CONSIDÉRATIONS THÉORIQUES SUR L'EMPLOI DE LA DIFFUSIVITÉ TURBULENTE

Communication
présentée au Comité technique
de la Société Hydrotechnique de France
le 21 novembre 1968

PAR A. FORTIER *

Dans un écoulement turbulent des particules fluides, provenant de différentes régions de l'espace occupé par le fluide en mouvement, se mélangent par suite des mouvements désordonnés et aléatoires de ces particules.

Lorsqu'il existe dans l'écoulement des gradients de grandeurs moyennes telles que : quantité de mouvement, énergie, enthalpie, ou masse d'un constituant, le mélange turbulent entraîne des transferts intenses entre régions voisines des grandeurs correspondantes.

Les densités de flux des grandeurs transférées sont, en régime turbulent et pour les mêmes gradients, bien supérieures aux densités de flux obtenues en régime laminaire. Dans le cas d'un gaz par exemple, le rapport des densités de flux en régime turbulent et en régime laminaire est égal à $u'L/cl$, u' désignant la valeur quadratique moyenne des fluctuations de vitesse, L une échelle de la turbulence que nous précisons, c la vitesse moyenne d'agitation des molécules et ce le libre parcours moyen. Comme u'/c est en général de l'ordre de $1/100$ et que L/l est de l'ordre de 10^5 à 10^6 le rapport des densités de flux est compris entre 1 000 et 10 000 dans la plupart des applications. Le rapport croît en première approximation comme le nombre de Reynolds de l'écoulement, car cl est proportionnel à la viscosité cinématique du gaz et aux grands nombres de Reynolds, $u'L$ est très sensiblement proportionnel à VD , V désignant la vitesse de référence et D la longueur de référence pour des écoulements définis pour des conditions aux frontières données.

Par analogie avec les transferts à l'échelle molé-

culaire, on désigne plus spécialement sous le nom de diffusion turbulente les transferts de masse, mais les équations générales et les définitions qu'on est amené à introduire pour l'étude de ces problèmes ayant la même forme indépendante de la grandeur transférée, il n'est pas nécessaire de préciser dès le début de l'étude la nature de cette grandeur.

Equation générale de transfert Définition des diffusivités turbulentes

Pour simplifier l'exposé nous raisonnerons sur un fluide considéré comme un milieu continu, bien qu'en partant de la théorie cinétique on aboutisse aux mêmes équations.

Soit une grandeur scalaire Γ , liée aux particules fluides en mouvement et rapportée à l'unité de volume. Γ peut être : la quantité de mouvement d'une particule en projection sur un axe de référence, son énergie cinétique ou son énergie totale, son enthalpie ou encore la masse de l'un des constituants du fluide.

Quelle que soit la grandeur Γ , on peut écrire une équation de conservation sous la forme :

$$\iiint_D \frac{\partial \Gamma}{\partial t} dw + \iint_{\Sigma} \Gamma \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma = \iint_{\Sigma} D_{\Gamma_m} \text{grad } \Gamma \cdot \vec{n} \cdot d\sigma + \iiint_D F_{\Gamma} dw \quad (1)$$

$\mathcal{D}$ désigne un volume plein de fluide limité par une surface fermée fixe Σ , dw l'élément de volume de $\mathcal{D}$,

* Professeur à la Faculté des Sciences de Paris.

$d\sigma$ l'élément de surface de Σ , $\vec{V}$ le vecteur vitesse du fluide au sens d'Euler, $\vec{n}$ un vecteur unitaire porté par la normale à $d\sigma$ orientée de l'intérieur vers l'extérieur de $\mathcal{O}$, D_{Γ_m} la diffusivité moléculaire de la grandeur Γ dans le fluide et F_Γ la production de la grandeur Γ par unité de volume et par unité de temps.

L'équation (1) peut être remplacée par la forme locale équivalente :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma U_i}{\partial x_i} = \frac{\partial D_{\Gamma_m} (\partial \Gamma / \partial x_i)}{\partial x_i} + F_\Gamma \quad (2)$$

les axes de références sont des axes orthonormés ox_i , U_i désigne les projections du vecteur vitesse $\vec{V}$ et l'écriture est condensée par l'emploi de la convention d'Einstein.

Lorsque l'écoulement est turbulent, les grandeurs qui figurent dans les équations (1) et (2) sont des fonctions aléatoires du temps et des coordonnées. Mais pour un problème donné, défini par des conditions aux frontières et des conditions initiales déterminées, les moyennes de ces grandeurs ainsi que tous les moments des différents ordres sont parfaitement définis. Ces moyennes doivent satisfaire aux conditions aux frontières et aux conditions initiales qui déterminent la solution du problème particulier étudié et aussi aux équations que l'on obtient en prenant les moyennes des deux membres des équations (1) et (2).

