

### Notations

- $D$  diamètre du tube;  
 $R$  rayon du tube;  
 $T$  température;  
 $t'$  fluctuation de température;  
 $\bar{U}$  vitesse moyenne;  
 $u', v'$  fluctuation de vitesse suivant  $Ox$  et  $Oy$ ;  
 $x$  coordonnée suivant l'axe du tube;  
 $y$  coordonnée perpendiculaire à l'axe du tube et au fil chauffant;  
 $\bar{y}^2$  variance de la loi de Gauss;  
 $\theta$  ou  $\theta'$  temps;  
 $\varphi$  densité de flux;  
 $\lambda$  conductivité;  
 $\rho$  masse spécifique;  
 $C_p$  chaleur spécifique;  
 $\mathcal{R}$  nombre de Reynolds  $\mathcal{R} = (\bar{U}D/\nu)$   
 $(\nu : \text{viscosité cinématique});$   
 $R_L$  corrélation de Lagrange.

Le but de cette étude est d'observer un processus de transfert de chaleur dans un écoulement turbulent particulier.

On voulait étudier principalement la signification physique du coefficient de diffusion thermique turbulent couramment utilisé dans des calculs pratiques de transferts de chaleur.

Le cas expérimental choisi est très simple : diffusion de la chaleur derrière un fil très fin tendu suivant le diamètre d'une section droite d'un tube lisse. L'écoulement dans le tube est turbulent et le nombre de Reynolds suffisamment élevé pour éviter toute influence de la convection naturelle. D'autre part l'élévation de température créée par le sillage thermique doit être suffisamment faible pour ne pas perturber l'écoulement.

### Installation expérimentale

(fig. 1)

Elle comprend essentiellement un tube lisse (rugosité  $< 1 \mu$ ) de longueur 10 m et de diamètre 20 cm. Le débit est réglé et mesuré par col sonique, le ventilateur travaillant en aspiration. Deux cols soniques ont été utilisés, l'un correspondant à un nombre de Reynolds de 270 000, l'autre de 560 000, ce qui correspond à des vitesses maximales de 25 et 50 m/s.

L'extrémité amont du tube étant à bords francs, l'écoulement peut être considéré comme établi dans la zone d'essais située à  $50 D$  de l'entrée [1].

Le fil très fin dont nous avons exploré le sillage thermique est un fil de tungstène de 0,1 mm de diamètre et de 20 cm de long chauffé par effet Joule. La réalisation d'une source de chaleur aussi simple pose en réalité des problèmes pratiques importants. Le fil doit être tendu suffisamment pour ne pas s'agiter en tous sens dans un écoulement où la vitesse atteint 50 m/s. Townsend [2] avait déjà signalé « qu'il est impossible de tendre un fil de

\* Ingénieur à la Direction des Etudes et Recherches, E.D.F., Chatou.

38 cm de long et de 0,025 mm de diamètre de telle façon que l'amplitude de son mouvement soit inférieure à 1 cm/s (pour une vitesse de 12,40 m/s). C'est après beaucoup de tâtonnements et d'erreurs que nous avons choisi un fil de tungstène placé comme l'indique la figure 2.

La puissance dégagée par le fil sera de l'ordre de 3 à 4 W. L'énergie est fournie par accumulateurs. L'élévation de température maximale de l'air à 1 cm du fil, pour la vitesse d'écoulement la plus faible ( $R = 270\,000$ ) est 1,5 °C à 1 cm du fil et de 0,3 à 0,5 °C à 5 cm du fil.

On conçoit que pour explorer un sillage thermique aussi étroit et fait d'écart de température aussi faibles, il est nécessaire de construire un thermomètre précis, sensible et presque ponctuel.

Nous avons choisi un thermomètre à résistance dont la partie sensible est un fil de platine de 4  $\mu$  de diamètre et d'un demi-millimètre de long. Dans le champ de température exploré ici, on peut montrer que ce thermomètre mesure pratiquement la température de la partie centrale de la partie sensible, soit une zone d'encombrement inférieure à 10  $\mu$ .

