

SURFACES LIBRES NON LINÉAIRES DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS

PAR C. BELLEVAUX *
ET D. FRUMAN **

I. — Introduction

La détermination de la forme des surfaces libres dans les canaux découverts pourvus de changements de hauteur du radier, présente certaines difficultés dues au caractère non linéaire de la condition d'équilibre de ces surfaces et à la méconnaissance de sa position. Ce problème a préoccupé depuis longtemps bon nombre de mathématiciens qui lui ont consacré d'importants travaux; on peut citer en exemple les travaux de Villat [1] et Richardson [2] qui donnent des solutions du problème inverse, c'est-à-dire la détermination de la forme du fond à partir d'une surface libre donnée. Une bibliographie importante sur le sujet est présentée par Wehausen et Laitone [3] et Stoker [4]. Cependant, la solution du problème sous forme directe n'a fait l'objet que des publications assez récentes [5]. Watters et Street [5] présentent une méthode de calcul analytique approchée qui semble s'appliquer à tous les nombres de Froude et à toutes les formes de seuil. Néanmoins, deux aspects importants du problème ne sont pas signalés dans ce travail; premièrement, il n'existe pas de solutions, compatibles avec les hypothèses d'écoulement uniforme à l'amont et à l'aval d'un canal avec une discontinuité donnée de son radier, pour des valeurs des nombres de Froude comprises entre deux limites, l'une inférieure, l'autre supérieure à l'unité. Deuxièmement, aucune application des solutions proposées n'est donnée pour les écoulements subcritiques.

Il est intéressant d'utiliser les possibilités de trai-

tement numérique des équations en différences pour l'étude de ce problème. On emploie une méthode similaire à celle de [6], permettant de travailler dans un plan où la position de toutes les frontières est connue. Deux schémas d'itération, adaptés aux écoulements supercritiques et subcritiques sont proposés. On montre pour un modèle de perturbation linéarisé la stabilité du schéma supercritique et l'instabilité du subcritique. Dans ce dernier cas on définit un schéma itératif convergent et stable.

II. — Position du problème

Considérons l'écoulement stationnaire et irrotationnel d'un fluide parfait et pesant dans un canal pourvu d'un seuil. Soient V_0 et h , la vitesse et le tirant d'eau à l'infini amont, Ox l'axe parallèle et Oy l'axe orthogonal à la vitesse V_0 (fig. 1); φ le potentiel des vitesses et ψ , la fonction de courant du mouvement. Les coordonnées cartésiennes x , y , considérées comme fonctions des variables φ et ψ sont harmoniques conjuguées :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \psi^2} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \psi^2} = 0 \quad (1')$$

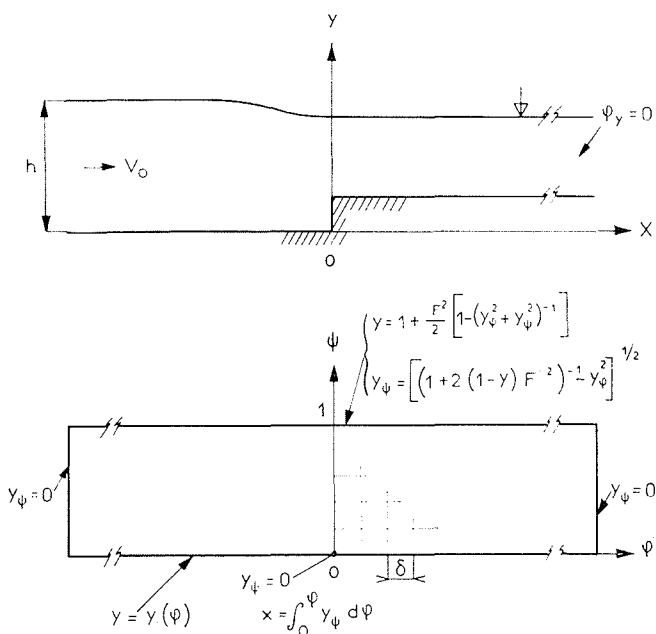
La vitesse en un point quelconque de l'écoulement est donnée par :

$$V^2 = \frac{1}{y_\varphi^2 + y_\psi^2} = \frac{1}{x_\varphi^2 + x_\psi^2} \quad (2)$$

avec : $y_\varphi = (\partial y / \partial \varphi)$, etc.

* Attaché de Recherche, Centre de Calcul Analogique, C.N.R.S.

