une heure), et jusqu'à la fin du drainage (inertie des tensiomètres).

Signalons enfin la parution toute récente d'une étude de Jensen (1967) sur un sujet très proche de celui que nous exposons ici, et se basant sur les mêmes méthodes de mesure.

A partir d'essais de drainage effectués sur des colonnes verticales de sable, nous avons essayé de rechercher la loi de variation du coefficient d'emmagasinement en fonction du temps, du rabattement et de la profondeur de la nappe, et nous analysons l'erreur résultant de l'utilisation de l'hypothèse (1') sur des modèles d'écoulements couramment utilisés. Puis, à partir de l'évolution des teneurs en eau pendant le drainage, évolution obtenue par absorption de rayons γ , nous donnons une méthode de détermination de la conductivité hydraulique $k(\theta)$, ce qui nous conduit à vérifier, pour le type de sol considéré, la validité de la loi de Darcy généralisée (6 b).

II. — Méthode expérimentale

1. Caractéristiques et mise en place du sol.

Les essais ont été effectués sur la portion inférieure à 2 mm d'un sable de rivière. On trouvera figure 2 la courbe granulométrique du matériau, ainsi que la courbe de pression capillaire en drainage (à l'équilibre) obtenue séparément par un essai classique de plaque de succion sur un échantillon de même sol, compacté à la même masse volumique que la colonne de sable.

Le sable est compacté à une teneur en eau initiale $\theta_i = 0,025 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$ dans une colonne d'Altuglass de 180 cm de haut et de 9,02 cm de diamètre intérieur. Pour obtenir un compactage uniforme, le sol est versé par petites quantités, puis chaque couche est vibrée extérieurement avec un maillet de bois sous une énergie constante. Lorsque la colonne entière est remplie, une prospection aux rayons γ permet de vérifier l'homogénéité en masse volumique. Si la largeur de bande de dispersion des valeurs ponctuelles de la masse volumique autour de la valeur moyenne est supérieure $\pm 2 \%$, la colonne est détruite et reconstituée. La masse volumique moyenne de la colonne de sol utilisé vaut :

$$\rho_d = 1,61 \pm 0,025 \text{ g/cm}^3$$

La base de la colonne est fixée sur un filtre de 10 cm de gravier, relié à une burette de Mariotte. Avant le début des essais, la burette de Mariotte est remontée progressivement jusqu'à ce que la surface libre de la nappe arrive à 5 mm au-dessus de la surface du sol, et un écoulement permanent est maintenu pour mesurer la perméabilité du sol sous la nappe.

Cette perméabilité vaut : $K_0 = 1,09 \text{ cm/mn}$ pour une teneur en eau moyenne (obtenue par prospection de rayons γ) :

$$\theta_0 = 0,342 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$$

Il faut noter que θ_0 est sensiblement inférieur à la porosité du sol, estimée à partir du poids spécifique et de la masse volumique du sol, qui vaut approximativement :

$$n \approx 0,41 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$$

la différence $\theta_0 - n$ représente le volume d'air emprisonné dans le sol durant la remontée de la nappe. Cependant, en accord avec les résultats de Croney-Coleman (1958), Topp (1966), cette quantité est remarquablement constante durant les cycles de drainage successifs sur la même colonne de sol.

Lors d'un premier drainage, la nappe est instantanément rabattue de Z (fig. 1). Les teneurs en eau sont mesurées selon la méthode décrite au paragraphe suivant, et le volume d'eau drainé est mesuré par la burette de Mariotte. A la fin de l'essai, le niveau de la nappe est soit remonté au sommet de la colonne pour un nouvel essai de drainage — à partir de la même teneur en eau pour un sol de même masse volumique, avec un rabattement Z' —, soit rabattu d'une nouvelle quantité ΔZ . Dans le premier cas, on obtient les caractéristiques du drainage d'une nappe de surface, dans le second, celles du drainage d'une nappe en profondeur à la cote initiale $z = L - Z$.

2. Détermination des teneurs en eau.

Les teneurs en eau sont déterminées par absorption de rayons γ selon la méthode expérimentale décrite par Wack (1961), Benblidia (1963), Davidson (1963), Reginato-Van Bavel (1964) et Nielsen-Vachaud (1964).

La colonne de sol est fixée contre un montant vertical qui sert de guide à une plateforme encadrant la colonne (photo 1). Sur cette plateforme, sont montés de part et d'autre de la colonne une source de 200 millicuries de ^{137}Cs et un détecteur à photomultiplicateur avec cristal de INa de 1,5 pouce. Les rayons γ émis par la source sont collimatés en un faisceau de 3 mm de diamètre par un bloc de plomb de 50 mm d'épaisseur, et sont astreints à passer dans un plan diamétral vertical de la colonne. La plateforme est mue par un moteur électrique à mouvement réversible.

Les valeurs obtenues selon les procédés classiques (Davidson, 1963) sont respectivement :

$$\begin{aligned}\mu_w &= 0,08297 \pm 0,00016 \text{ cm}^2/\text{g} \\ \mu_s &= 0,07739 \pm 0,00075 \text{ cm}^2/\text{g}\end{aligned}$$

Les variations de teneur en eau sont données par la formule classique :

$$\ln \frac{N_0}{N} = x (\rho_w \mu_w \theta + \rho_d \mu_s) \quad (9)$$

Pour un temps de comptage de 50 s, une teneur en eau θ de 30 % et un degré de certitude de 95 %, on a dans ces conditions :

$$\frac{\Delta \theta}{\theta} \leq \pm 2,5 \cdot 10^{-2}$$

Les variations de comptage dues aux fluctuations de l'appareillage de mesure sont prises en compte en contrôlant, avant et après les mesures, le taux de comptage à travers un écran standard.

Afin d'obtenir l'évolution des teneurs en eau à différents niveaux successifs de la colonne, il est nécessaire de procéder à un déplacement par paliers de la plateforme de mesure. Cette plateforme est initialement positionnée pour que le faisceau

2/ Courbe de succion et distribution granulométrique pour le sable de rivière utilisé.

Suction curve and grain size characteristics for the river sand used.

de rayons γ soit situé dans un plan voisin du sommet de la colonne. Tant que la teneur en eau de la section de mesure reste fixe, les taux de comptage sont constants, puis ils varient brusquement au passage du front correspondant à la teneur en eau θ_0 . La plateforme est alors descendue pour étudier l'évolution des teneurs en eau dans une section de mesure initiale, etc.

L'écoulement étant très rapide au début (le front de teneur en eau θ_0 passant de la cote 180 cm à la cote 60 cm durant les dix premières minutes), et la fréquence des mesures étant limitée par la durée des comptages, qui doit être d'au moins 20 s pour avoir une précision suffisante, le nombre de sections explorées est assez restreint durant cette période : elles sont espacées d'environ 20 cm. Les variations de taux de comptage sont alors directement enregistrées graphiquement.

Au fur et à mesure que le drainage progresse, l'écoulement devient beaucoup plus lent et il devient possible d'augmenter le nombre et la durée des mesures. Les temps de comptage moyens passent alors à 50 s, avec impression sur enregistreur digital.

On trouvera figure 3 les résultats des mesures obtenus par cette méthode pour un rabattement de 180 cm. Chaque point représente une prospection dans la section considérée.