Les moyennes dont il s'agit et que nous représenterons par des lettres soulignées sont, soit des moyennes statistiques si la même expérience est répétée un très grand nombre de fois, soit des moyennes dans le temps si l'écoulement turbulent est stationnaire, soit des moyennes dans l'espace lorsque la turbulence est homogène.

Appelons « fluctuation » d'une des grandeurs qui figurent dans les équations, l'écart entre une valeur observée et la moyenne correspondante, ce qui revient à poser, en désignant les fluctuations par des minuscules :

$$\Gamma = \bar{\Gamma} + \gamma \quad U_i = \bar{U}_i + u_i \quad \vec{V} = \vec{\bar{V}} + \vec{v}$$

Ces notations étant définies, prenons les moyennes des 2 membres des équations (1) et (2); nous obtenons :

$$\begin{aligned} \iiint_D \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial t} dw + \iint_\Sigma \bar{\Gamma} \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma \\ = \iint_\Sigma (D_{\Gamma_m} \text{grad} \cdot \bar{\Gamma} - \overline{\gamma v}) \cdot \vec{n} d\sigma \\ + \iiint_D \bar{F}_\Gamma dw \end{aligned} \quad (1')$$

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\Gamma} \cdot \bar{U}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial [D_{\Gamma_m} (\partial \bar{\Gamma} / \partial x_i) - \overline{\gamma u_i}]}{\partial x_i} + \bar{F}_\Gamma \quad (2')$$

Les équations (1') et (2') sont identiques aux équations (1) et (2) à condition d'ajouter au flux du vecteur $D_{\Gamma_m} \text{grad} \bar{\Gamma}$ le flux du vecteur $-\overline{\gamma v}$. En d'autres termes, si nous raisonnons sur l'écoulement moyen, nous pouvons dire que le transfert de la grandeur $\bar{\Gamma}$ à travers un élément de surface $d\sigma$ dû à l'agitation moléculaire et caractérisé par

une diffusivité moléculaire D_{Γ_m} est augmenté d'un transfert turbulent égal au flux du vecteur $-\overline{\gamma v}$.

Pour poursuivre l'analogie on serait tenté d'écrire :

$$-\overline{\gamma v} = D_{\Gamma \text{ turb.}} \text{grad} \bar{\Gamma}$$

c'est-à-dire :

$$-\overline{\gamma u_i} = D_{\Gamma \text{ turb.}} \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial x_i}$$

mais il n'y a aucune raison pour que le vecteur $\overline{\gamma v}$ soit proportionnel au vecteur $\text{grad} \bar{\Gamma}$ et si on veut introduire une relation linéaire générale entre ces deux vecteurs il faut poser :

$$-\overline{\gamma u_i} = D_{\Gamma \text{ turb. } ij} \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial x_j}$$

$D_{\Gamma \text{ turb. } ij}$ est un tenseur du second ordre qu'on appelle la diffusivité turbulente de la grandeur Γ .

Lorsque la diffusivité turbulente ainsi définie ne dépend que de la structure de l'écoulement turbulent et des caractéristiques physiques de la grandeur Γ , mais est indépendante des conditions aux frontières et des conditions initiales particulières imposées à Γ , il est possible de traiter complètement par le calcul un problème de transfert turbulent. Il suffit pour cela de disposer de données statistiques suffisantes sur l'écoulement. La diffusivité turbulente s'introduit alors sous forme d'une fonction connue des coordonnées et du temps et le calcul est analogue, quoique beaucoup plus complexe, aux calculs qu'on effectue couramment en régime laminaire.

Mais lorsque la diffusivité turbulente fait intervenir les conditions aux frontières imposées à la grandeur Γ , son introduction dans les calculs n'a pas d'intérêt pratique car elle ne fait que remplacer l'inconnue $-\overline{\gamma u_i}$ par l'inconnue $D_{\Gamma \text{ turb. } ij}$. On constate même, expérimentalement, que la densité de flux peut fort bien s'annuler alors que le gradient de la valeur moyenne de Γ n'est pas nul et réciproquement. Cette constatation est incompatible avec la définition d'une diffusivité turbulente qui ne dépendrait que de la structure de l'écoulement et de la nature de Γ .

Pour les applications il est donc indispensable de pouvoir prévoir les cas où l'emploi de la diffusivité turbulente est parfaitement justifié. Comme il n'est pas possible à l'heure actuelle de développer une théorie générale de la diffusion turbulente, il faut raisonner sur des problèmes simples permettant de dégager par une analyse statistique les caractères essentiels de ces phénomènes.