** Chargé de Recherche, Centre de Calcul Analogique, C.N.R.S.



1/

La fonction y dans le plan φ, ψ est définie par les conditions aux limites suivantes :

1. Sur le fond, $\psi = 0$:

$$y = y(\varphi) \quad x = \int_0^\varphi y_\psi d\varphi \quad (3)$$

2. Sur la surface libre, $\psi = 1$:

$$\mathfrak{F}^2 (y_\varphi^2 + y_\psi^2)^{-1} + 2y = 2 + \mathfrak{F}^2 \quad (4)$$

où $\mathfrak{F} = V_0 (gh)^{-1/2}$, est le nombre de Froude de l'écoulement uniforme amont.

3. A l'infini amont et aval, l'écoulement est uniforme, soit :

$$y_\varphi = 0 \quad (5)$$

4. Dans tout le domaine, pour éviter des recouvrements lors du passage au plan physique :

$$y_\psi > 0$$

5. Dans le cas d'un écoulement sur un seuil de hauteur s , y_ψ tend à l'infini aval vers une limite a , qui satisfait l'équation :

$$2a^3 - (2 + \mathfrak{F}^2 - 2s)a^2 + \mathfrak{F}^2 = 0 \quad (6)$$

Seule la racine positive a_1 , telle que $a_1 \rightarrow 1$ quand $s \rightarrow 0$ doit être retenue, a_1 n'existe que si :

$$s \leq 1 + \frac{\mathfrak{F}^2}{2} - \frac{3}{2} \mathfrak{F}^{2/3}$$

Réciproquement, s étant donné, il existe deux nombres de Froude, l'un plus petit, l'autre plus grand que l'unité, tels que, pour \mathfrak{F} compris entre ces deux valeurs, l'équation (6) n'admette pas de racines réelles compatibles avec les conditions du problème. Dans cette zone d'autres hypothèses doivent être adoptées : soit un écoulement avec pertes d'énergie dues à l'établissement de chocs, soit un écoulement non uniforme à l'infini amont ou aval.

III. — Schémas itératifs et étude de leur stabilité

1. Pour réaliser la condition (4) il est nécessaire d'utiliser deux schémas itératifs différents, dans le cas de l'écoulement subcritique les approximations portent sur les ordonnées y de la surface libre :

$$y^n = 1 + \frac{\mathfrak{F}^2}{2} \left[1 - \left(y_\varphi^{(n-1)^2} + y_\psi^{(n-1)^2} \right) \right]^{-1} \quad (7)$$

et, pour un écoulement supercritique, sur les valeurs des dérivées y_ψ sur cette même surface :

$$y_\psi^n = \left[\left(1 + 2(1 - y^{n-1}) \mathfrak{F}^{-2} \right)^{-1} - y_\varphi^{(n-1)^2} \right]^{1/2} \quad (8)$$

où n indique le nombre d'itérations effectuées.

2. Pour étudier la stabilité des deux schémas proposés, on considèrera les linéarisations suivantes :

$$y^n = \psi + \varepsilon f^n \quad y^{n-1} = \psi + \varepsilon f^{n-1} \quad (9)$$

Sur le fond $\psi = 0$, on aura :

$$g^n = y^n - y^{n-1} = 0 \quad (10)$$

Sur la surface libre, dans le cas de (7) :

$$g^n = \mathfrak{F}^2 g_\psi^{n-1} \quad (11)$$

et pour l'équation (8) :

$$g_\psi^n = \mathfrak{F}^{-2} g^{n-1} \quad (12)$$

Les fonctions g^n , solutions du problème homogène linéarisé, s'écrivent :

$$g^n = \sum_{p=1}^N \alpha_p^n \cdot \text{sh } k_p \psi \cdot \exp ik_p \varphi \quad (13)$$

avec $k_p = \pi(p\delta)^{-1}$, δ le pas, et N le nombre de nœuds sur les lignes $\psi = \text{Cte}$.

En dérivant par rapport à ψ et en remplaçant en (11) et (12), il vient à la surface libre, $\psi = 1$:

$$\alpha_p^n = (\mathfrak{F}^2 k_p \text{cth } k_p) \alpha_p^{n-1} \quad (11')$$

et :

$$\alpha_p^n = (\mathfrak{F}^{-2} k_p^{-1} \text{tgh } k_p) \alpha_p^{n-1} \quad (12')$$

Dans le cas (12'), $\mathfrak{F} > 1$, le schéma est stable et convergent puisque $\alpha_p^n < \alpha_p^{n-1}$ pour toute valeur de p .