Le processus de mesure adopté est le suivant :

Le thermomètre à résistance est incorporé dans un pont de Mueller. Lorsque la partie sensible est placée derrière la source de chaleur, le spot du galvanomètre indique une graduation  $p$ . Ensuite on coupe l'alimentation de la source de chaleur, le sillage thermique disparaît, le spot du galvanomètre indique la graduation  $n$ . L'écart de température caractérisant le sillage thermique est proportionnel à  $|n - p|$ .

Le thermomètre à résistance étant immobile durant la mesure, beaucoup de causes d'erreurs sont supprimées.

L'utilisation de ce thermomètre n'est pourtant pas exempte de difficultés :

— la fabrication de la partie sensible, identique à celle d'un fil chaud, est délicate. En particulier nous avons été amené, pour obtenir un appareil fidèle, à établir qu'il est nécessaire de recuire le fil de platine constituant la partie sensible;

— la mesure elle-même offre les difficultés suivantes :

— il y a vraisemblablement des modifications dans le réseau d'isothermes du fait de la présence du thermomètre. Pour réduire l'erreur, le fil de platine et le débit des branches supports sont placés parallèlement à la source de chaleur, donc aux isothermes (fig. 3);

— du fait de la turbulence les écarts de température mesurés sont fluctuants. A partir de la mesure de cette fluctuation, nous avons calculé que pour obtenir l'écart de température moyen avec moins de 1 % d'erreur, il était nécessaire de faire trente mesures et d'effectuer ensuite la moyenne arithmétique des résultats. C'est ce qui a été fait. Nous estimons que ces écarts, valant de 0,05 °C à 1,5 °C, ont été mesurés avec une erreur totale de l'ordre de 0,005 °C.

## Résultats expérimentaux

On voit sur la figure 4 un exemple de résultats. Il s'agit de mesures faites dans un plan perpendiculaire à l'axe du tube à une distance de 4 cm du fil chauffant. La sonde à résistance a été déplacée suivant un diamètre perpendiculaire au diamètre de la source chauffante.

On a placé en ordonnée l'élévation de température moyenne  $\bar{T}$ , créée par la source chauffante et mise sous la forme  $\bar{T}/T_{\max}$ , et en abscisses les déplacements de la sonde.

a) On a pu constater aisément que les courbes obtenues étaient des lois de Gauss. Si  $\bar{T}$  est l'augmentation de température en un point situé à une distance  $y$  de l'axe de symétrie, on a :

$$\sqrt{\text{Log}_e (\bar{T}_{\max}/\bar{T})} = py$$

avec :  $p = \text{Cte}$  (fig. 5).

b) La seconde constatation expérimentale concerne la variance des lois de Gauss observée, cette donnée pouvant être considérée comme une mesure du carré de la largeur du sillage.

Lorsqu'on exprime  $\bar{y}^2$  en fonction du carré de la distance à la source chauffante, on vérifie la relation (fig. 6) :

$$\bar{y}^2 = kx^2 + k'$$

Ceci pour des distances allant jusqu'à 5 cm de la source.

Il est normal que pour  $x = 0$ ,  $\bar{y}^2$  soit  $\neq 0$ . En réalité il faut faire deux corrections :

— l'une concernant l'influence de la diffusion moléculaire de la chaleur. Cette correction n'affecte pas  $k'$ ;

— le terme  $k'$  provient, comme l'a indiqué Townsend [2], de mouvements très faibles mais rapides de la source de chaleur (due à la turbulence de l'écoulement). On trouvera en [3] la démonstration complète montrant que si le fil était immobile, on aurait obtenu la loi  $\bar{y}^2 = kx^2$ .

Aussi nous pouvons énoncer la seconde constatation expérimentale.

— la largeur du sillage thermique croît, du moins jusqu'à 5 cm de la source proportionnellement à la distance à la source.