Diffusion de particules marquées dans un écoulement turbulent homogène et stationnaire

Je rappellerai d'abord le calcul classique dû à Taylor et qui est à l'origine de tous les développements ultérieurs en Mécanique statistique de la turbulence. Il s'agit de déterminer la distribution des

particules marquées qui se trouvent toutes à un instant donné entre deux plans parallèles infiniment voisins.

La turbulence étant par hypothèse homogène et stationnaire, la vitesse moyenne est indépendante des coordonnées et du temps et par conséquent le mouvement moyen est un mouvement de translation uniforme.

Par rapport à des axes orthonormés $ox_1 x_2 x_3$ animés d'un mouvement de translation uniforme de vitesse égale à la vitesse moyenne, nous supposons qu'à l'instant origine les particules marquées sont uniformément réparties dans le plan $ox_1 x_3$ et nous nous proposons de déterminer la distribution au cours du temps des ordonnées y_2 (comptées parallèlement à ox_2) de ces particules qu'on suit dans leurs mouvements. Pour distinguer les variables de Lagrange des variables d'Euler, nous désignerons par v_2 la composante suivant ox_2 de la vitesse d'une particule lorsqu'on suit cette particule dans son mouvement.

Par définition de v_2 nous avons :

$$\frac{dy_2}{dt} = v_2(t)$$

$$y_2 = \int_0^t v_2(\tau) d\tau$$

et par suite :

$$y_2 \frac{dy_2}{dt} = v_2(t) \int_0^t v_2(\tau) d\tau$$

$$\frac{dy_2^2/2}{dt} = \int_0^t v_2(t) v_2(\tau) d\tau$$

En appliquant cette dernière relation à un très grand nombre de particules qui se trouvaient à l'instant 0 dans le plan $ox_1 x_3$, en faisant la somme membre à membre de toutes ces relations et en divisant par le nombre des particules nous obtenons :

$$\frac{dy_2^2/2}{dt} = \int_0^t \overline{v_2(t) v_2(\tau)} d\tau = \overline{v_2^2} \int_0^t R_L(\tau) d\tau \quad (3)$$

en désignant par $R_L(\tau)$ le coefficient de corrélation entre la composante $v_2(t_0)$ suivant ox_2 de la vitesse d'une particule à l'instant t_0 et la composante $v_2(t_0 + \tau)$ à l'instant $t_0 + \tau$ de la vitesse de cette même particule. Comme la turbulence est homogène, $R_L(\tau)$ ne dépend pas de t_0 . Intégrons l'équation (3) entre l'instant 0 et l'instant t ; nous obtenons :

$$\frac{\overline{y_2^2}}{2} = \overline{v_2^2} \int_0^t dt' \int_0^{t'} R_L(\tau) d\tau$$

$$= \overline{v_2^2} \int_0^t (t - \tau) R_L(\tau) d\tau$$

Cette expression de la variance de y_2 est très générale car elle résulte simplement de l'application de définitions. Mais pour poursuivre le calcul il faut introduire des hypothèses sur la forme de la fonction $R_L(\tau)$. Nous admettrons comme faisant partie de la définition de l'écoulement turbulent que $R_L(\tau)$ tend vers zéro lorsque τ tend vers l'infini et que les intégrales :

$$\int_0^\infty R_L(\tau) d\tau \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \tau R_L(\tau) d\tau$$

sont convergentes.

Pour les temps de diffusion courts, c'est-à-dire tels que $R_L(\tau)$ reste très voisin de $R_L(0) = 1$, nous avons :

$$\overline{y_2^2} = \overline{v_2^2} t^2 \quad \sqrt{\overline{y_2^2}} = \sqrt{\overline{v_2^2}} t$$

et pour les temps de diffusion longs, c'est-à-dire tels que les deux intégrales :

$$\int_0^t R_L(\tau) d\tau \quad \text{et} \quad \int_0^t \tau R_L(\tau) d\tau$$

aient pratiquement atteint leurs valeurs limites T_L et $T_L t_c$, nous avons :

$$\frac{\overline{y_2^2}}{2} = \overline{v_2^2} T_L (t - t_c)$$

Or si on étudie la distribution des particules marquées à partir du concept de diffusivité turbulente D_{turb} , indépendante ici des coordonnées et du temps puisque la turbulence est homogène et stationnaire, on est conduit à chercher une solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D_{\text{turb}} \frac{\partial^2 n}{\partial x_2^2}$$

n désignant le nombre de particules marquées par unité de volume au temps t et à la distance x_2 du plan origine. A l'instant 0 les particules marquées étant toutes concentrées entre deux plans infiniment voisins situés à $\pm \varepsilon$ du plan $ox_1 x_3$ à raison de n_0 particules par unité de volume, la solution du problème est bien connue et s'écrit :

$$n = \frac{\varepsilon n_0}{\sqrt{\pi D_{\text{turb}} t}} e^{-(x_2^2/4D_{\text{turb}} t)}$$