Par changement de paramètre on peut facilement, à partir de la figure 3, obtenir la variation des pro-

Photo 1/

Essai de drainage. Plateforme de mesures pour colonnes verticales.

Drainage test. Vertical column measurement platform.

files hydriques dans la colonne durant le drainage. On trouvera ainsi figure 4 a les profils hydriques obtenus pour l'essai de drainage défini par $H = 0$, $Z = 180$ cm, dont les résultats directs sont donnés figure 3.

La figure 4 b représente les résultats de deux essais de drainage successifs correspondant aux conditions suivantes :

$$H = 0, \quad Z = 103 \text{ cm}$$

$$H = 103, \quad Z = 77 \text{ cm}$$

Le second essai a été effectué 22 h après le début du premier, et avant que la courbe d'équilibre (en pointillés sur la figure 4 b correspondant à cet essai) n'ait été atteinte.

L'étude détaillée de l'évolution de $\theta(z, t)$ fait l'objet d'un chapitre spécial.

III. — Valeur du volume d'eau drainé et du coefficient d'emmagasinement Etude des modèles

Les courbes reportées figure 5 représentent la variation du volume d'eau écoulé à la base de la colonne en fonction du temps et du rabattement pour cinq essais effectués à partir d'une nappe affleurant initialement la surface du sol ($H = 0$).

Les points reportés sur ces courbes correspondent aux valeurs de V_w obtenues soit par lecture de la burette de Mariotte reliée à la base de la colonne, soit par intégration des profils hydriques $\theta(z, t)$.

Ces essais sont relatifs à des rabattements de 49, 77, 103, 143 et 180 cm, pour une colonne de sol de 180 cm de long. Dans chaque cas, la courbe $V_w(t)$ tend vers une valeur limite V_∞ donnée par intégration du profil d'équilibre $\psi(\theta)$ correspondant :

$$V_\infty = A \int_0^Z (\theta_0 - \theta) d\psi \quad (10)$$

Pour les essais considérés, V_∞ vaut respectivement 410, 890, 1 310, 2 010 et 2 630 cm^3 ($A = 63,93 \text{ cm}^2$).

Pour étudier l'influence de la frange capillaire et de la zone non saturée existant initialement au-dessus de cette frange sur les valeurs des volumes d'eau drainés, il est intéressant de comparer les deux essais de drainage reportés figure 4 b. Afin de simplifier l'exposé, adoptons les dénominations suivantes :

- drainage I. H = 0 Z = 180 cm
- drainage II. H = 0 Z = 103 cm
- drainage III. H = 103 Z = 77 cm

Compte tenu de l'effet de la frange capillaire, on pourrait, dans un premier stade, essayer de com-

parer le drainage III à un drainage de nappe de surface effectué avec un rabattement :

$$Z_* = Z + z_c = 93,5 \text{ cm}$$

donc avec un essai sensiblement équivalent à l'essai II, en tenant compte de l'influence de la zone non saturée. Cette comparaison ne peut cependant avoir de valeur qu'en terme de bilan global. En effet, il faut remarquer que, dans le cas du drainage III, la position finale de la nappe correspond au niveau de la base de la colonne, alors que, dans l'essai II, il existe une distance de 77 cm entre la nappe (position finale) et la base de la colonne. Si bien qu'avec des rabattements équivalents, les gradients initiaux, obtenus en considérant le milieu comme saturé durant les premières secondes du drainage, seront assez différents pour les cas II et III.

Les valeurs des volumes drainés et les débits correspondant aux trois essais I, II, III, sont reportées figure 6 pour les cent premières minutes de chaque essai. Les courbes $V_w(t)$ relatives aux essais I et II sont naturellement les mêmes que celles données figure 5. Les cercles entourant ces courbes correspondent aux valeurs des volumes obtenues par intégration des profils hydriques, reportées figure 4, aux temps correspondants. Ces résultats sont également reportés en clair dans le tableau 1.

Tableau 1 / Valeurs de V_w , $q(\theta_0)$, V_w/V_∞ et τ pour les trois essais de drainage reportés figure 4

Table 1 / V_w , $q(\theta_0)$, V_w/V_∞ and τ values for the three drainage tests in Figure 4

t	H = 0								H = 103 cm			
	Z = 180 cm				Z = 103 cm				Z = 77 cm			
	V_w	q	V_w/V_∞	τ	V_w	q	V_w/V_∞	τ	V_w	q	V_w/V_∞	τ
0	0	0,990	0	0	0	0,715	0	0	0	0,90	0	0
2	120	0,95	0,046	0,048	70	0,67	0,054	0,070	110	0,82	0,086	0,086
5	305	0,895	0,116	0,120	210	0,55	0,161	0,175	290	0,68	0,216	0,22
10	565	0,77	0,215	0,240	415	0,44	0,317	0,35	495	0,52	0,369	0,43
15	800	0,64	0,304	0,361	540	0,32	0,412	0,524	650	0,36	0,484	0,65
20	980	0,51	0,373	0,481	620	0,24	0,473	0,700	750	0,26	0,558	0,86
30	1 240	0,34	0,471	0,722	735	0,15	0,561	1,05	870	0,14	0,647	1,30
45	1 500	0,21	0,571	1,085	855	0,09	0,653	1,57	960	0,09	0,715	1,95
60	1 635	0,135	0,622	1,444	930	0,059	0,710	2,10	1 015	0,058	0,756	2,60
120	1 940	0,058	0,738	2,888	1 080	0,021	0,825	4,20	1 120	0,026	0,834	5,20
240	2 150	0,020	0,817	5,78	1 170	$7 \cdot 10^{-3}$	0,894	8,38	1 210	0,010	0,900	10,50
360	2 230	0,010	0,848	8,664	1 200	$4,2 \cdot 10^{-3}$	0,916	12,60	1 250	$5,1 \cdot 10^{-3}$	0,930	—
600	2 340	$4,5 \cdot 10^{-3}$	0,889	14,45	1 260	$2 \cdot 10^{-3}$	0,961	—	1 275	$3,1 \cdot 10^{-3}$	0,947	—
1 440	2 460	$1,2 \cdot 10^{-3}$	0,935	—	1 280	$6 \cdot 10^{-4}$	0,977	—	1 320	—	0,982	—
5 000	2 560	$2,1 \cdot 10^{-4}$	0,973	—	1 300	—	0,987	—	1 340	—	0,996	—
10 ⁴	2 590	—	0,985	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Equil.	2 630	—	—	—	1 310	—	—	—	1 345	—	—	—

Unités : t, mn; V_w , cm^3 ; q, cm/mn.

Lors d'un rabattement Z , tout l'écoulement a donc lieu dans la zone saturée, avec un débit unitaire constant :

$$q = -K_0$$

Le volume d'eau drainé au temps t vaut :

$$V_w = A \cdot \varepsilon \cdot q_0 t = A \cdot \varepsilon \cdot K_0 \cdot t \quad (12)$$

Le volume total drainable est donné par (1') :

$$V_\infty = \varepsilon \cdot A \cdot Z$$

Le drainage se termine donc au temps t' tel que :

$$t' = \frac{Z}{K_0}$$

Le second modèle — *modèle capillaire* — (Youngs, 1960), prend en compte l'influence de la frange capillaire. Il doit donc mieux s'adapter aux cas réels que le modèle précédent. Il est basé sur l'analogie entre l'écoulement en milieu poreux et l'écoulement dans un faisceau de capillaires de diamètre uniforme, l'écoulement dans chaque capillaire répondant à la loi de Poiseuille, et le débit s'arrêtant lorsque, dans chaque tube, la cote de l'eau au-dessus de la surface de la nappe est égale à la hauteur de remontée capillaire.