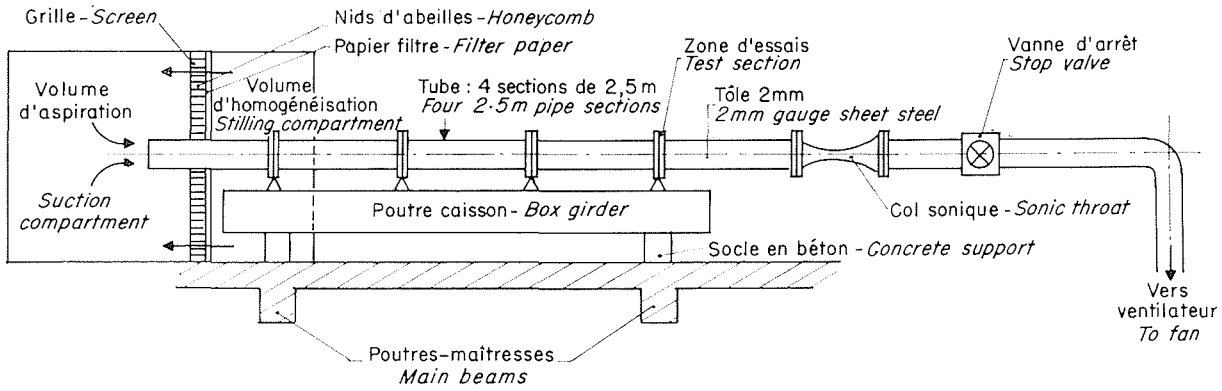
Le dernier résultat s'interprète aisément par les théories statiques de la turbulence dont nous allons rappeler quelques notions :

Etudions à l'instant  $\theta$  la position d'une quantité de chaleur élémentaire issue de la source à  $\theta = 0$ . Son déplacement suivant  $O_y$  sera :

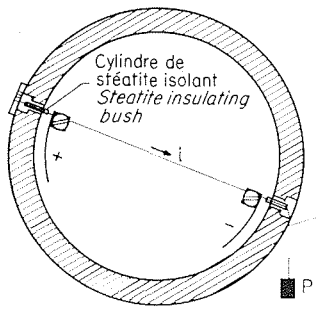
$$y(\theta) = \int_0^\theta v'(\theta') d\theta'$$

La variance  $\bar{y}^2$  est telle que :

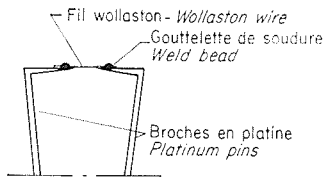
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d\bar{y}^2}{d\theta} &= \frac{d\bar{y}}{d\theta} \cdot \bar{y} = v'(\theta) \int_0^\theta v'(\theta') d\theta' \\ &= \int_0^\theta v'(\theta) v'(\theta') d\theta' \end{aligned}$$



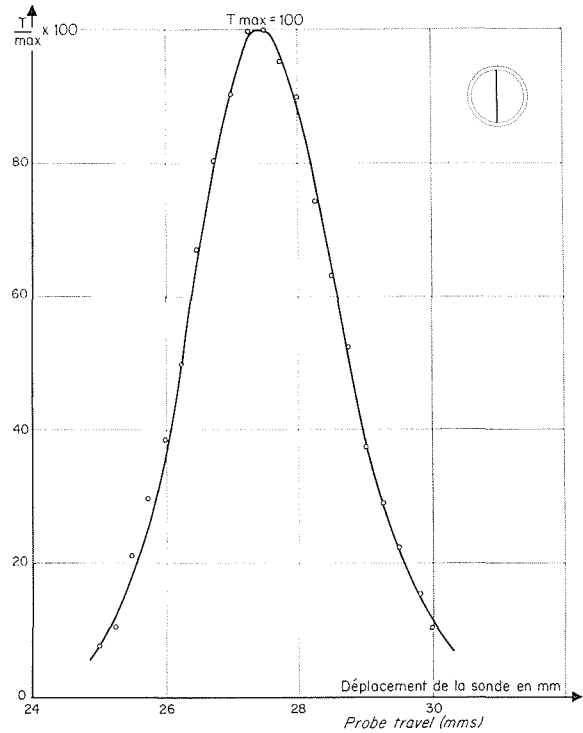
1/ Schéma général de l'installation / General rig layout.