En désignant par y_2 l'ordonnée d'une particule marquée à l'instant t nous avons donc :

$$\overline{y_2^2} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x_2^2 n dx_2}{\int_{-\infty}^{+\infty} n dx_2} = 2 D_{\text{turb}} t$$

Ce résultat n'est identique au résultat du calcul statistique de Taylor que pour les temps de diffusion très longs pour lesquels nous avons par suite :

$$D_{\text{turb}} = \overline{v_2^2} T_L = \sqrt{\overline{v_2^2}} \sqrt{\overline{v_2^2}} T_L = \sqrt{\overline{v_2^2}} \Lambda_L$$

T_L est l'échelle des temps et Λ_L l'échelle des longueurs de la turbulence en variables de Lagrange.

Résultats expérimentaux

Avant de poursuivre l'examen de l'aspect théorique de la diffusion turbulente, je rappellerai que l'expérience vérifie pleinement les prévisions de Taylor. La fonction de corrélation $R_L(\tau)$ est correctement représentée par une exponentielle $e^{-(\tau/T_L)}$ pour les valeurs de $R_L(\tau)$ inférieures à 0,9 c'est-à-dire pour le temps $\tau > 0,1 T_L$, de telle sorte que les temps T_L et t_c sont pratiquement égaux et que la variance de y_2 est une fonction linéaire du temps de

diffusion t avec une précision supérieure à 1 % pour $t \geq 4,6 T_L$.

Calcul de la diffusivité turbulente dans le cas d'un gradient constant dans une région étendue de l'espace

En conservant l'hypothèse d'un écoulement turbulent homogène et stationnaire, nous allons supposer que la grandeur Γ par unité de volume attachée aux particules fluides est une fonction des coordonnées et que Γ se conserve lorsqu'on suit le fluide dans son mouvement. Pour simplifier nous admettrons d'abord que le gradient de $\bar{\Gamma}$ est parallèle à l'axe ox_2 et nous allons calculer la diffusivité turbulente en appliquant sa définition.

Considérons un élément de surface $d\sigma$ du plan $ox_1 x_3$ centré sur l'origine. Une particule fluide qui traverse $d\sigma$ à l'instant t_1 se trouvait à l'instant antérieur t_0 à une distance y_2 du plan $ox_1 x_3$ telle que :

$$y_2 = - \int_{t_0}^{t_1} v_2(\tau) d\tau$$

en multipliant les deux membres de cette équation par $v_2(t_1)$ nous obtenons :

$$y_2 v_2(t_1) = - \int_{t_0}^{t_1} v_2(t_1) v_2(\tau) d\tau$$

Fixons l'intervalle de temps $t_0 - t_1$ et appliquons la relation précédente à un très grand nombre de particules qui sont passées à travers $d\sigma$; en ajoutant ces relations membre à membre et en divisant par le nombre des particules nous obtenons :

$$\overline{y_2 v_2(t_1)} = - \int_{t_0}^{t_1} \overline{v_2(t_1) v_2(\tau)} d\tau$$

La turbulence étant stationnaire et homogène, les moyennes ne dépendent pas séparément des instants t_0 et t_1 mais seulement de l'intervalle de temps $t_1 - t_0 = t$ et nous pouvons écrire :

$$\overline{y_2(t_1 - t) v_2(t_1)} = - \overline{v_2^2} \int_0^t R_L(\tau) d\tau$$

$R_L(\tau)$ étant le coefficient de corrélation introduit dans le calcul de Taylor.

L'expression du moment $\overline{y_2(t_1 - t) v_2(t_1)}$ ainsi obtenue permet de calculer le coefficient de corrélation $R_{L1}(t)$ entre l'ordonnée y_2 d'une particule à l'instant $t_1 - t$ qui traverse le plan $ox_1 x_3$ à l'instant t_1 et la composante v_2 suivant ox_2 de sa vitesse à l'instant t_1 . En introduisant la valeur quadratique moyenne de y_2 trouvée par le calcul de Taylor pour un temps de diffusion t nous obtenons :

$$R_{L1}(t) = \frac{\overline{y_2(t_1 - t) v_2(t_1)}}{\sqrt{\overline{y_2^2}} \sqrt{\overline{v_2^2}}} = - \frac{\int_0^t R_L(\tau) d\tau}{\sqrt{2} \int_0^t (t - \tau) R_L(\tau) d\tau}$$

Pour les temps t courts devant T_L , $R_{L1}(t) = -1$ et pour les temps t grands devant T_L :

$$R_{L1}(t) = - \sqrt{\frac{T_L}{t - T_L}}$$

Ainsi le coefficient de corrélation entre les vitesses de la même particule à deux instants successifs séparés par l'intervalle $4,6 T_L$ est égal à $1/100$ tandis que le coefficient de corrélation entre l'ordonnée y_2 d'une même particule à l'instant $t_1 - 4,6 T_L$ et la composante v_2 de sa vitesse à l'instant t_1 est égal à $-0,53$.