Soient :

r le diamètre de chaque tube;

z la cote au-dessus de la nappe à un instant t ;

h_0 la hauteur de remontée capillaire (loi de Jurin).

Au temps t , le débit est donné pour chaque tube par :

$$-\pi r^2 \frac{dz}{dt} = \frac{\rho_w g}{8 \eta} \pi r^4 \frac{z - h_0}{z}$$

En comparant avec la loi de Darcy, on voit que :

$$K_0 \sim \frac{\rho_w g}{8 \eta} r^2$$

où η est la viscosité dynamique de l'eau.

Si l'on considère un faisceau de n tubes et si l'on introduit les valeurs suivantes :

$$V_w = n\pi r^2 (Z - z) = \text{volume de liquide drainé au temps } t,$$

$$V_\infty = n\pi r^2 (Z - h_0) = \text{volume total drainable},$$

$$q_0 = \frac{\rho_w g}{8 \eta} r^2 \frac{Z - h_0}{Z} = \text{débit unitaire initial},$$

$$\tau = \frac{n\pi r^2 q_0}{V_\infty} t = \frac{K_0}{Z} t = \text{temps réduit};$$

on peut mettre l'expression ci-dessus, après développement en série et en ne conservant que le terme du premier ordre, sous une forme de variables réduites :

$$\frac{V_w}{V_\infty} = 1 - e^{-\tau} \quad (13)$$

On voit facilement qu'en variables réduites, l'expression (12), établie pour le modèle gravitaire, se ramène à :

$$\frac{V_w}{V_\infty} = \tau \quad (13')$$

Pour étudier la validité de ces deux modèles à simuler, en terme de bilan, le drainage des sols, nous avons reporté figure 7 les résultats expérimentaux de drainage, en utilisant les mêmes variables réduites. Pour passer du modèle capillaire au sol, on voit que l'analogie ne tient compte que de la hauteur de la frange capillaire. Il suffit donc de remplacer h_0 par $z_e \cdot V_w$, et V_∞ et q_0 intervenant dans l'expression de τ , sont directement obtenus à partir des mesures de volumes. La surface de la colonne de sol vaut : $A = 63,93 \text{ cm}^2$. Les points reportés figure 7 sont relatifs aux cinq essais de drainage effectués avec $H = 0$ (fig. 5) et à l'essai III.

On voit d'après la figure 7 que la courbe expérimentale, correspondant à un sol donné, est une courbe unique. Au début du drainage, cette courbe coïncide avec celle résultant du modèle capillaire, mais assez rapidement le modèle capillaire conduit à des valeurs de volume drainé bien supérieures à celles obtenues expérimentalement. Il suffit d'ailleurs de se référer aux résultats reportés figure 4 pour constater que le drainage n'est pas terminé lorsque le front de teneur en eau θ_0 atteint la cote z_e , comme l'impliquerait la théorie du modèle capillaire.

Il est d'ailleurs normal que ce modèle ne puisse décrire le drainage, puisqu'il ne tient compte que de la frange capillaire, revenant en fait à substituer à la distribution de teneur en eau donnée par la courbe $\psi(\theta)$ une distribution correspondant à :

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 & z &\leq z_e \\ \theta &= 0 & z &> z_e \end{aligned}$$

Afin d'obtenir un modèle plus apte à représenter la physique du drainage, nous proposons de considérer une famille de n_i tubes de rayon r_i choisis de façon à approcher au mieux la courbe d'équilibre en drainage.

Considérons (tabl. 3) une courbe d'équilibre en drainage après un rabattement Z de la nappe, et soient :

θ_1 la valeur de la teneur en eau à la surface du sol;

θ_0 la valeur de la teneur en eau au niveau de la nappe;

7/ Analyse de la validité des modèles gravitaires et capillaires. Influence du nombre j de familles de tubes.

Analysis of validity of gravity and capillary models. Effect of the number of tube families j .

z_e la hauteur de la frange capillaire.

Prenons j familles de tubes de rayon r_i tels que :

$$\sum_{i=1}^j n_i \pi r_i^2 h_i = \int_{\theta_1}^{\theta_0} \psi d\theta$$

où n_i est la densité de tubes r_i par surface unitaire, et h_i est la hauteur de remontée capillaire dans chaque tube. Fixons-nous entre les n_i et les r_i une relation de la forme :

$$n_1 r_1^2 = n_2 r_2^2 \dots = n_j r_j^2$$

Ce qui revient à considérer que les sections d'écoulement sont égales pour chaque famille de tubes, ou à découper la zone de teneur en eau $\theta_0 - \theta_1$ en $j\Delta\theta$ segments identiques.

Choisissons enfin pour la première famille de tubes un rayon r_1 correspondant à une remontée capillaire h_1 telle que :

$$h_1 = z_e$$

Le choix des h_i est donc fixé facilement, de façon à approcher au mieux, pour chaque segment $\Delta\theta_i$, l'aire limitée par la courbe d'équilibre, les valeurs de θ_{i-1} et θ_i et l'axe $\psi = 0$.

Pour chaque faisceau de tubes, il est possible d'écrire indépendamment la loi de Poiseuille comme dans le cas d'un faisceau de tubes uniformes, ce qui conduit à j relations de la forme :

$$\frac{V_{w,i}}{V_{\infty,i}} = 1 - e^{-\tau_i}$$

avec, dans chaque cas :

$$\tau_i = \frac{\alpha r_i^2}{Z} t \quad \alpha = \frac{\rho_w g}{8 \eta}$$

Si l'on se réfère aux tubes de rayon r_1 , correspondant à z_e , on peut définir une nouvelle variable adimensionnelle :

$$\xi_i = \frac{z_e}{h_i}$$

Soit τ le temps réduit de référence fixé par la famille de tubes r_1 , on a alors entre les τ_i une relation du type :

$$\tau_i = \tau \xi_i^2$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{V_w}{V_{\infty}} = \frac{\sum_{i=1}^j [(Z - \xi_i z_e) (1 - e^{-\tau \xi_i^2})]}{jZ - z_e \sum_{i=1}^j \xi_i} \quad (13'')$$

Afin de tester la convergence des séries utilisées, nous avons, selon cette méthode, considéré des découpages en 2, 4 et 8 tranches. On trouvera ainsi tableau 2 le calcul des volumes partiels effectués pour le découpage en quatre tranches, et pour un rabattement $Z = 103$ cm (la valeur de Z ne doit d'ailleurs pas affecter les résultats). Dans ce cas, $\theta_1 = 0$, ce qui fixe un pas de $\Delta\theta = 0,067$ cm³/cm³. Les diamètres des familles de tubes sont fixés par :

$$\begin{aligned} h_1 = z_e = 16,5 \text{ cm} & \quad h_2 = 20 \text{ cm} \\ h_3 = 23 \text{ cm} & \quad h_4 = 37 \text{ cm} \end{aligned}$$