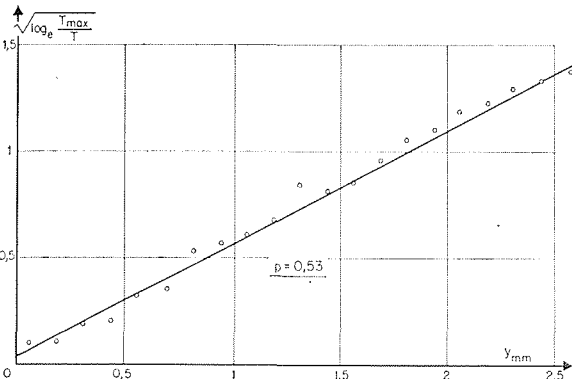
2/



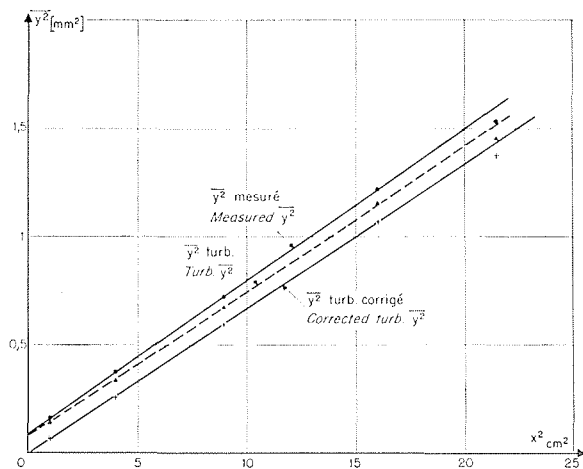
3/



4/  $R = 270\ 000$   $x = 40$  mm du fil chauffant.  
 $R = 270\ 000$   $x = 40$  mm from hot wire.



5/  $R = 270\ 000$   $x = 40$  mm.  
 $R = 270\ 000$   $x = 40$  mm.



6/  $R = 270\ 000$ .  
 $R = 270\ 000$ .

Il est possible d'exprimer simplement cette moyenne lorsque la turbulence est à la fois homogène et stationnaire.

La turbulence est homogène :  $\overline{v'^2(\theta)}$  est indépendant du point choisi.

La turbulence est stationnaire :  $\overline{v'(\theta)v'(\theta')}$  ne dépend que de la différence  $(\theta - \theta')$  et  $\overline{v'^2(\theta)}$  est constant :

On écrit :

$$\frac{\overline{v'(\theta)v'(\theta')}}{\overline{v'^2}} = R_L(\theta - \theta')$$

a) Si  $\theta - \theta'$  est petit :

$$\overline{v'(\theta)v'(\theta')} \sim \overline{v'(\theta)v'(\theta)}$$

d'où :  $R_L(\theta - \theta') \sim 1$ .

b) Par contre, il existe une valeur  $\Theta_1$  telle que pour n'importe quel  $\Theta > \Theta_1$ , on ait :

$$\int_{\Theta_1}^{\Theta} R_L(\theta) d\theta < \varepsilon$$

( $\varepsilon$  : arbitrairement petite)

$$\text{(car } R_L(\theta) \rightarrow 0 \text{ si } \theta \rightarrow \infty)$$

Ce qui revient à admettre que :

$$\int_0^{\Theta} R_L(\theta) d\theta \cong \text{Cte} \cong A \quad \text{pour } \Theta > \Theta_1$$

Il y a donc deux cas :

a)  $\theta - \theta'$  est faible, donc :  $R_L(\theta - \theta') = 1$

$$\frac{d\overline{y^2}}{d\theta} = 2 \int_0^{\theta} \overline{v'^2} d\theta' = 2 \overline{v'^2} \theta \quad \text{ou} \quad \overline{y^2} = \overline{v'^2} \theta^2$$