Pour l'équation (11') il existe une valeur χ_0 solution de :

$$\mathfrak{F}^2 \chi_0 = \text{tgh } \chi_0 \quad (14)$$

On en déduit que :

$$p < \pi(\delta\chi_0)^{-1} \rightarrow k_p \mathfrak{F}^2 \text{coth } k_p > 1 \rightarrow |\alpha_p^n| > |\alpha_p^{n-1}| \quad (14')$$

$$p > \pi(\delta\chi_0)^{-1} \rightarrow k_p \mathfrak{F}^2 \text{coth } k_p < 1 \rightarrow |\alpha_p^n| < |\alpha_p^{n-1}| \quad (14'')$$

Les oscillations de période inférieure à $2\pi/\chi_0$ peuvent être amplifiées au cours des itérations; le schéma est instable.

IV. — Schéma subcritique modifié

Le schéma (7) étant instable il peut être remplacé par :

$$y^n = y^{n-1} + \omega \int_{\varphi-q\delta}^{\varphi+q\delta} d\tau_q \int_{\varphi-(q-1)\delta}^{\varphi+(q-1)\delta} d\tau_{q-1} \dots$$

$$\dots d\tau_2 \int_{\tau_2-\delta}^{\tau_2+\delta} \left[(1 - y^{n-1}) + \frac{\mathfrak{F}^2}{2} \left[1 - \frac{(n-1)^2}{y_\varphi} \right] + y_\psi \frac{(n-1)^2}{y} \right] d\tau_1 \quad (15)$$

Cette expression reste compatible avec la condition aux limites (4) car, si $y^n \rightarrow y^{n-1}$, le terme contenu dans les intégrales doit tendre vers zéro.

Dans (15) q est un nombre et ω un paramètre convenablement choisi. Les amplitudes α_p^n et α_p^{n-1} sont alors liées par la relation :

$$\alpha_p^n = \alpha_p^{n-1} [1 - \omega 2^q k_p^{-q} (\mathfrak{F}^2 k_p \operatorname{cth} k_p - 1)] \sin k_p \delta \dots \sin q k_p \delta \quad (16)$$

Si la valeur q est choisie de la façon suivante :

$$q = \text{partie entière } \pi (\delta \chi_0)^{-1}$$

pour les indices $p \leq q$ une ou moins des quantités :

$$\sin k_p \delta, \quad \sin 2 k_p \delta, \quad \sin q k_p \delta$$

est nulle; par suite :

$$|\alpha_p^n| = |\alpha_p^{n-1}|$$

Pour les indices :

$$p > q \quad q k_p \delta < \pi$$

et par suite d'après (14'') :

$$|\alpha_p^n| < |\alpha_p^{n-1}|$$

pour ω suffisamment petit.

Par suite : $|\alpha_p^n| \leq |\alpha_p^{n-1}|$ pour tout p ; le schéma est stable.

V. — Calculs numériques

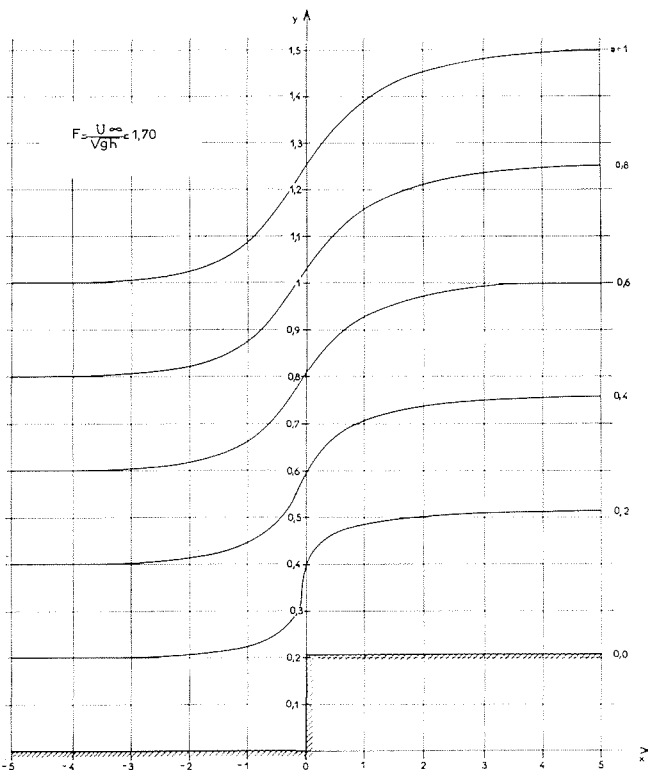
L'équation (1) et les conditions aux limites (3), (5), (8) et (15) sont écrites sous forme aux différences finies. Pour chaque itération l'équation de Laplace(1) est résolue par les méthodes classiques[7]. Dans le cas d'un changement brusque de hauteur du fond, la condition de verticalité et de non-recouvrement s'exprime d'après § II, 4 par $y_\psi = 0$ au nœud choisi. Il n'est pas aisé de donner *a priori* la hauteur du seuil, car ceci conduit au choix d'un maillage particulier. Par contre dans le cas d'un seuil de forme quelconque, il est loisible de procéder par approximations successives. A partir d'une forme donnée $y = y(x)$ du seuil, on impose une distribution arbitraire mais vraisemblable $y = y(\varphi)$. Au cours des itérations le calcul de :