Tableau 2 / Calcul du volume d'eau drainé dans le cas d'une analogie avec quatre familles de tubes capillaires

Table 2 / Calculated drained water volume for an analogy with four capillary tube families

$$Z = 103 \text{ cm} \quad j = 4 \quad jZ - z_e \sum_{i=1}^4 \xi_i = 315,5 \text{ cm}$$

τ	$i = 1 \quad h_1 = 16,5 \quad \xi_1 = 1$ $\tau_1 = \tau V_{\infty,1}/V_{\infty} = 0,2741$			$i = 2 \quad h_2 = 20 \quad \xi_2 = 0,825$ $\tau_2 = 0,681 \tau V_{\infty,2}/V_{\infty} = 0,2631$			$i = 3 \quad h_3 = 23 \quad \xi_3 = 0,717$ $\tau_3 = 0,253 \tau V_{\infty,3}/V_{\infty} = 0,2535$			$i = 4 \quad h_4 = 37 \quad \xi_4 = 0,446$ $\tau_4 = 0,209 \tau V_{\infty,4}/V_{\infty} = 0,2092$			V_w/V_{∞}
	τ_1	$(V_w/V_{\infty})_1$	$V_{w,1}/V_{\infty}$	τ_2	$(V_w/V_{\infty})_2$	$V_{w,2}/V_{\infty}$	τ_3	$(V_w/V_{\infty})_3$	$V_{w,3}/V_{\infty}$	τ_4	$(V_w/V_{\infty})_4$	$V_{w,4}/V_{\infty}$	
0,05	0,05	0,045	0,0123	0,034	0,034	0,0093	0,026	0,025	0,0065	0,01	0,01	—	0,028
0,10	0,1	0,095	0,0260	0,068	0,068	0,0179	0,051	0,051	0,0129	0,0199	0,020	0,005	0,062
0,25	0,25	0,225	0,0617	0,17	0,16	0,0421	0,129	0,124	0,0314	0,0497	0,050	0,0104	0,145
0,50	0,5	0,39	0,107	0,34	0,29	0,0763	0,258	0,23	0,0583	0,0995	0,098	0,0205	0,262
0,75	0,75	0,53	0,145	0,51	0,40	0,1052	0,386	0,32	0,0811	0,149	0,140	0,0293	0,360
1	1	0,63	0,173	0,68	0,495	0,130	0,515	0,41	0,104	0,199	0,185	0,0387	0,445
2	2	0,865	0,237	1,36	0,745	0,196	1,03	0,65	0,165	0,398	0,33	0,069	0,667
3	3	0,95	0,260	2,04	0,87	0,229	1,54	0,79	0,200	0,696	0,455	0,095	0,784
5	5	0,991	0,271	3,41	0,965	0,254	2,54	0,92	0,233	0,995	0,63	0,133	0,891

Tableau 3 / Influence du nombre de familles j de tubes sur les valeurs du volume drainé
Table 3 / Effect of tube family number j on drainage volume values

τ	V_w/V_∞				
	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 4$	$j = 8$
0,05	0,05	0,045	0,031	0,028	0,029
0,1	0,1	0,095	0,064	0,062	0,060
0,25	0,25	0,225	0,153	0,145	0,148
0,5	0,5	0,39	0,273	0,262	0,266
0,75	0,75	0,53	0,376	0,360	0,369
1	1	0,63	0,453	0,445	0,451
2	1	0,865	0,663	0,667	0,666
3	1	0,95	0,771	0,784	0,792
5	1	0,991	0,877	0,891	0,897

Les résultats obtenus sont également reportés figure 7. On notera que, pour le type de sol considéré, la convergence est extrêmement rapide puisqu'on obtient une courbe unique pour $j = 2; 4; 8$. Notons que le modèle gravitaire correspond à $j = 0$. Enfin, dans tous les cas, le temps de référence est bien fixé par analogie avec la famille de tubes de rayon r_1 correspondant à la hauteur de la frange capillaire z_e . Les valeurs de V_w/V_∞ pour $j = 0, 1, 2, 4, 8$ sont reportées tableau 3.

La convergence rapide s'explique facilement par l'allure de la courbe d'équilibre du matériau considéré. Passant du cas $j = 1$ au cas $j = 2$, on passe d'un cas où toute la section d'écoulement est composée de tubes de rayon identique r_1 , à celui où la moitié de la section d'écoulement est composée de tubes de rayon r_1 , l'autre moitié de tubes de rayon $r_2 = r_1/2$. Soient n_1 et r_1 la densité et le rayon des tubes dans le cas 1; on a donc, par surface unitaire de sol :

— pour $j = 1$, une section d'écoulement

$$s = n_1 \pi r_1^2$$

— pour $j = 2$, une section d'écoulement

$$s = \frac{n_1}{2} \pi r_1^2 + 2 n_1 \pi \frac{r_1^2}{4}$$

Ce qui revient donc à remplacer $n/2$ tubes de rayon r_1 par $2n$ tubes de rayon $r_1/2$.

Le drainage des tubes de rayon $r_2 = r_1/2$ étant bien plus lent que celui des tubes de rayon r_1 , il en résulte pour le cas $j = 2$ des volumes drainés bien plus faibles que dans le cas $j = 1$. D'où la variation assez brutale de V_w/V_∞ passant d'un cas à l'autre. Augmenter ensuite la valeur de j revient à affiner la valeur des volumes obtenus pour $j = 2$ sans avoir de grosses variations globales.

Il est enfin intéressant de situer la courbe expérimentale entre les deux modèles. Il est clair que le modèle à tube unique convient bien pour décrire le drainage pour $\tau < 0,5$, ce qui, pour $Z = 180$ cm, correspond à un temps réel de $t = 15$ mn, alors que le modèle à tubes multiples représente assez bien le sol pour $\tau > 2$, soit $t = 60$ mn pour le même rabat-

tement. Cette constatation est importante, car elle permet d'établir, s'il est encore utile de préciser ce point, qu'aucun modèle simple de type « capillaire » ne peut représenter l'écoulement en milieux poreux non saturés.

En effet, dans le cas $j = 1$, nous avons constaté que l'écoulement s'arrête lorsque le niveau de l'eau dans le tube atteint la cote z_e , ce qui n'est pas le cas dans un sol (fig. 4). Dans le cas $j = 2$, le modèle est au contraire relativement satisfaisant lorsque le temps est assez grand, puisque le drainage se poursuit dans les tubes les plus fins après que les tubes les plus gros se soient vidés.

Cependant, le modèle à tubes multiples ne satisfait pas la condition initiale des écoulements en milieux poreux, puisqu'avec un faisceau de capillaires tous les tubes commencent à se vider en même temps alors que, comme le montre la figure 4 a, les pores les plus fins du sol ne commencent à drainer que lorsque les plus gros, correspondant à une distribution de tubes de rayon r_1 , sont pratiquement déjà vides, ce que confirme la coïncidence, pour les faibles temps, entre la courbe expérimentale et la courbe tracée pour $j = 1$.