Nous ferons l'hypothèse de Taylor : entre le temps de diffusion, d'une part, la vitesse moyenne  $\overline{U}$  et la distance à la source comptée suivant cette vitesse moyenne d'autre part, il existe la relation :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{l}{\overline{U}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}$$

Donc on peut écrire :

$$\overline{y^2} = \overline{v'^2} \theta^2 = \overline{v'^2} \cdot \frac{x^2}{\overline{U}^2}$$

b)  $\theta - \theta'$  est grand :

$$\int_0^{\theta} R_L(\theta - \theta') d\theta' \cong \text{Cte} \cong A$$

$$\frac{d\overline{y^2}}{d\theta} = 2 \overline{v'^2} A \quad \overline{y^2} = 2 \overline{v'^2} \cdot A \cdot \theta = 2 \overline{v'^2} \cdot A \cdot \frac{x}{\overline{U}}$$

On constate donc expérimentalement que dans notre tube, à 5 cm, donc à un demi-rayon de la source chauffante, le coefficient de corrélation :

$$R_L(\theta - \theta') \sim 1$$

On note également que nous avons fait une mesure de  $\overline{v'^2}$ . On a trouvé  $\overline{v'^2} = 1,72$  et  $0,89$  m/s, ce qui est en accord avec Laufer [5].

Nous ne sommes pas limité à des expériences dans le centre du tube. Nous avons effectué des mesures dans le sillage thermique de sources chauffantes disposées suivant des cordes d'une section droite du tube.

L'interprétation rigoureuse des résultats est plus difficile car nous ne pouvons plus faire l'hypothèse d'une turbulence homogène et isotrope.

Néanmoins le résultat principal reste valable : jusqu'à un demi-rayon, au moins, de la source chauffante, la largeur du sillage reste proportionnelle à la distance à la source, donc le coefficient de corrélation reste proche de 1.

Nous allons étudier les conséquences de ces résultats sur le concept de coefficient de diffusion thermique turbulent.

### Concept de diffusivité thermique turbulente

L'équation de la chaleur pour un fluide à propriété constante et en supposant qu'il n'y a pas de transformation d'énergie d'une forme en une autre est :

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} + \text{div}(\vec{U} \cdot T) = \text{div} \left( \frac{\lambda}{\rho C_p} \overrightarrow{\text{grad}} T \right) = \text{div} a \overrightarrow{\text{grad}} T$$

( $a$  : diffusivité thermique moléculaire).

Cette équation est toujours valable, mais en turbulence elle n'est pas utilisable, tous ses termes étant fluctuants dans le temps. En séparant chaque terme en partie moyenne et fluctuation, on obtient une équation aux valeurs moyennes utilisable pratiquement :

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial \theta} + \text{div}(\overline{\vec{U}} \cdot \overline{T}) + \text{div}(\overline{\vec{u}'t'}) = \text{div} \left( \frac{\lambda}{\rho C_p} \overrightarrow{\text{grad}} \overline{T} \right)$$

La seule différence avec l'équation précédente est le terme  $\text{div}(\overline{\vec{u}'t'})$ .

Or le terme  $+\rho C_p \overline{\vec{u}'t'}$  exprime la densité de flux de chaleur  $\vec{\phi}_{\text{turb}}$  transférée par turbulence, la densité de flux total étant alors :

$$\vec{\phi} = \lambda \overrightarrow{\text{grad}} \overline{T} + \overline{\vec{u}'t'} \rho C_p$$

On conçoit qu'il soit tentant de supposer qu'en écoulement turbulent le processus de transfert de chaleur est simplement pris en compte en additionnant à la conductivité moléculaire une conductivité turbulente telle que :

$$\begin{aligned} \vec{\phi} &= -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} \overline{T} + \overline{\vec{u}'t'} \rho C_p \\ &= \lambda \overrightarrow{\text{grad}} \overline{T} - \lambda_{\text{turb}} \overrightarrow{\text{grad}} \overline{T} \end{aligned}$$

en posant :

$$\overline{\vec{u}'t'} \rho C_p = -\lambda_{\text{turb}} \overrightarrow{\text{grad}} \overline{T}$$

soit :

$$\vec{\phi}_{\text{turb}} = \frac{\lambda_{\text{turb}}}{\rho C_p} \overrightarrow{\text{grad}} \overline{T} = \varepsilon h \overrightarrow{\text{grad}} \overline{T}$$

Cette notion de diffusivité turbulente  $\epsilon h$  permet également d'obtenir une équation de la chaleur aux valeurs moyennes en turbulence semblable à celle utilisée en laminaire.