$$x(\varphi) = \int_0^\varphi y_\psi d\varphi$$

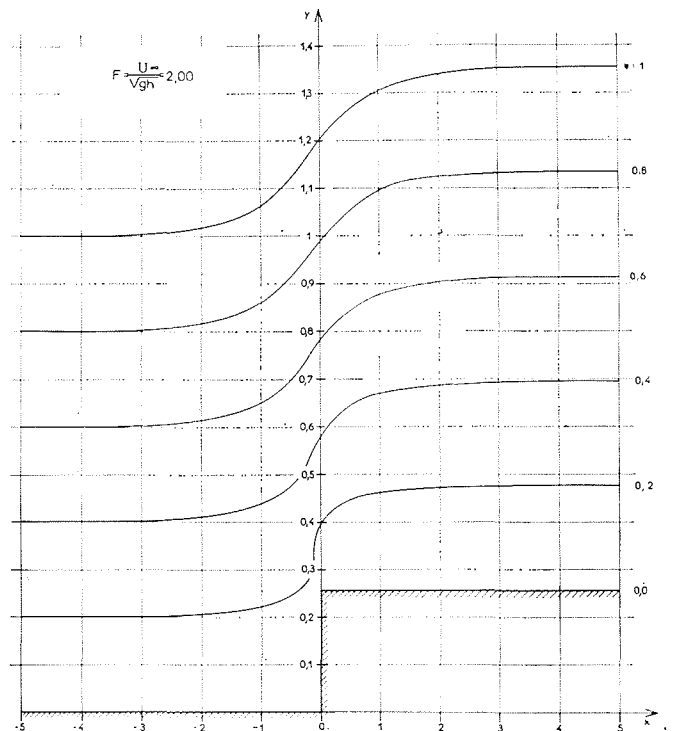
permet de déterminer :

$$y = y[x(\varphi)]$$

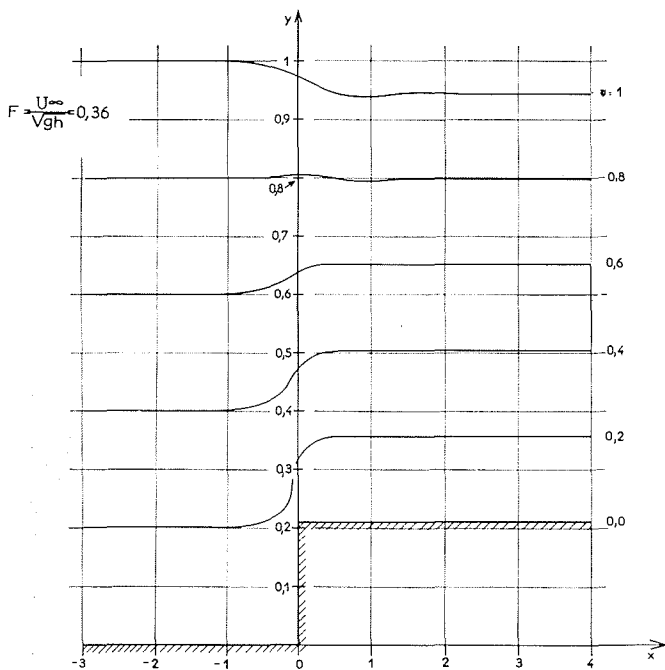
Les figures 2 et 3 montrent les résultats obtenus dans le cas de deux écoulements supercritiques et