Dans ces conditions considérons la valeur de Γ affectée à une particule qui traverse $d\sigma$ à l'instant t_1 et que nous désignons par $\Gamma(t_1)$. Si Γ se conserve au moins pendant un temps égal à $4,6 T_L$ nous pouvons écrire :

$$\Gamma(t_1) = \bar{\Gamma}_0 + \frac{d\bar{\Gamma}}{dx_2} y_2(t_1 - 4,6 T_L) + \gamma(t_1 - 4,6 T_L)$$

γ désigne l'écart entre la valeur de Γ pour la particule considérée à l'instant $t_1 - 4,6 T_L$ et la valeur moyenne de Γ au point où se trouvait la particule à l'instant $t_1 - 4,6 T_L$. En multipliant les deux membres de la relation précédente par $v_2(t_1)$ et en prenant les moyennes nous obtenons :

$$\overline{v_2(t_1) \Gamma(t_1)} = \frac{d\bar{\Gamma}}{dx_2} \overline{y_2(t_1 - 4,6 T_L) v_2(t_1)} + \overline{\gamma(t_1 - 4,6 T_L) v_2(t_1)}$$

Or nous avons vu que le coefficient de corrélation entre la vitesse d'une particule à l'instant t_1 et la vitesse de cette même particule à l'instant :

$$t_1 - 4,6 T_L$$

est pratiquement nul; nous admettrons donc que le moment :

$$\overline{\gamma(t_1 - 4,6 T_L) v_2(t_1)}$$

est lui aussi pratiquement nul et par conséquent que :

$$\overline{v_2(t_1) \gamma(t_1)} = \overline{u_2 \gamma} = \overline{y_2(t_1 - 4,6 T_L) v_2(t_1)} \frac{d\bar{\Gamma}}{dx_2}$$

la diffusivité turbulente de la grandeur Γ est donc :

$$D_{\Gamma \text{ turb.}} = - \overline{y_2(t_1 - 4,6 T_L) v_2(t_1)} = \overline{v^2} T_L$$

Nous retrouvons l'expression de la diffusivité turbulente des particules marquées, mais pour que le calcul soit valable, il faut que $\bar{\Gamma}$ soit une fonction linéaire de x_2 dans une région étendue de l'espace dont nous allons évaluer les dimensions.

Un très grand nombre N de particules qui traversent $d\sigma$ à des instants t_1 forment aux instants $t_1 - 4,6 T_L$ un nuage de points répartis autour du plan $ox_1 x_3$. Le nombre de ces points qui se trouvent entre les ordonnées y_2 et $y_2 + dy_2$ est $NP(y_2) dy_2$, $P(y_2)$ désignant la loi de distribution des probabilités de y_2 .

Or l'expérience montre que cette loi est peu différente de la loi normale lorsque la turbulence est homogène. S'il en est ainsi, on sait que la densité

de probabilité $P(y_2)$ est pratiquement nulle lorsque $|y_2| > 3\sqrt{y_2^2}$. Dans le calcul du moment :

$$\overline{y_2(t_1 - 4,6 T_L) v_2(t_1)}$$

nous n'avons donc pratiquement pas à faire intervenir de points en dehors d'une bande limitée par deux plans parallèles à $ox_1 x_3$ dont les ordonnées sont $\pm 3\sqrt{y_2^2}$, la valeur quadratique moyenne de y_2 correspondant ici à l'intervalle de temps $4,6 T_L$. Pour que la valeur trouvée de la diffusivité turbulente soit utilisable, il suffit donc que $\bar{\Gamma}$ soit une fonction sensiblement linéaire de x_2 dans un intervalle de variations de x_2 d'amplitude totale :

$$6\sqrt{y_2^2} = 6 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3,6} \sqrt{v_2^2} T_L = 16 \Lambda_L$$