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \rho} + \text{div}(\bar{U} \cdot \bar{T}) = \text{div} \left( \frac{\lambda}{\rho C_p} + \epsilon h \right) \overrightarrow{\text{grad}} \bar{T} \quad (I)$$

On peut lier simplement  $\epsilon h$  à la croissance de la largeur du sillage thermique du fil fin dans le cas expérimental très simple que nous avons traité. En effet les lois de Gauss que nous avons trouvées ont comme équation :

$$T = \frac{A}{\sqrt{2 \pi y^2}} \exp \left( \frac{-y^2}{2 y^2} \right) \quad (II)$$

On vérifierait facilement que l'expression (II) est solution de l'équation (I) à condition que :

$$\left( \frac{\lambda}{\rho C_p} + \epsilon h \right) \neq \epsilon h = \frac{1}{2} \frac{d\bar{y}^2}{dx} \cdot \bar{U}$$

On constate alors que, dans notre expérience, le coefficient de diffusion thermique turbulent dépend de la distance à la source. Pour qu'il n'en dépende plus, il faudrait que la distance à la source soit supérieure à une longueur  $L$  nommée « grandeur des grands tourbillons » et telle que :

$$L = \int_0^\infty R(\theta - \theta') d\theta'$$

En ce cas :

$$\bar{y}^2 = 2 \bar{v}^2 A \frac{x}{\bar{U}} \quad \text{et} \quad \epsilon h = \bar{v}^2 A$$

(cf. paragraphe précédent).

Nos mesures montrent que cette longueur est de l'ordre de grandeur des dimensions transversales du tube. En conséquence :

Il est clair que le coefficient  $\epsilon h$  ne pourra pas être relié, donc calculé, à partir des caractéristiques locales de la turbulence. Il dépendra des conditions aux limites thermiques. Nous retrouvons ici des propriétés très générales des écoulements turbulents.

La différence entre diffusion moléculaire et diffusion turbulente apparaît nettement comme une différence de dimensions du processus de diffusion.

En diffusion moléculaire, la distance au-delà de laquelle les mouvements de deux particules marquées issues d'une source donnée ne sont plus corrélées est très courte, de l'ordre du libre parcours moyen des molécules. Sauf exception, ces distances sont toujours très petites par rapport aux dimensions de l'écoulement. Dans la pratique, la diffusivité thermique, donc la conductivité, est une propriété locale de l'écoulement.

En diffusion turbulente, les mouvements de particules marquées issues d'une même source restent corrélées sur des distances importantes, comparables aux dimensions de l'écoulement. On peut dire que ces particules se « souviennent » de leur origine, et de ce fait le coefficient de diffusion turbulent dépend des conditions aux limites thermiques.

Les propriétés que nous venons d'énoncer s'étendent sans aucune difficulté à la diffusion de masse ou à la diffusion de quantité de mouvement. Aussi coefficient de diffusion de masse turbulent et viscosité turbulente dépendent également des conditions aux limites correspondantes.

Dans la pratique, ce que nous venons de dire a les conséquences suivantes : si les valeurs des coefficients de diffusion turbulents utilisés dans un calcul proviennent de mesures effectuées dans ces cas proches de celui étudié, alors les résultats obtenus seront compatibles avec la réalité. Mais il ne faut pas voir dans ces calculs autre chose qu'une interpolation ou une extrapolation des mesures.