Le seul modèle satisfaisant serait donc en fait celui où la distribution des familles de tubes n_i, r_i varierait avec le temps, passant d'une distribution $j = 1$ de tubes uniformes, de section d'écoulement $n_1 \pi r_1^2$ en début de drainage, à une distribution multiple j_n au fur et à mesure de l'évolution du drainage, la loi $j(t)$ étant une caractéristique du matériau, fonction du rabattement et du temps, donc analogue au coefficient d'emmagasinement.

Signalons cependant que les deux courbes $j = 1, j = n$, peuvent être utilisées comme les limites de la courbe expérimentale.

Après cette diversion sur les modèles, il est intéressant d'étudier, pour un type de sol considéré, la variation du coefficient d'emmagasinement en fonction du temps, du rabattement et de la profondeur de la nappe. Le tableau 1 permet d'obtenir facilement, à partir des mesures de volume d'eau écoulé, la valeur de ce coefficient pour les essais de drainage étudiés. La loi empirique $S = f(Z, t)$ pour $H = 0$ est reportée figure 8. Notons simplement

qu'au début du drainage, pour $t < 20$ mn, S diminue lorsque Z augmente, alors qu'à partir d'un temps critique qui vaut approximativement 30 mn, S est, à un instant donné, pratiquement indépendant du rabattement sitôt que celui-ci est suffisamment important.

La courbe limite, correspondant à $V_w = V_\infty$, est l'enveloppe du réseau, et tend asymptotiquement vers ε . La forme de la courbe d'équilibre ne dépend que de la courbe de succion, alors que la vitesse avec laquelle S tend vers ε dépend essentiellement de la loi $k(\theta)$.

Comme nous l'avons exposé précédemment (Vachaud, 1967 a), il est enfin normal que, pour la même valeur du rabattement, la valeur finale de S soit d'autant plus proche de ε que la profondeur de la nappe est importante. A partir du moment où H est tel que les courbes d'équilibre 1 et 2 de la figure 1 b se déduisent totalement par translation Z , on doit même avoir $S_{lim} = \varepsilon$. Pour le sol considéré, cette profondeur critique (fig. 2) vaut : $H_c \sim 65$ cm. Ceci apparaît si l'on calcule d'après le tableau 1, les valeurs de S obtenues pour $H = 0$, $Z = 103$ cm et $H = 103$ cm, $Z = 77$ cm. Dans ce dernier cas, on obtient bien $S_{lim} = \varepsilon$.

Enfin, le drainage étant contrôlé par la conductivité capillaire à la surface du sol, et par le volume d'eau à drainer, il est naturel que l'écoulement soit d'autant plus long que le rabattement est important.

On peut, pour chaque rabattement, définir la durée du drainage comme le temps nécessaire pour que 99 % du volume total se soit écoulé; soit t_{99} ce temps. La courbe en pointillés figure 5 est obtenue en reliant pour les différents essais les points représentant $V_w/V_\infty = 0,99$. La loi $t_{99} = f(Z)$ est reportée figure 9. Cette loi a une allure exponentielle lorsque le rabattement est suffisant, mais, comme aucun drainage n'intervient pour $Z \leq z_e$, on doit avoir $t_{99} \rightarrow 0$ pour $Z \rightarrow z_e$, pour un drainage de surface.

La pente de la droite représentant la relation $t_{99} = f(Z)$ en coordonnées semi-logarithmiques doit être une fonction de K_0 . Cette courbe a été entourée par les résultats obtenus par Prill et Johnson (1965) pour les essais de drainage effectués sur les sols suivants :

- Del Monte Sand :
 $K_0 = 9,3$ cm/mn $Z = 151$ cm $z_e = 10$ cm;
- 0,120 mm Glass Beads :
 $K_0 = 0,86$ cm/mn $Z = 171$ cm $z_e = 53$ cm;
- Fresno Medium Sand :
 $K_0 = 0,46$ cm/mn $Z = 151$ cm $z_e = 12$ cm.

On trouvera également figure 9 la loi $t_{99} = f(Z)$ obtenue pour un gravier grossier ($d > 2$ mm), qui est le complément du sable de rivière utilisé pour ce mémoire. Ce gravier est caractérisé par :

$$K_0 = 9 \text{ cm/mn} \quad z_e = 2,5 \text{ cm}$$

Les résultats des essais de drainage effectués selon la même méthode sur ce gravier, sont reportés dans Vachaud (1967 c).

La simple mesure des volumes d'eau écoulés pendant le drainage de colonne de sol permet donc déjà de contrôler la valeur des hypothèses couramment adoptées, de juger de la validité des modèles à représenter ce type d'écoulement et d'estimer les

8/ Variation du coefficient d'emménagement en fonction du rabattement et du temps pour les drainages de surface.

Variation of storage coefficient with drawdown and time for surface drainage.

9/ Estimation de la durée du drainage en fonction du rabattement et de la perméabilité du sol.

Estimated drainage duration vs. drawdown and soil permeability.

variations du coefficient d'emménagement et la durée du drainage. Il est cependant nécessaire de faire un pas supplémentaire pour étudier complètement le problème du drainage : analyser l'évolution des teneurs en eau et étudier la physique de l'écoulement dans la zone non saturée.

IV. — Analyse des profils hydriques Détermination de la conductivité capillaire

La résolution numérique de l'équation (7) nécessite la connaissance de la loi $k(\theta)$, et la vérification de l'hypothèse de linéarité entre les débits et les gradients de potentiel.

En utilisant le même procédé que celui développé précédemment (Vachaud, 1966 b et 1967 b), l'analyse de l'évolution des teneurs en eau durant le

drainage permet d'établir la relation $k(\theta)$ et de montrer que cette relation est unique, pour le matériau et le type d'écoulement considéré.

La loi de Darcy généralisée s'écrit :

$$q = -k(\theta) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + 1 \right)$$

Si cette loi est valable, la valeur de k doit être unique, pour une teneur en eau déterminée θ , quels que soient les gradients de potentiel et les débits unitaires.

Le débit unitaire q doit en outre satisfaire l'équation de continuité :

$$\text{div } q = - \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (14)$$

chaque tranche de sol d'épaisseur Δz se comportant, durant l'écoulement, comme une zone de transmission avec perte de masse : la différence entre le débit entrant et le débit sortant de cette tranche provenant d'une diminution du volume d'eau stocké dans cette tranche.

Si l'on considère qu'entre les instants t et $t + dt$ la variation de teneur en eau de la tranche $[z, z + dz]$ est faible, et si l'on appelle θ_n la valeur moyenne de θ durant cet intervalle, avec $d\theta_n = 0$, (14) s'écrit, pour un écoulement unidimensionnel :

$$\frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} \quad (15)$$

Soit $v = (dz/dt)$ la vitesse d'avancement de la teneur en eau; si entre deux valeurs voisines θ_{k+1} et θ_k de la teneur en eau v varie peu — soit $\bar{v}_k$ sa valeur moyenne — on peut intégrer (15) sous la forme :

$$q_{k+1} - q_k = \bar{v}_k (\theta_{k+1} - \theta_k) \quad (16)$$

Le calcul des débits s'effectue donc par un procédé itératif.