Nous pouvons généraliser le calcul précédent au cas où le vecteur $\text{grad } \bar{\Gamma}$ n'est pas parallèle à un axe de coordonnées. Une particule qui traverse $d\sigma$ à l'instant t_1 se trouvait à l'instant $t_1 - 4,6 T_L$ en un point de coordonnées y_1, y_2, y_3 et si Γ se conserve nous avons :

$$\Gamma(t_1) = \bar{\Gamma}_0 + \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial x_2} y_2 + \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial x_3} y_3 + \gamma$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} \overline{v_2(t_1) \Gamma(t_1)} &= \overline{u_2 \bar{\Gamma}} = \overline{v_2(t_1) y_1(t_1 - 4,6 T_L)} \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial x_1} \\ &+ \overline{v_2(t_1) y_2(t_1 - 4,6 T_L)} \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial x_2} \\ &+ \overline{v_2(t_1) y_3(t_1 - 4,6 T_L)} \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial x_3} \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\overline{u_2 \bar{\Gamma}} = \overline{v_i(t_1) y_j(t_1 - 4,6 T_L)} \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial x_j}$$

ou :

$$D_{\Gamma \text{ turb. } ij} = - \overline{v_i(t_1) y_j(t_1 - 4,6 T_L)}$$

En introduisant le coefficient de corrélation :

$$R_{Lij}(\tau) = \frac{v_i(t_0 + \tau) v_j(t_0)}{\sqrt{v_i^2} \sqrt{v_j^2}}$$

et le temps de corrélation :

$$T_{Lij} = \int_0^\infty R_{Lij}(\tau) d\tau$$

nous obtenons finalement :

$$D_{\Gamma \text{ turb. } ij} = \sqrt{v_i^2} \sqrt{v_j^2} T_{Lij}$$

L'intervalle de temps $4,6 T_L$ que j'ai fait intervenir dans le calcul est en fait un temps long devant le plus grand des temps T_{Lij} .

Enfin dans le cas particulier où la turbulence est non seulement homogène et stationnaire mais aussi isotrope, le tenseur $D_{\Gamma \text{ turb. } ij}$ se réduit à un scalaire.

En généralisant le calcul que nous avons fait dans le cas où $\text{grad } \bar{\Gamma}$ est parallèle à ox_2 , nous voyons que l'introduction de la diffusivité turbulente est légitime lorsque $\bar{\Gamma}$ est une fonction linéaire des coordonnées dans un espace dont les dimensions suivant

les trois axes de coordonnées sont grandes devant les longueurs $\Lambda_i = \overline{v_i^2} T_{Lij}$. Lorsque les lois de probabilités sont normales, $\bar{\Gamma}$ doit être une fonction linéaire de coordonnées dans un parallélépipède centré sur l'origine dont les faces sont parallèles aux plans de coordonnées et dont les demi-longueurs d'arêtes sont égales à $8 \Lambda_i$.

Influence de la diffusion moléculaire

Pour aboutir à l'expression de la diffusivité turbulente de la grandeur Γ , nous avons supposé que la valeur de Γ attachée à une particule se conserve lorsqu'on suit cette particule dans son mouvement. En fait d'après l'équation (2) cette valeur de Γ ne se conserve pas et en suivant une particule entre un instant t_0 et un instant t_1 nous avons :

$$\Gamma(t_1) = \Gamma(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial D_{\Gamma m}}{\partial x_i} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} + F_{\Gamma} \right) d\tau$$

Reprenons dans ces conditions le calcul de la diffusivité turbulente en supposant que la diffusivité moléculaire de Γ est une constante, que le terme de production est nul et en nous limitant au cas où $\text{grad } \bar{\Gamma}$ est parallèle à ox_2 . Il faut ajouter à l'expression de la diffusivité turbulente trouvée antérieurement un terme tenant compte des variations de Γ entre l'instant $t_1 - 4,6 T_L$ et t_1 et nous obtenons :

$$\begin{aligned} \overline{u_2 \bar{\Gamma}} &= \overline{y_2(t_1 - 4,6 T_L) v_2(t_1)} \frac{d\bar{\Gamma}}{dx_2} \\ &+ D_{\Gamma m} \int_{t_1 - 4,6 T_L}^{t_1} \frac{\partial^2 \bar{\Gamma}}{\partial x_i \partial x_i}(\tau) v_2(t_1) d\tau \end{aligned}$$

le Laplacien :

$$\Delta \Gamma = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_i}$$

est pris à un instant τ antérieur à t_1 au point où se trouvait la particule à cet instant. Introduisons le moment :

$$\overline{v_2(t_1) \Delta \Gamma(t_1 - \tau)} = M(\tau)$$

et posons :

$$\int_0^\infty M(\tau) d\tau = \alpha \frac{d\bar{\Gamma}}{dx_2}$$

nous obtenons finalement :

$$D_{\Gamma \text{ turb. }} = \overline{v^2} T_L - \alpha D_{\Gamma m}$$

Lorsque la grandeur Γ est la température :

$$D_{\Gamma m} = \frac{\lambda}{\rho C_p}$$

λ désignant la conductibilité thermique, ρ la masse volumique et C_p la chaleur massique à pression constante du fluide. De nombreuses expériences effectuées sur la diffusion de la chaleur à l'aval d'un fil chauffé montrent que la diffusivité turbulente est bien de la forme que nous avons trouvée, α étant une constante probablement positive lorsque la turbulence est homogène. Lorsqu'on effectue des

expériences avec des conditions aux frontières bien définies, $\bar{v}^2 T_L$ est approximativement proportionnel au produit de la vitesse de référence par la longueur de référence et par conséquent le rapport du terme correctif αD_{T_m} à la diffusivité turbulente des particules marquées est inversement proportionnel au nombre de Péclet.