Il y a un certain nombre de cas où l'utilisation de ces coefficients de diffusion turbulents n'est pas possible : lorsque les surfaces de flux nul de la quantité transférée (quantité de mouvement, chaleur ou masse) ne coïncident pas avec les surfaces de gradient nul de cette quantité. On ne peut définir  $\epsilon h$  avec :

$$\bar{\Phi} = \epsilon h \overrightarrow{\text{grad}} \bar{T} \quad \text{si} \quad \overrightarrow{\text{grad}} \bar{T} = 0 \quad \text{et} \quad \bar{\Phi} \neq 0$$

Nous n'insisterons pas sur ces cas, en signalant simplement qu'Ibraguimov [4] indique leur fréquence dans les applications pratiques (cœur de réacteur, générateur de vapeur).

## Bibliographie

- Etude de la turbulence : cours professé à la Sorbonne par A. FORTIER (1954).
- [1] DEISSLER. — Analytical and experimental investigation of adiabatic turbulent flow in smooth tubes. *NACA*, TN 2138 (1950).
  - [2] TOWNSEND (A. A.). — The diffusion behind a line source in homogeneous turbulence. *Proceedings of the Royal Society of London*, series A, vol. 224, n° 1159 (1954), p. 487 et suivantes.
  - [3] TACCOEN (L.). — Thèse, Faculté des Sciences, Paris (1966).
  - [4] IBRAGUIMOV (M. K.) et al. — Calcul des tensions tangentielles sur les parois d'un canal et répartition des vitesses dans le cas de l'écoulement turbulent d'un liquide. *Energie Atomique*, 21, 2, 33-43.
  - [5] LAUFER (J.). — The structure of turbulence in fully developed pipe flow. National Bureau of Standards, Report 1174 (1954).

## Discussion

Président : M. A. FORTIER

M. le Président remercie M. TACCOEN pour son intéressant exposé qui illustre bien la vérification par l'expérience des considérations théoriques qu'il a exposées au cours de la matinée, et en particulier celles développées par Taylor.

Les expériences décrites par M. TACCOEN, — qui ressemblent à des expériences qui ont été faites antérieurement, — sont pourtant extrêmement utiles, dit-il, parce que la technique des mesures s'améliore. Maintenant, on peut se permettre de répéter des expériences qui ont été faites il y a très longtemps. En augmentant leur précision, je pense que

## L. TACCOEN

nous pourrions justement essayer de comprendre un certain nombre de phénomènes qui, jusqu'à présent, restent dans l'obscurité la plus totale, en particulier, l'intervention de la conduction moléculaire dans ces phénomènes de diffusion turbulente. Comme celle-ci conduit à un petit terme correctif, il faut, à mon avis, pour essayer de le mesurer, une très grande précision.

Il termine en demandant si un auditeur désire poser des questions à M. TACCOEN.

M. CASEAU désirerait connaître le nombre de Reynolds de l'écoulement au contact du fil.

M. TACCOEN précise que, suivant en cela l'expérience des précédents chercheurs, il n'a pas fait de mesure à moins de cent diamètres du fil chauffant. Il est bien d'accord avec M. CASEAU sur le fait que, si l'on se place dans le sillage du fil, à une distance de moins d'un diamètre, les phénomènes sont beaucoup trop complexes pour permettre une interprétation simple des mesures.

---

### Abstract

#### Turbulent diffusion in the wake of a wire

by L. Taccoen \*

---

The turbulent heat transfer process involved in the simple case of heat diffusion in the wake of a hot wire stretched diametrically across a tube cross-section is investigated for flow Reynolds numbers of 270,000 and 560,000. The resistance thermometer specially designed for the purpose had a  $4\mu$  dia.  $\times$  0.5 millimetre long platinum wire for its sensitive element and was capable of measuring temperature differences to within  $1/200$  °C.

The notion of a turbulent heat diffusivity coefficient is discussed in the light of the results obtained and is found to show the general properties of turbulent flow as it cannot be related to the local flow characteristics.



---

\* Ingénieur à la Direction des Etudes et Recherches, E.D.F., Chatou.