Le gradient de potentiel $\partial/\partial z (\psi + z)$ est obtenu en utilisant la courbe de pression capillaire $\psi(\theta)$ déterminée à part sur un échantillon de même sol, et obtenue également à l'équilibre pour le drainage III. La mesure des profils hydriques donne l'évolution de la teneur en eau θ à une cote z_n en fonction du temps. En utilisant la courbe $\psi(\theta)$ on peut donc facilement obtenir l'évolution de $(\psi + z_n)$ à la cote z_n en fonction du temps.

En groupant les couples de valeurs q et $\partial/\partial z (\psi + z)$ on peut alors calculer k .

Cette méthode d'analyse a déjà été longuement exposée dans des publications précédentes (Vachaud, 1966 et 1967 *b*), nous ne reviendrons pas sur le calcul détaillé des différentes fonctions. On trouvera figure 10 l'évolution des débits unitaires et figure 11 celle des gradients de potentiels durant le drainage I. Le gradient de potentiel est constant sous le niveau du front et varie, à la cote $z = L$, de 0,909 ($t = 0$) à 1. Les courbes en pointillés figure 11 donnent l'évolution du gradient durant la période de drainage lent, une fois le front stabilisé à la cote $z = z_e$ ($t > 60$ mn).

Les couples de valeurs q et $\partial\Phi/\partial z$ sont regroupés tableau 4 pour différentes valeurs de t et z . La courbe $k(\theta)$ obtenue en regroupant des couples est reportée figure 12. On trouvera également figure 12 les valeurs de $k(\theta)$ obtenues par analyse du drainage III.

Il est clair que $k(\theta)$ est une loi unique pour ce sol, quelles que soient les valeurs de q et $\partial\Phi/\partial z$, et indépendamment des conditions aux limites de l'écoulement. L'hypothèse de généralisation de la loi de Darcy peut donc être considérée comme valide.

La courbe tracée en pointillés figure 12 est une courbe empirique de variation de $k(\theta)$, obtenue par :

$$k(\theta) = K_0 \left(\frac{\theta - \theta_r}{\theta_0 - \theta_r} \right)^{3,5}$$

selon la méthode proposée par Boreli-Vachaud, 1966.

Cette courbe représente relativement bien la loi $k(\theta)$, sauf dans les zones de faible teneur en eau ($\theta < 15\%$).

Tableau 4 / Drainage $H = 0$, $Z = 180$ cm. Calcul de $k(\theta)$

Table 4 / Drainage $H = 0$, $Z = 180$ cm. Calculated $k(\theta)$

t z (cm)	5 mn				10 mn				20 mn			
	θ (%)	q (cm/mn)	$d\Phi/dz$	k (cm/mn)	θ (%)	q (cm/mn)	$d\Phi/dz$	k (cm/mn)	θ (%)	q (cm/mn)	$d\Phi/dz$	k (cm/mn)
180	27		0,99		23,5		0,99		20,3		0,995	
150	28,2	0,28	0,98	0,29	24,6	0,17	0,988	0,172	20,6	0,07	0,99	0,071
125	30	0,44	0,974	0,45	25,8	0,255	0,986	0,26	21,2	0,102	0,988	0,103
100	32,5	0,72	0,95	0,758	27,8	0,41	0,98	0,42	22,2	0,176	0,98	0,18
75	34,2	0,895	0,82	1,092	30	0,56	0,965	0,58	24	0,24	0,97	0,25
50					34,2	0,77	0,70	1,10	27,6	0,396	0,91	0,436
40									30,4	0,452	0,78	0,58
35									32,4	0,484	0,66	0,734
30									34,2	0,51	0,47	1,082
25												
20												

t z (cm)	40 mn				60 mn				120 mn			
	θ (%)	q (cm/mn)	$d\Phi/dz$	k (cm/mn)	θ (%)	q (cm/mn)	$d\Phi/dz$	k (cm/mn)	θ (%)	q (cm/mn)	$d\Phi/dz$	k (cm/mn)
180	17,6	0,054	1	0,054	16,5	0,04	1	0,04	14,6	0,021	1	0,021
150												
125												
100	18,7	0,064	0,985	0,065	16,7	0,04	0,995	0,04				
75	19,6	0,098	0,975	0,099	17,2	0,07	0,98	0,071	14,8	0,022	0,965	0,023
50	21,5	0,144	0,945	0,152	18,8	0,096	0,96	0,100	15,5	0,027	0,895	0,030
40	23,4	0,168	0,88	0,191	20,2	0,106	0,905	0,117	16,4	0,036	0,845	0,043
35	24,4	0,182	0,81	0,225	21,2	0,112	0,88	0,130	17,4	0,042	0,80	0,052
30	26,4	0,198	0,66	0,300	22,5	0,118	0,77	0,153	18,7	0,046	0,70	0,065
25	29,4	0,216	0,45	0,48	24,6	0,123	0,59	0,208	21	0,051	0,52	0,098
20	34,2	0,235	0,225	1,045	30,2	0,133	0,225	0,592	25,4	0,056	0,23	0,244

V. — Conclusion

Nous avons donc exposé une méthode expérimentale qui permet d'analyser la validité de deux hypothèses de base couramment utilisées dans les problèmes d'écoulement en milieux poreux non saturés. La première concerne la définition du coefficient d'emmagasinement; la seconde est relative à la théorie générale des écoulements puisqu'elle revient à exprimer une relation de linéarité entre les flux et les potentiels.

Les résultats concernant le premier point montrent clairement que l'identité $S \equiv \epsilon$, associée avec le modèle gravitaire [cf. équation (1')], conduit assurément à des estimations bien trop fortes des volumes d'eau drainés.

Les modèles de type capillaire, formés par une série uniforme de tubes de rayon r_1 , associés à la hauteur de la frange capillaire, ou des séries multiples de n_i tubes de rayon r_i , conduisent à des estimations plus favorables. Mais il faut noter que le drainage d'une nappe n'est pas un phénomène aussi simple que le drainage d'un tube capillaire, ou d'une série de tubes. Dans ce dernier cas en effet, tous les tubes commencent à drainer en même temps, alors que l'on peut grossièrement caractériser le drainage d'une nappe par deux phases successives :

- dans une première période — au début de l'écoulement — le sol peut être associé à une série de tubes uniformes de rayon r_1 . Le débit est alors contrôlé par la position du front de teneur en eau θ_0 , et l'analogie avec le modèle $j=1$ est satisfaisante. Pour le sol considéré, la durée de cette période vaut, en temps réduit, $\tau \sim 0,5$. Selon la granulométrie et la perméabilité du sol, cette durée pourra être plus ou moins étendue;
- dans une seconde période, qui commence lorsque le front se rapproche de sa valeur d'équilibre, on doit considérer l'analogie avec un modèle formé de plusieurs familles de tubes de rayon $r_i < r_1$. Le volume drainé est équivalent à celui donné par ce modèle à tubes multiples pour $\tau > 2$, pour le sol considéré.

Pour $0,5 < \tau < 2$, il faudrait pouvoir imaginer un modèle où la densité de tube varie graduellement d'un modèle formé uniquement par des tubes de rayon r_1 , pour $\tau < 0,5$, à un modèle formé uniquement de tubes très fins.