Cas de la turbulence stationnaire mais non homogène

C'est le cas très important de tous les écoulements turbulents dans les conduits ou dans la couche limite. La vitesse moyenne ainsi que tous les moments sont des fonctions des coordonnées et il n'est malheureusement pas possible actuellement de développer des calculs analogues au calcul de Taylor. Qualitativement la nature des phénomènes ne change pourtant pas et localement la turbulence peut être caractérisée par des longueurs de corrélation Λ_i définies en variables de Lagrange et lorsque le champ des valeurs moyennes de Γ est tel que le vecteur $\vec{\text{grad}} \bar{\Gamma}$ peut être considéré comme constant dans un espace de grande dimension par rapport à Λ_i , l'introduction d'une diffusivité turbulente, qui est un tenseur fonction des coordonnées, est légitime. Aux grands nombres de Reynolds et pour des nombres de Prandtl ou de Schmidt assez grands, cette diffusivité turbulente est pratiquement égale à la diffusivité turbulente des particules marquées dans le cas de la diffusivité turbulente de la chaleur ou de la masse. Mais lorsque la grandeur Γ est la quantité de mouvement en projection sur un axe de référence, on doit observer des différences, car l'équation de conservation de la quantité de mouvement contient un terme de production qui n'existe pas pour la plupart des applications dans les équations de conservation de la masse ou de la chaleur.

Conclusion

Pour conclure je donnerai quelques valeurs numériques de la longueur de corrélation en variables de Lagrange, valeurs obtenues par Jullien au cours d'expériences sur la diffusion de la chaleur parallèlement aux isovitesse dans l'écoulement turbulent établi entre deux plans parallèles situés à la distance $2e$ l'un de l'autre.

Par rapport aux axes de références : αx_1 parallèle à l'écoulement moyen, αx_2 perpendiculaire aux deux plans, αx_3 parallèle aux isovitesse, l'origine o étant située dans un des deux plans, la longueur de

corrélation Λ_3 rapportée à e dépend de x_2/e et du nombre de Reynolds. Dans l'intervalle des nombres de Reynolds, rapportés au diamètre hydraulique, 80 000-700 000 l'expérience montre que Λ_3/e dépend très peu des nombres de Reynolds et les valeurs trouvées sont les suivantes : pour $x_2/e = 0,2$, $\Lambda_3/e = 0,1$ et pour $x_2/e = 1$, $\Lambda_3/e = 0,2$. Ces valeurs sont du même ordre de grandeur que l'échelle des gros tourbillons déterminée à partir des mesures de corrélation en variables d'Euler. Si donc nous appliquons les résultats obtenus pour la turbulence homogène, en supposant que les échelles Λ_i sont du même ordre de grandeur, nous voyons que pour $x_2/e = 0,2$, le concept de la diffusivité turbulente est utilisable lorsque $\vec{\text{grad}} \bar{\Gamma}$ est constant dans un volume de dimensions $0,1 \times 8 = 0,80 e$. Cette condition n'est manifestement pas réalisée près d'une paroi chauffée à densité de flux ou à température constante.

Lorsque $\vec{\text{grad}} \bar{\Gamma}$ n'est pas constant dans une région de l'espace suffisamment étendue autour d'un élément de surface donnée $d\sigma$, la valeur de la densité de flux $-\gamma \bar{u}_i$ fait intervenir tout le champ des valeurs moyennes de Γ autour de $d\sigma$. Si nous reprenons le cas simple où $\bar{\Gamma}$ n'est fonction que de x_2 , il est facile de trouver la valeur de $\gamma \bar{u}_2$ en introduisant la fonction de distribution des densités de probabilités liées de $y_2 (t_1 - \tau)$ et $v_2 (t_1)$, τ étant un intervalle de temps donné.

Appelons $P(y_2 v_2)$ cette fonction de distribution nous obtenons :

$$-\overline{\Gamma(t_1) v_2(t_1)} = \gamma \bar{u}_2 = \iint_{-\infty}^{+\infty} \bar{\Gamma}(y_2) v_2 P(y_2 v_2) dy_2 dv_2$$

L'intervalle de temps τ doit être choisi suffisamment long pour que le coefficient de corrélation entre $v_2(t_1)$ et $v_2(t_1 - \tau)$ soit pratiquement nul et on suppose que la valeur de Γ se conserve pendant le temps τ .