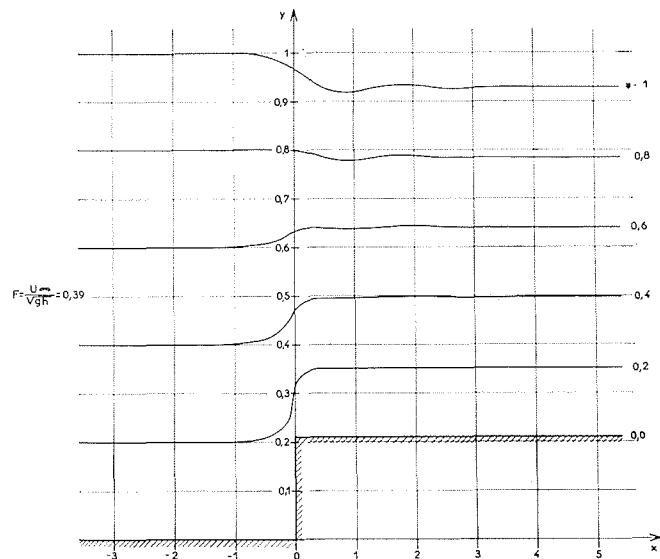
2/



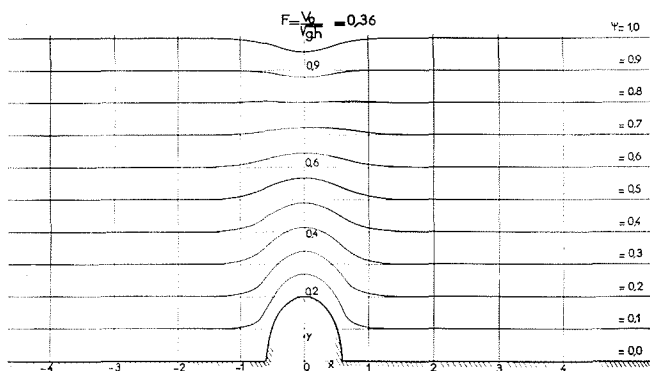
3/



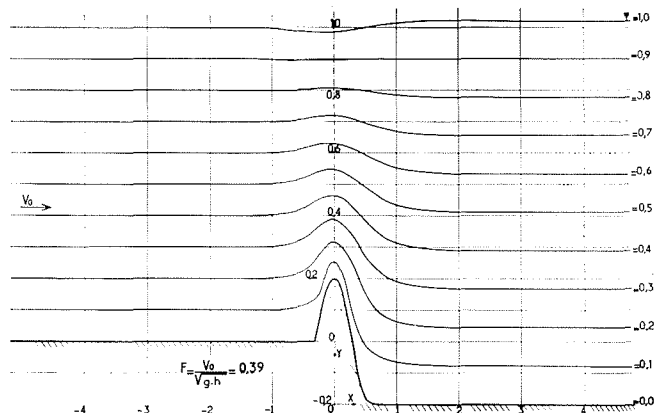
4/



5/



6/



7/

deux seuils semi-indéfinis. Pour ce même genre de fond, les figures 4 et 5 montrent l'allure des surfaces libres et des lignes de courant pour des nombres de Froude égaux à 0,36 et 0,39. Il est à remarquer que pour les seuils obtenus, les nombres de Froude limites suivant (6) sont de 0,471 et 1,56 respectivement. Dans ces quatre cas la précision obtenue pour la charge totale est de $5 \cdot 10^{-3}$ dans les cas subcritiques et de 10^{-4} dans les supercritiques. Le domaine est représenté par 360 nœuds et le pas δ est choisi égal à 0,2.

Des exemples de résolution des problèmes directs sont donnés sur les figures 6 et 7 pour des seuils de forme elliptique et sinusoïdale et pour des nombres de Froude égaux à 0,36 et 0,39 respectivement.

Bibliographie

- [1] VILLAT (H.). — *Ann. Ec. Norm.* (3) XXXII (juillet 1915), p. 23-214.
- [2] RICHARDSON (A. R.). — *Phil. Mag.*, S. 6, vol. 40, n° 235 (juillet 1920), p. 97-110.
- [3] WEHAUSEN (J. V.) und LAITONE (E. V.). — *Handbuch der Physik. Springer Verlag* (1960), p. 736-742.
- [4] STOKER (J. J.). — *Water-waves. Interscience Publisher* (1957).
- [5] WATTERS (G. Z.) et STREET (R. L.). — *Proc. ASCE, HY 4* (juillet 1964), p. 107-140.
- [6] MARKLAND (E.). — *Proc. Instn. Civ. Engrs.*, vol. 33 (mai 1965), p. 71-78.
- [7] FORSYTHE (G. E.) et WASOW (W. R.). — *Finite-difference methods for partial differential equations.*