Le drainage dure d'autant plus que le rabattement est long, et le sol fin. On notera, d'après les courbes données figure 9, que pour le sol considéré, il faut attendre plus de 15 jours pour que 99 % du volume drainable se soit écoulé pour un rabattement de 180 cm. Si l'on se reporte à la figure 4 a, on voit notamment que, pour ce rabattement, durant la seconde période de drainage considérée ci-avant (pour $\tau > 2$, soit $t > 60$ mn), les gradients de potentiel deviennent négligeables à la base de la colonne, dans la zone où les profils hydriques se rapprochent de la courbe d'équilibre, alors que ces gradients valent 1 à la surface du sol. Au fur et à mesure que l'écoulement progresse, c'est donc la valeur de la conductivité capillaire k , correspondant à la teneur en eau à la surface du sol, qui tend à fixer la valeur du débit drainé, les tranches

inférieures de la colonne se bornant à transmettre les volumes d'eau reçus sans apport complémentaire.

L'analyse des profils hydriques obtenus par absorption de rayons γ permet enfin de calculer la conductivité hydraulique et de vérifier la validité de la loi de Darcy généralisée, sauf peut-être au début de l'écoulement qui reste inaccessible à la mesure.

Connaissant la loi $k(\theta)$, il devient alors possible d'obtenir, par résolution de l'équation (7), l'évolution de $\theta(z, t)$ et de $\Phi(z, t)$ sous forme de données numériques pour un essai de drainage quelconque. Nous sommes actuellement en train de mettre au point un procédé numérique de résolution de cette équation (Guélin, 1967).

**

Cet article recouvre en partie le travail d'une thèse de Doctorat d'Etat ès Sciences Physiques à soutenir devant la Faculté des Sciences de Grenoble.

Les essais ont été effectués aux Laboratoires de Mécanique des Fluides de l'Université de Grenoble. L'auteur est particulièrement reconnaissant à M. le Professeur L. Santon d'avoir bien voulu accepter de diriger ce travail, et il lui sait gré d'avoir toujours été disposé à lui apporter conseils et aide matérielle. Il tient également à exprimer sa gratitude à M. B. Wack et M. P. Guélin pour leur amicale participation à de nombreuses discussions concernant cette recherche.

Manuscrit reçu le 28 février 1968.

Liste des symboles

A : section de la colonne.....	L^2
D : coefficient de diffusivité.....	$L^2.T^{-1}$
d : diamètre des grains.....	L
H : distance entre la nappe et la surface du sol avant le début du drainage.....	L
h_i : remontée capillaire dans un tube de rayon r_i	L
K_0 : perméabilité saturée du sol.....	$L.T^{-1}$
k : conductivité hydraulique, fonction de la teneur en eau.....	$L.T^{-1}$
L : cote du sommet de la colonne....	L
N_0 : taux de comptage de référence....	T^{-1}
N : taux de comptage après passage des rayons γ dans le sol.....	T^{-1}
n : porosité.	$L^3.L^{-3}$ ou %
q_0 : flux à l'instant initial du drainage.	$L.T^{-1}$
q : flux, fonction de la teneur en eau et du temps.....	$L.T^{-1}$
S : coefficient d'emmagasinement. . . .	%
t : temps.	T
V_w : volume d'eau drainé.	L^3
V_s : volume de sol drainé.	L^3
V_∞ : volume d'eau drainé à l'équilibre.	L^3
v : vitesse d'avancement des profils..	$L.T^{-1}$
w : teneur en eau pondérale.....	$M.M^{-1}$ ou %
x : épaisseur de la colonne de sol....	L
z : cote au-dessus du fond de la colonne.	L
z_c : épaisseur de la frange capillaire...	L

Z : rabattement.	L
ε : porosité effective.	%
η : viscosité dynamique.	$M.L^{-1}.T^{-1}$
μ_w : coefficient d'absorption massique de l'eau.	$L^2.M^{-1}$
μ_s : coefficient d'absorption massique du sol sec.	$L^2.M^{-1}$
θ : teneur en eau volumique du sol. .	$L^3.L^{-3}$ ou %
θ_0 : teneur en eau sous le niveau de la nappe.	$L^3.L^{-3}$
θ_r : teneur en eau résiduelle.	»
Φ : potentiel total ($\psi + z$).	L
ψ : succion (ψ est négatif).	L
ρ_w : masse volumique de l'eau.	$M.L^{-3}$
ρ_d : masse volumique du sol sec.	$M.L^{-3}$
τ : temps réduit $= (Aq_0/V_\infty).t$	adim.
ξ : hauteur réduite $= (h_i/z_c)$	»

Bibliographie.