La relation entre la densité de flux et le champ des valeurs moyennes est donc beaucoup plus complexe qu'une simple relation linéaire entre deux vecteurs. Pour traiter correctement par le calcul des problèmes de diffusivité turbulente, il faudrait connaître les fonctions de distribution des densités de probabilités liées des coordonnées d'une particule à l'instant $t_1 - \tau$ et de sa vitesse à l'instant t_1 . Actuellement, on ne voit pas comment déterminer expérimentalement ces fonctions de distribution en dehors du cas simple de la turbulence homogène et stationnaire. Pour résoudre les problèmes pratiques il faut donc continuer à utiliser l'analogie de Reynolds, sans oublier toutefois que cette analogie et des analogies semblables supposent que non seulement les équations de transfert sont de même forme pour deux grandeurs Γ différentes, mais aussi que les conditions aux frontières imposées à ces deux grandeurs sont aussi de même forme.

Discussion

Président : M. M. BANAL

M. le Président remercie vivement M. FORTIER de son exposé magistral sur des questions d'un grand intérêt et ouvre la discussion.

M. CASEAU remarque que la formule donnée finalement pour le terme γu_2 suppose qu'il n'y a pas corrélation entre la vitesse à l'instant t et la fluctuation γ à l'instant $(t - T)$.

M. FORTIER confirme que l'on écrit que la valeur de γ au lieu où se trouvait la particule à un instant déterminé est égale à la valeur moyenne locale plus une fluctuation et que la moyenne du produit de cette fluctuation par la vitesse est égal à zéro. Il en résulte effectivement une sorte de déconnection entre la fluctuation à l'instant $(t_1 - t)$ et la vitesse à l'instant t . Sur la demande de M. CASEAU, M. FORTIER précise que cela correspond à des distances longitudinales de l'ordre de trois ou quatre diamètres.

Finalement, observe M. CASEAU, on peut, à partir de la dernière équation, concevoir un modèle où, au lieu d'utiliser strictement une équation de diffusion, on utiliserait, *grosso modo*, une chaîne de Markov (en passant d'un plan à un plan successif ou à plusieurs autres plans), ou bien une équation intégrale. Bien que l'on fasse intervenir toute la section, il faut que le phénomène étudié varie lentement par rapport à la longueur qu'on vient d'évaluer. Autrement dit, il faut qu'on puisse découper le phénomène successivement en instants séparés. C'est là un point important; lorsqu'on étudie l'entrée d'un tuyau ou des problèmes d'échangeur, on a des concentrations et des températures qui varient comme $e^{-\lambda x}$ et λ est borné par la première valeur propre, ce qui correspond à dix diamètres. C'est là une longueur assez grande par rapport aux longueurs que nous venons de mentionner, mais qui n'est pas infinie. On peut donc dire que l'équation de la diffusion permet d'évaluer les propriétés asymptotiques du problème d'entrée, par exemple, mais ne permet pas *a priori* d'aller plus loin,

c'est-à-dire d'étudier les phénomènes un peu plus rapides très proches de l'entrée du tuyau.

M. FORTIER se déclare d'accord sur cette conclusion, tout en remarquant que la distance de trois diamètres indiquée plus haut est peut être sévère car, dans une loi normale, la probabilité décroît très vite lorsque l'on considère des écarts supérieurs à trois fois l'écart-type.

M. HYACINTHE observe que, faute de temps, M. FORTIER n'a pu signaler « l'analyse à deux particules » qui devient indispensable si l'on veut rendre compte des phénomènes de diffusion à grande échelle en géophysique, c'est-à-dire dans l'atmosphère et en mer.

L'analyse lagrangienne à une particule de Taylor (1921), avec :

$$(D_{\Gamma \text{ turb}})_{ij} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\overline{y_i y_j})$$

s'applique très bien à la diffusion dans une turbulence de laboratoire décrite par la loi de probabilité de $P(x_i, t)$.

Pour le phénomène de diffusion turbulente en mer ou dans l'atmosphère, il est nécessaire d'utiliser l'analyse à deux particules plus fine faite par Batchelor (1949, 1952) avec :

$$(D_{\Gamma \text{ turb}})_{ij} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\overline{\Delta y_i \Delta y_j})$$

pour décrire la diffusion relative au centre de gravité responsable de la déformation d'un élément fluide marqué par la quantité scalaire Γ : l'étude de la loi de probabilité $P(y_i, t, t_0)$ peut se faire dans une hypothèse de processus markovien ou non.

M. FORTIER se déclare bien d'accord avec les considérations exposées par M. HYACINTHE; c'est la nécessité de réduire la longueur de son exposé qui l'a conduit à limiter ce dernier aux conceptions de Taylor.

Gravure extraite de *Architectura curiosa nova* par G. A. BÖCKLERN
Nuremberg (1664)