- BENBLIDIA (M.). — Etude expérimentale de quelques problèmes d'écoulement en milieux poreux non saturés par des procédés de mesure radioactifs. Thèse de 3^e Cycle, Laboratoire de Mécanique des Fluides, Grenoble (1963).
- BORELI (M.) et VACHAUD (G.). — Note sur la détermination de la teneur en eau résiduelle et sur la variation de la perméabilité relative dans les sols non saturés. *C.R. Ac. Sci. Paris*, t. 263, (1966), 698-701.
- BOUWER (J.) et VAN SCHILFEGAARDE (J.). — Simplified method of predicting the fall of water table in drained land. *Trans. ASAE*, vol. 6, (1963), 228-291.
- CHILDS (E.C.). — The non steady state of the water table in drained land. *J. of Geophys. Res.*, vol. 65, (1960), 780-782.
- CHILDS (E.C.) et POULOVASSILIS (A.). — The moisture profiles above a moving water table. *J. of Soil Sci.*, vol. 13, n° 2, (1962), 271-285.
- CRONEY (D), COLEMAN (J.D.) et BLACK (W.P.). — Movement and Distribution of Water in Soil in relation to Highway Design and Performance. *Highway Res. Board, Spec. Rep.* 40, (1958), 226-252.
- DAVIDSON (J.M.), BIGGAR (J.W.), et NIELSEN (D.R.). — Gamma-radiation attenuation for measuring bulk density and transient flow in porous media. *J. of Geophys. Res.*, vol. 68, (1963), 4 777-4 783.
- DAY (P.) et LUTHIN (J.N.). — A numerical solution of the differential equation of flow for a vertical drainage problem. *Proc. Soil Sci. Soc. of Am.*, vol. 20, (1956), 443-447.
- DEGALLIER (R.). — Mécanisme de l'alimentation des nappes souterraines. *Chronique d'Hydrogéologie*, n° 8 (1965), 85-98.
- FERRIS (G.) et KNOWLESS (D.B.). — Theory of Aquifer Test U.S.G.S., *Water Supply Paper* 1536-E, (1962).
- FUJIOKA (Y.) et KITAMURA (T.). — Approximate solution of a vertical drainage problem. *J. of Geophys. Res.*, vol. 69, (1964), 5 249-5 255.
- GARDNER (W.R.). — Approximate solution of a non-steady drainage problem. *Proc. Soil Sci. Soc. of Am.*, vol. 26 (1962), 129-132.
- GUELIN (P.). — Intégration d'une équation de diffusion comme préliminaire à la situation numérique des écoulements de fluide en milieu poreux non saturé. *C.R. Ac. Sci. Paris*, vol. 265, (1967), 876-879.
- HANTUSH (M.S.). — Analysis of data from pumping tests in anisotropic aquifers. *J. of Geophys. Res.*, vol. 71, n° 2, (1966), 421-426.
- JENSEN (M.E.) et HANKS (R.J.). — Non steady state drainage from porous media. *Proc. A.S.C.E., J. of the Irrigation and Drainage Div.*, vol. 93, IR 3, (1967), 209-231.
- LIAKOPOULOS (A.C.). — Theoretical solution of the unsteady unsaturated flow problems in soils. *Bulletin de l'A.I.H.S.*, vol. 10, n° 1, (1965), 5-39.
- LUTHIN (J.N.) et WORSTELL (R.V.). — The falling water table in tile drainage. A laboratory study. *Proc. Soil Sci. Soc. of Am.*, vol. 21, (1957), 580-584.
- MEINZER (C.E.). — Outline of methods for estimating ground water supplies. U.S.G.S., *Water Supply Paper*, 638-C, (1932).
- NIELSEN (D.R.) et VACHAUD (G.). — Infiltration of water into vertical and horizontal soils columns. *J. of Indian Soc. of Soil Science*, vol. 13, (1964), 15-23.
- PHILIP (J.R.). — The theory of infiltration, 1, *Soil Science*, vol. 83, (1958), 345-357.
- PRILL (R.C.), JOHNSON (A.I.) et MORRIS (D.A.). — Specific yield-laboratory experiments showing the effect of time on column drainage. U.S.G.S., *Water Supply Paper* 1662-B (1965).
- REGINATO (R.J.) et VAN BAVEL (C.H.M.). — Soil Water Measurement with Gamma Attenuation. *Proc. Soil Sci. Soc. of Am.*, vol. 28 (1964), 721-724.
- REMSON (I.) et DRAKE (R.L.) et al. — Vertical drainage of an unsaturated soil. *Proc. ASCE, J. of the Hydraulics Division*, vol. 91, HY-1, (1965), 55-74.
- REMSON (I.) et al. — Numerical Analysis of Soil Moisture Systems. *Proc. ASCE*, vol. 93, IR-3, (1967), 153-166.
- VAN SCHILFEGAARDE (J.). — Theory of Land drainage, in *Drainage of Agricultural Land*, J.N. LUTHIN, (1957), 97-107.
- TAYLOR (G.S.). — Drainable porosity evaluation from outflow measurement and its use in drawdown equation. *Soil Sci.*, vol. 90, (1960), 338-343.
- TODD (D.K.). — *Ground Water Hydrology*. J. Wiley and Sons, Ed. (1957).
- TOPP (G.C.) et MILLER (E.E.). — Hysteretic Moisture Characteristics and hydraulic conductivities for glass bead media. *Soil Sci. Soc. of Am. Proc.*, vol. 30, (1966), 156-162.
- VACHAUD (G.). — Vérification de la loi de Darcy généralisée et détermination de la conductivité capillaire à partir d'une infiltration horizontale. *Intern. Symposium on water in the Unsaturated Zone*, Wageningen, June 19-25, (1966), Ib-2.
- VACHAUD (G.). — a). Etude de la valeur du coefficient d'emmagasinement des nappes à surface libre. *Symp. Intern. de l'Aménagement des nappes* (Haïfa). Public. n° 72 de l'A.I.H.S., (1967), 69-82.
- VACHAUD (G.). — b). Determination of the hydraulic conductivity of unsaturated soils from an analysis of transient flow data. *Water Resources Res.*, vol. 3, (1967), 697-705.
- VACHAUD (G.). — c). Transfert de l'eau dans les sols non saturés. 86^e Congrès AFAS Bordeaux (en cours de publication) (1967).
- WACK (B.). — Mesure de la densité et de l'humidité des sols par radioactivité. Rapport interne, Laboratoire de Mécanique des Fluides, Grenoble (1961).
- WATSON (K.K.). — An instantaneous profile method for determining the hydraulic conductivity of unsaturated porous materials. *Water Resources Res.*, vol. 2, n° 4 (1966), 709-715.
- WATSON (K.K.). — Experimental and numerical study of column drainage. *Proc. ASCE, J. of the Hydraulics Division*, vol. 93, HY-2, (1967), I-15.
- DE WIEST (R.J.M.). — *Geohydrology*. J. Wiley and Sons, Ed. (1965).
- YOUNGS (E.G.). — The drainage of liquids from porous materials. *J. of Geophys. Res.*, vol. 65, (1960), 4 025-4 030.
- YOUNGS (E.G.) et SMILES (D.E.). — The pumping of water from wells in unconfined aquifers. A note on the applicability of Theis' formula. *J. of Geophys. Res.*, vol. 68, (1963), 5 905-5 907.

(See English abstract on next page.)

Abstract

A study of transient flow conditions during the drainage of free-surface aquifers

by G. Vachaud *

The objective of the study was to examine the validity of some of the current assumptions and models used to describe the drainage of unconfined aquifers.

A γ -ray attenuation technique was used to follow rapid water content changes in the soil during drainage.

The first aim of drainage experiments was to evaluate the effect of time, depth of the water table and drawdown on the value of the storage coefficient. This coefficient has often been assumed to be constant and equal to the specific yield when considering problems of free-surface flow in ground water hydrodynamics.

Taking into account the flow of water in the unsaturated zone, it could be easily shown that the specific yield ϵ has to be considered only as an asymptotic limit of the value of the storage coefficient S .

During the drainage of a water table aquifer initially at a certain depth H , it is important to note that the maximum drainable volume of water V_∞ will be given, per unit surface of soil, by the area limited by the drainage branches of the capillary pressures curves corresponding to the initial and final positions of the water table.

From the analysis of how the drained volume of water varies for different drawdown values and a water table initially at a soil surface, it is possible to make a comparative study of the drainage duration. Considering as a criterion that the experiments ended for the time t_{99} , for which 99 % of the total drainable volume of water had flowed away, we obtained an empirical relation between t_{99} , drawdown Z and saturated permeability K_0 .

An attempt was then made to adapt capillary models to drainage problems. We considered three series of models:

- the gravity model, neglecting the unsaturated zone;
- the "single capillary" model, already developed by E. G. Youngs and considering the analogy between a unique family of capillary tubes whose diameter is defined by the capillary fringe of the soil, and the soil;
- the "multi-capillary" model, considering the analogy between a series of different families of capillary tubes and the soil, the capillary rise in each family being equal to the capillary rise for the corresponding values of pore range.

Comparing experimental values of the drained volume of water with theoretical ones, obtained by analysis of capillary models, it is shown that the single capillary model is very satisfactory at the beginning of a drainage experiment. However, when the position of the maximum water content θ_0 tends towards the capillary fringe corresponding to the equilibrium position of the drained water table, the multi-capillary model gives a good approximation of values of the drained volume of water.

We finally describe a method for determining the hydraulic conductivity function $k(\theta)$ from a transient flow analysis of the water content profiles. The generalized Darcy's law used to describe the flow of water in unsaturated soils is found to be valid. For different values of the water content θ , k is given by the ratio between unit discharge q and capillary potential gradient.

It is necessary to emphasize the importance of the unsaturated zone between the water table and the soil surface in unconfined aquifer problems.

* Attaché de Recherches au C.N.R.S., Laboratoire de Mécanique des Fluides, Grenoble.